

HIT

数学·统计学系列

CHUDENG SHUXUE YANJIU

初等数学研究(I)

甘志国 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

姜立峰
藏书



数学·统计学系列

初等数学研究（I）

甘志国 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书包括整数性质、不定方程、现行高中数学教科书12章内容(集合,函数与方程,数列,三角,平面向量,不等式,平面解析几何,立体几何,排列、组合与二项式定理,概率与统计,极限,导数)、数系、数学竞赛、趣味数学、问题与猜想等18个部分的初等数学研究方面的论文206篇(其中6篇以前曾发表过),每篇文章各自独立成立。本书注重了科学性、系统性和趣味性,可作为中学、大学师生及初等数学爱好者阅读、钻研,也可作为高三学生在数学高考复习备考时参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究.1/甘志国著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.8

ISBN 978-7-5603-2733-4

Ⅰ.初… Ⅱ.甘… Ⅲ.①初等数学-教学研究-师范大学-教材②初等数学-教学研究-高中 Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第093921号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 唐 蕾 翟新烨
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张43.75 字数833千字
版 次 2008年9月第1版 2008年9月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2733-4
定 价 68.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序　言

甘志国先生的《初等数学研究（Ⅰ）》即将由哈尔滨工业大学出版社出版.标号为刘培杰数学工作室的第32号产品.作为本数学工作室的主持人甘志国先生请我为其作序.虽然作序者按常理皆为高官鸿儒,最不济也得是业内巨擘,但念甘先生执意且信任,便不揣浅陋,写上几笔.

这本著作的动议出自大约10年之前,那时笔者在哈尔滨出版社任策划编辑,由于喜欢在数学刊物上发表点小文章,遂在中学数学界被人知晓,有些中学教师便投稿过来.甘志国便是其中一位.那时他刚刚在《数学通讯》等杂志发表了十几篇文章.兴致正浓,跃跃欲试,准备发表个人的作品集.但我以出版人的眼光审视其作品后,发现文笔还略显稚嫩,不宜马上结集,遂回信让其继续"修炼",待功力纯青之后再议,一晃10年过去了,我也由哈尔滨出版社调入了哈尔滨工业大学出版社,意外的是10年后的一天,他再次将我写给他的信寄了回来要求兑现承诺,其实在这10年间我一直关注着这位年轻人在各种中学数学杂志上的表现,也感觉到这10年来甘先生的巨大进步,认为时机已经成熟,出版作品集也是水到渠成之事,其实甘先生的10年历程带给我的感受有三点:

一是坚持的重要.被誉为中国地产界思想家的冯仑说:"想在人生的路上投资并有所收益,有所回报,第一件事就是必须在一个方向上积累,连续地正向积累比什么都重要……时间决定一切……打个比方,我拿着一杯水,马上就喝了,这叫喝水;如果我举10个小时,叫行为艺术,性质就变了;如果有人举上100个小时,死在这儿,这个动作还保持着,实际上就可以做成一个雕塑;然后如果再放50年,拉根绳就可以卖票,就成文物了.所以不是行为本身,而是时间会决定一件事的性质.甘先生如同中国象棋中的小卒.一直向前拱到底线终成大器.毛泽东曾教导我们说:一个人做一件好事并不难,难的是一辈子做好事.同样的道理,一位青年数学教师写一篇小文章并不难,难的是坚持数十年,由青年而至中年,由一篇积成几百篇,这就要有一种精神了,这可能就是湖北人的韧劲.加拿大多伦多医院的谢勒博士曾得出了一个惊人的结论:数学天才是一种病态,即患上了一种名为威廉斯氏综合征.通俗地说,人类基因谱恰似一本千万字的大书,其中有20个字被印错了.甘先生不是天才,但勤奋有加.靠后天努力终成正果.

二是定位的自觉.搞研究者定位十分重要,它决定着将来学问的规模,层次与格调,有些人眼高手低,非世界难题不搞,结果与自身能力不相配匹,终落得"壮志未酬身先死".单墫教授曾有比喻,二流人才搞三流问题,结果必是一流的,而二流人才搞一流问题,其结果必是三流的.甘先生定位准确,结合本职工作,立足岗位成才,主攻初等数学研究.其实这里的初等数学是一个模糊概念,用首都师范大学数学科学学院周春荔教授的话说:它也是个发展中的概念,有人认为是算术、代数与几何的统称,也有人认为就是中小学数学范围内的问题,其实这些表述都不够准确.事实上,由于新课标的实施,高中引入了微积分和概率、向量和逻辑代数等,其中遇到的问题是初等数学问题还是高等数学问题?答案应是"亦此亦彼!"不能搞"非此即彼!"正如梅向明教授所说:"初等数学是高等数学的基础,它为高等数学的发展提供思想方法,同时又为抽象的高等数学提供具体的模型."初等是相对的.1950年美籍挪威数学家塞尔伯格(Selberg, Atle 1917—)获第二次世界大战后首次菲尔兹(Fields)奖.原因是他于1949年利用塞尔伯格不等式给出了素数定理的初等证明,使数学界受到很大震动.之前法国数学家阿达玛(Hadamard, Jacques 1865—1963)于1896年应用ξ函数的性质,证明了素数定理,而他则被称为使用了高等方法——复分析.所以这里的初等二字意味着只用微积分而不用复分析.

I·里查兹在《今日数学》(这是一本目的在于向有才智的非数学家转述数学概念的一些性质、发展和应用的一本文集)中评价指出:

他们(指阿达玛与V·普洼松(de la Vallée Poussin))的证明(都基于黎曼的著作)所用的方法非常间接,这些方法来自复变函数论,事实上阿达玛在作上述突破时,已发展了复变函数的某些新技巧,这些技巧后来用于无线电波理论,以证明用来消除讯号干扰的滤波器不会抹掉有用的信息.

从科学发展的观点来看,这一切都很不错.但有些数学家感到大失所望.素数定理的证明,转弯抹角,没有人真能懂得.每个步骤都可以弄懂——它是正确的——但和素数有什么关系,似乎很不明显.多少年来人们寻求"初等的"证明,即仅用素数的基本性质,避免复变函数和波分析这些深奥的方法.这一方面的发展也需要很长的时间,但终于在1948年由A·塞尔伯格和P·爱尔特希找到了所要的证明.然而新方法和老方法一样的难懂."初等"方法的意思是每个步骤都是初等的,但步骤太多,过程过于繁复,不能一目了然.或许这是不可避免的.似乎有一条"困难守恒"原理,说困难就是困难,不管你怎样去解决它.([美]L·A·斯蒂恩主编,马继芳译.上海:上海科学技术出版社,1982.)

初等数学小天地但可以有大作为,如周春荔教授所指出:今天看来,我们所谓的初数选题,一般是指用大学基础数学范围内的知识、方法和工具可以尝试研究的,为研究者所感兴趣的数学课题.所谓的初数研究一般是指大家对上述类型课题的研究,有些问题初等数学工作者和职业数学家都在研究.如阿佩尔(Apéry)数的同余性质.在梁宗巨先生的《世界数学通史(下册)》(辽宁教育出版)第22章"20世纪数学"中被列为初等数学前沿课题.1978年在芬兰赫尔辛基召开的国际数学家大会(ICM)上.法国数学家阿佩尔宣布他证明了$\xi(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$是无理数.在他的证明中他引入了以他名字命名的阿佩尔数a_n.由于阿佩尔数的巨大威力.一时间研究阿佩尔数成为热门,数论专家Chowla 1980年在《数论杂志》(Jour of Number Theory 1980年12月号,188~190页)中专门讨论了阿佩尔数的性质,并提出了四个猜想:

(1)$a_{2n}\equiv 1\pmod 8$, $a_{2n+1}\equiv 5\pmod 8$;

(2)$a_{2n}\equiv 1\pmod 3$, $a_{2n+1}\equiv 2\pmod 3$;

(3)当$p>5$且p是素数时,$a_p\equiv 5\pmod{p^3}$;

(4)当p是奇素数时,$a_p\equiv 0\pmod 5$.

这些猜想1983年都被山东大学的楼世拓和姚琦解决.阿佩尔、Chowla、楼世拓、姚琦都是职业数学家.所以此问题从这个角度看并不初等.

有的高考数学试题或数学竞赛试题,就是命题科研成果中的一个引理,比

如2007年全国高中数学联赛的加试第三题:“设集合 $p = \{1,2,3,4,5\}$. 对任意 $k \in p$ 和正整数 m, 记 $f(m,k) = \sum_{i=1}^{5}[m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}]$, 其中$[a]$表示不超过 a 的最大整数. 求证:对任意正整数 n. 存在 $k \in p$ 和正整数 m, 使得 $f(m,k) = n$”据说,就来自供题者的科研论文(周春荔“对‘初数’研究的一点感言”《中学数学研究》2008年第2期).

另外有些问题外表初等但实际上却与数学前沿直接相通.

例如1981年在美国举行的第22届IMO上,芬兰提供了一个试题.

函数 $f(x,y)$ 对所有的自然数 x,y 满足:

(1) $f(0,y) = y+1$;

(2) $f(x+1,0) = f(x,1)$;

(3) $f(x+1,y+1) = f(x,f(x+1,y))$.

试确定 $f(4,1981)$.

这个貌似初等的问题,其背景实际上就是德国大数学家希尔伯特(Hilbert)的高足阿克曼(Friedrich Wilhelm Ackermann)提出的一个重要的递归函数. 阿克曼生于德国的苏涅贝克,曾在闵斯特尔任教授,主要研究数理逻辑,与希尔伯特合作写了专著《理论逻辑基础》,被译成多种文字. 1920~1930年间他还和希尔伯特一起研究了希尔伯特的证明论.

近年来人们发现它与著名的哥德尔不完全性定理有关. 所谓哥德尔不完全性定理就是说:“在一个比自然数理论更广的形式化的数学体系中,必定存在着关于自然数的既不能肯定也不能否定的命题.”亦即“包含着皮亚诺(Peano)自然数理论的形式化体系都是不完全的体系.”

20世纪80年代,杰夫·帕里斯(Jeff Paris)和利奥·哈林顿(Leo Harrington)在组合问题中取得了一个增加趋势远远超过阿克曼函数的函数,它的某些性质就表现出了在皮亚诺体系中的不可判定性,后来,哈维·弗里德曼(Harrey Friedmann)同样在有限组合问题中又找到了一个比帕里斯-哈林顿更高级的函数,这个函数的某些性质也表现出了皮亚诺体系中的不可判定的某些事实. 对此1982年11月的《科学》(Science)杂志上专有一篇题为《哥德尔定理对数学有关系吗?》(Does Godel's Theorem Matter to Mathematics?)的简短文章,对此进行了报导.

三是对事业热爱. 曾国藩曾在其家书中告诫自己的后代,交友一定要交有嗜好有癖之人,后代不解,追问没有嗜好没有癖的人有何不可,曾国藩说:其没

有深情也！对某项事业某种物件某位佳人一往情深是一个人幸福的基础，也是事业成功的必要条件．甘志国先生就是一位对初等数学情有独钟，嗜数如命的青年教师．曾经贫穷过，曾经疾病过，但都不改初衷，坚持钻研，并从中得到了乐趣．法国数学家泊松(Poisson Simeon-Denis Baron，1781—1840)有一句名言：人生最大的乐趣有二，一为数学的发现，一为数学的教学．甘先生兼而有之，想必人生充满乐趣．

一位教育专家曾说．教师有两种类型：一类是“为生存而教育”，一类是“为教育而生存”．甘先生显然是后者．

现在随着国家对教育的重视，中学教师特别是数语外教师靠自己的知识和劳动也跻身于中产阶级行列．享受生活成为了这一阶层的生活核心，如C·赖特·密斯瓦所说：中产阶级气质意味着对自己的生活感到满意，意味着形而上的情思的枯竭，意味着人生的终极关怀的丧失，意味着探索精神之路的断绝．”我们很高兴看到甘志国式的青年教师有追求有理想有成果．1996年美国“数学与美国未来全国委员会”发表了引发转折的标志性报告《至关重要：美国未来的数学》．其中提出“高胜任教师”(highly qualified teacher)概念．可以断言只有不断钻研初等数学的中学数学教师才能是新时代的高胜任教师．

20多年前的一个星期日的清晨，刚刚走上教学岗位的笔者突然醒来，辗转反侧，难以入睡，蹬自行车到了学校．伴着晨光写了一篇小文章《Vandermonde行列式与USAMO试题》，不久便发表在《湖南数学通讯》上．笔者也由此从市政工程学院调入哈师专数学系开始了数学竞赛的研究与教学．今天甘志国的这部专著比之我当年的小文章不知厚重多少倍，愿它的出版将甘先生带到一个新的平台，这即是心理学中的共情，也表达了一个曾经在数学战线但现在却临阵退缩了的“逃兵”对初等数学研究的眷恋与对现在仍“奋战”在一线的勇士的敬佩．

中国式的文章要想一贯正确缺少不了一个句式，那就是“虽然……但是”．我们说虽然甘先生的大作内容丰富、角度独特、可读性强，但是我也要提两点不足．一是选题要有深度，避免出现如同爱因斯坦所说的那样：“在一块薄板上钻很多眼”．第二个要少而精，重质不重量．据陈哲三先生回忆当年在请不请尚在国外的陈寅恪来清华大学任导师，梁启超先生与曹云祥校长发生了意见分歧．曹校长说陈既不是博士又没有著作，难以聘用．梁启超先生说：“我梁某也不是博士，著作算是等身了，但总共还不如陈先生寥寥数百字有价值．”(黄延复著．《清华逸事》．沈阳：辽海出版社，1998：15．)

英国《泰晤士报》曾刊发过一篇题为《未来是橙色的》的署名文章.其中介绍了一个奇特的现象,那就是北纬53度“盛产”数学家.据安德鲁斯大学研究人员计算得出.过去400年中54%的数学家出生在北纬53度的地方.这个国外的研究结论在中国是否适用不得而知.但中国有句俗语:天上九头鸟,地上湖北佬”.湖北人聪明勤奋,数学自然不弱,读完甘先生大作相信你一定会有这样的感觉:唯楚有才!

刘培杰

2008年6月17日于哈尔滨

前　言

笔者在读小学时，就喜欢上数学课，喜欢做数学题(喜欢的原因很简单:学习数学只需一张纸、一支笔和一个不太聪明的大脑就行了)，从做题中也体验到了成功的喜悦；到了读中学时，这种兴趣就更强烈了，每天除了完成学习任务之外，就是到学校图书室去借阅各种数学习题集做，也翻阅《数学通报》、《数学通讯》等数学杂志；又到了参加工作时，更是酷爱"数学"这门科学了，一边进行数学教学，一边攻读大学数学课程和数学研究生课程，还利用一切业余时间进行初等数学研究，并尝试着总结自己的研究成果，写成论文，准备投稿发表，终于在1994年2月，全国创刊最早(1933年)的中等数学期刊《数学通讯》的"专题写作"栏发表了笔者的论文《$\{R(n^m)\}$的周期性》.时至今日，笔者已在多种刊、书、报(几乎遍及全国各省、市)上发表了论文270篇(总计35万字)，可谓殚精竭虑，笔耕不辍.

数学论文绝不是文字、符号的简单拼凑、组合，必须阐述的是新成果、新观点，因而应言之有物、论证严密、有条理、逻辑性强.写数学论文的关键是研究深入，"七分研究三分写"就是这个道理.真正有价值的论文，其基础必须是一个好的研究成果，没有坚实的科学研究成果，决不可能写出好的论文来，初等数学研究包括以下内容.

(1)教材研究:包括对教材内容及其教学方法的研究.

(2)竞赛研究:包括对赛题的解法、赛题结论的推广和赛题的编制等.

(3)解题研究:包括一题多解,多题一解,数学题型的归类,寻找解题技巧,数学题结论的推广,数学命题的发现及编制等.

(4)专题研究:指对数学中的某个专题作深入细致的研究,这种论文价值较大,但研究的难度也很大,并且难出成果,所得结论必须是前人未曾得到过的深刻结论.

(5)文献研究:对刊、书、报上别人发表的文献中的结论加以改进、加强、推广,解决其中的问题和猜想等.

(6)课外活动研究:数学课外活动是数学课堂的延续和补充,也是学生学习数学知识,及教师传播数学知识的重要形式,数学课外活动开展得好,可以提高学生对数学的学习兴趣,让他们积极主动的钻研数学,使教师教得轻松,学生学得容易,所以此项研究也很重要.

(7)跨学科研究:各学科之间的联系越来越紧密(所以各种边缘学科不断产生),数学、物理、化学、生物、地理之间更是密不可分,因数学研究这些学科的研究就是跨学科研究.

在日常生活中,只要多留心、多思考,万物皆是数学研究的对象,数学论文的素材、数学知识的运用,研究的方法也多种多样.总之,生活处处皆数学.华罗庚先生也曾说过:宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学.

笔者进行初等数学研究已有二十余年了(初等数学研究必将伴随笔者一生,甚至是笔者一生工作、学习、生活的重要组成部分),选择部分研究成果汇集成书是笔者多年的夙愿.感谢哈尔滨工业大学出版社的高瞻,才使得本书终于出版发行.在成书的过程中,笔者对以前的研究又作了仔细的推敲,对每一点内容都是本着近乎苛刻的态度进行重新审读,力求简洁完美,准确无误后才定稿的.但书中难免仍有疏忽和纰漏之处,所以希望广大读者在研读本书时能指出它们,并能与笔者联系(E-mail:ganzhiguo1971@163.com),也欢迎与笔者讨论其他数学问题.

正值本书出版之机,笔者还要向笔者在初数研究的道路上给予关心、支持、鼓励和指导的众多老师(笔者至今还珍藏着我们之间的书信)致以崇高的敬意!是你们的无私帮助才使笔者能取得一些初数研究成果.另外,哈尔滨工业大学出版社为本书快速、高质量的出版给予了极大的支持,特别是刘培杰先生为本书的出版付出了很多心血,在此一并表示深切的谢意!

本书的出版对笔者的初数研究又是一个极大的鼓舞，笔者将更加认真深入地进行初数研究，一定会接着让更丰硕的成果《初等数学研究（Ⅱ）》、《初等数学研究（Ⅲ）》……早日问世.

《初等数学研究（Ⅰ）》是不是一个成功的尝试，自然留待历史去评说，更有待于有识之士的批评鉴定，若本书中叙及的结论、方法能为读者在初数研究的道路上起到一粒铺路石子的作用，笔者就心满意足了.

甘志国

于湖北省十堰市东风高级中学

2008年6月

目　　录

整数性质

正整数的一个奇异性质 …… 3
正整数幂的一种奇妙性质 …… 5
p 变换黑洞 …… 11
也谈周长为定值的整边三角形的个数 …… 13
基本重数问题与伪素数问题的联系 …… 15
“和为定值的两个自然数之积的性质”的推广 …… 21
k 个周长相等的基本勾股形有无穷组 …… 22
正 Fibonacci 数的标准分解式中诸素因数的指数 …… 25
“Lucas 数的标准分解式中诸素因数的指数”研究 …… 29
K 数及其对偶数 Z 数的构造 …… 34
whc 7 的初步解决 …… 38
K 变换的合理定义及 $p=2$ 时 **whc** 12 的解决 …… 42
p 进制下的三个数学黑洞问题——**whc** 3,4,5 的初步解决 …… 46
否定一个定理的逆命题 …… 51
已知面积的(本原)海伦三角形三边的求法 …… 54
能表示成两个正整数的平方和的数 …… 56
$p\mid C_{p-1}^{k}-(-1)^{k}$ 时 p 的性质的研究 …… 59
贝尔数的递推公式及一条新性质 …… 62
一边为定值的勾股形的个数及求法 …… 65
已知一边范围的整边三角形的个数 …… 70
求 t 除 a^{n} 的余数 …… 72
浅探循环节长度对应的素数 …… 75
Fibonacci 数的一条整除性质 …… 79
$\{R_{k}(a^{n})\}$ 的一个周期 …… 82
$\{R_{t}(n^{m})\}$ 的周期性 …… 83

关于 $\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)个0}1$ 及 $\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)个0}2$ 的 K 变换 …… 84
$0_n1_n2_{n(3)}$的 $K_{3,3n}$变换的部分结论 …… 90
广义平方 m 的重连整数 …… 92
$2q$ 进制平方 m 重连整数 …… 95
"一条小定理"的推广 …… 100
研究 Fibonacci 三角形猜想的一种方法 …… 102
用等距平行线把平行四边形涂成阴影的线段条数及总长度 …… 108
应区分完全平方式与完全平方数 …… 114
素数与二元平方和数的整除性 …… 116

不定方程

推广的安道什猜想的全相等的解 …… 125
安道什猜想的类似的推广的全相等正整数解 …… 128
方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的正整数解的组数 …… 129
方程 $x^2-3y^2=-1$ 没有整数解的简短证明 …… 131
不定方程 $ax^2+bxy+cz^2=\lambda z^n$ 的部分整数解 …… 134
不定方程 $x^2+\sum\limits_{k=1}^{n}d_kx_k^2=y^2(d_k\in\mathbf{Q})$的部分整数解 …… 138
不定方程 $ax^2+by^2=cz^n$ 的部分整数解 …… 140
用复数模的性质求不定方程 $x^2+dy^2=z^n(d\in\mathbf{Q},n\in\mathbf{N}^*)$的部分整数解 …… 143
一类不定方程的两种解法 …… 145
两个不定方程(组)的解 …… 148
不定方程 $x^4+y^2=2z^4$ 的正整数解 …… 153
也谈不定方程 $x^4+y^4+(x+y)^4=z^4+w^4+(z+w)^4$ 的全部整数解 …… 157
不定方程 $x^3-y^3=n$ 的整数解的求法 …… 160
广义勾股数组的求法 …… 163
把分数表示成两个单位分数的和与差 …… 166
一个引理的证明 …… 170
所有的金蝉脱壳数的求法 …… 172
浅探四个问题 …… 177

集　　合

一类集合的元素个数 …… 185
集合 R_n^2 与完全平方数 …… 189

函数与方程

多项式 $S_k(x)$的一条性质 …… 193
一元二次多项式连贯性的研究 …… 197
求一元丢番图方程有理根的又一种方法 …… 209
应区别函数图象的两种轴对称 …… 211
广义连贯多项式 …… 213
whc 82 的解决 …… 216
对数学问题 1677 的推广 …… 218
对《对用最小公倍数法求周期的质疑及扩充》一文的再质疑 …… 221
又四类抽象函数的周期性 …… 224
也谈用判别式法求一类函数的值域 …… 226
也谈二元二次多项式的因式分解 …… 229
也谈二元多项式的因式分解 …… 232
函数 $y=k\sqrt{ax+b}+l\sqrt{cx+d}$的单调区间及值域 …… 234
函数 $y=kx\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$的单调区间及值域 …… 238
函数 $f(x)=\sqrt{(x-a)^2+b^2}\pm\sqrt{(x-p)^2+q^2}$的单调区间及值域 …… 244
方程 $a^x=\log_a x$ 解的个数及一类新型极限 …… 248
三次方程根的情况的简明结论 …… 257
方程 $x^x=x$ 的实数解的简洁解法 …… 261
两道题的完整解答 …… 263

数　　列

$\sum_{i=1}^{n} i^k(k\in\mathbf{N}^*)$的一个求和公式及其他 …… 269
求 $S_k(n)$表达式的较好方法 …… 274
正整数方幂和的求法及性质 …… 280
一道复习参考题的变式 …… 287

看一个递推数列通项的求法 …… 289
$n^2=1+3+5+\cdots+(2n-1)$的推广 …… 291
两类分式递推数列通项的又一初等求法 …… 292
一类数列通项的求法与三道高考题 …… 296
对一道联考压轴题的研究 …… 299
对 2003 年全国高考卷理科数学压轴题的研究 …… 301
二阶递归数列通项的初等求法 …… 305
已知等比数列中的任意两项求通项 …… 308
一类二元二次方程的解与一类二阶递归数列的项的联系 …… 311
Fibonacci 数列的几条性质的推广 …… 315
一个递归数列的性质 …… 318
首项不是 3 的素数等差数列的公差必是 6 的倍数 …… 323
等差数列的前 n 项和为完全平方数的条件 …… 325
正整数方幂的累进和概念的推广 …… 328
用课本求解 $\sum\limits_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+m)$ …… 329
k 阶递归数列通项的初等求法 …… 331
等差中的“=0”为何变成了等比中的“=1”? …… 335
whc 102 的解决 …… 337
也谈正整数的等比分拆 …… 340
公差为 2 的正整数的等差分拆 …… 342
全体奇合数组成的数列的一个通项公式 …… 345

三　　角

“十年苦琢白玉璧，一朝竞放紫罗兰”——数学问题 1539 的恒等式解法 …… 349
在$\triangle ABC$中$\sum\sin(A-\alpha)$的值域 …… 351
多边形的余弦定理及一个面积公式 …… 358
浅探给定三边长度的四边形的最大面积 …… 367
一类三角函数的最值 …… 370
满足“边边角”条件的两个三角形全等的判定 …… 372

平面向量

一道课本复习参考题的推广 …… 377
四面体的对棱所成角的向量求法 …… 378

不 等 式

用以直代曲法证一个不等式 …… 381
从加权平均值不等式到另几个重要不等式 …… 384
也谈一类条件最值问题 …… 389
一个不等式命题的推广 …… 394
对几个猜想的探究 …… 396
对几个猜想的再研究 …… 401
对一个猜想的研究 …… 405
运用均值不等式求几个无理函数的最值 …… 410
一个最值定理的推广 …… 412
一道课本习题的变形、加强及推广 …… 415
一个不等式的高维推广 …… 417
浅探一类函数的最值 …… 419
函数 $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ 的最值 …… 427
一个最值问题的初等解决 …… 430
一个三角不等式的再推广 …… 432
用函数的单调性统一一类不等式 …… 437
对一个不等式的再研究 …… 439
一个代数不等式的推广 …… 441
对一个不等式的思考 …… 445
一个定理的再推广及产生的新问题 …… 447
一类不等式的最值问题 …… 449
也谈一个不等式的推广 …… 453
用 Cauchy 不等式的两个推论证题 …… 456
求$[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}]$的几个简明结论 …… 458
三角形的面积、周长、内切圆半径、外接圆半径之间的一些大小关系 …… 460

平面解析几何

深入挖掘圆锥曲线的定义 …… 467
一个有趣的解析几何问题 …… 471
用伸缩变换求椭圆的切线 …… 474
圆锥曲线的一条性质 …… 476
椭圆中一类张角的取值范围 …… 479
一类椭圆的离心率问题 …… 483
圆锥曲线焦点弦的两条性质 …… 485
一个问题的解答 …… 487

立体几何

地球表面已知经纬度的两点的球面距离公式 …… 491
正棱锥的侧面所成二面角的范围 …… 495
三角余弦定理的一个运用 …… 497
正三棱锥的两个充要条件 …… 499
一种求二面角问题的通法 …… 502
一个猜想的否定 …… 504
用平面几何中的平行公理证立体几何中的公理 4 …… 506

排列、组合与二项式定理

$12\cdots n$ 的所有 m 元排列的反序数之和及其应用 …… 509
球入盒问题 …… 513
数学问题 1466 的二项式定理解法 …… 516
一类排列最值问题 …… 518

概率与统计

广义几何分布的期望与方差 …… 523
看三道概率题 …… 527

极　　限

几个极限问题 …… 533
可去奇点的应用——用极限求解析函数值 …… 534

圆内接正 $2n$ 边形边长的求法及关于 π 的一个极限 …………………… 537

导　　数

用导数研究一类不等式——以直代曲法的应用 …………………………… 541
切线的斜率与割线的斜率的关系——2006 年四川卷理科压轴题的简解 ……………………………………………………………………… 549
三、四次函数的极大值均大于极小值 ………………………………… 552
一个结论的简证 ……………………………………………………… 554
定点(直线)与已知曲线上的点的距离的最值 ………………………… 556
对函数极值定义的异议 ……………………………………………… 559

数　　系

三谈一类根式的无理性 ……………………………………………… 563
Cardan 公式与整数的一种无理分拆 ………………………………… 566
纯循环小数的一个性质 ……………………………………………… 568
纯循环小数的一个性质及其应用 …………………………………… 569

数学竞赛

对一道全俄中学生数学竞赛题的研究 ………………………………… 573
一道俄罗斯数学竞赛题的再推广 …………………………………… 577
一道抽屉原则题的一般情形 ………………………………………… 579
有关三角形的一类面积问题的解决 ………………………………… 580
一道联赛加试题的完整解答 ………………………………………… 584
一类不定方程的解法 ………………………………………………… 587
一类不定方程的一般情形 …………………………………………… 589
一类最值问题 ………………………………………………………… 591
一道例题的正确解答 ………………………………………………… 594
证明整值多项式的一种有效方法 …………………………………… 595
空间四边形的内角和小于周角 ……………………………………… 597
一道 USAMO 试题的再推广 ………………………………………… 599
IMO－41 第 2 题的等价变形 ………………………………………… 603
再谈一道数学奥赛题 ………………………………………………… 606
关于凸多边形内角的几个定理 ……………………………………… 608

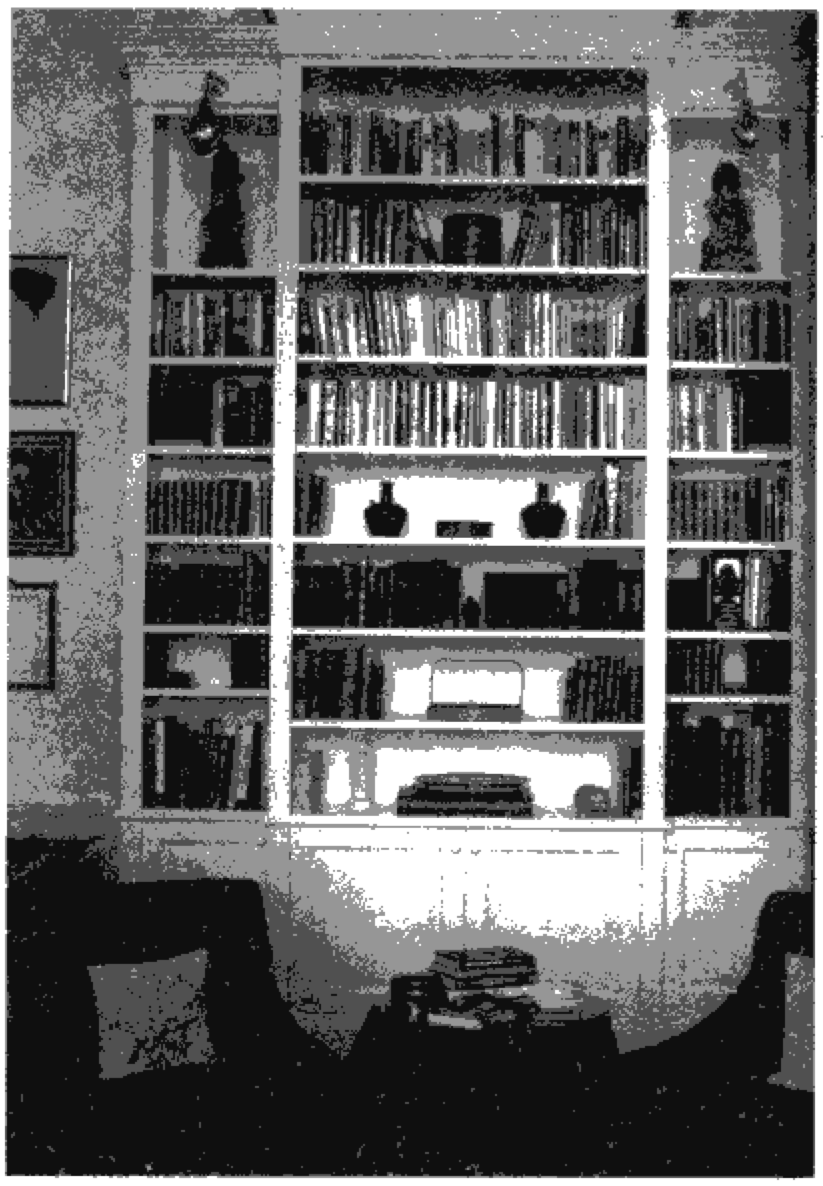
趣味数学

由提示语“多了”、“少了”猜[a,b]内任一整数至多需[$\log_2(b-a+1)$]+1次 …… 615
游戏“割尾巴还原”的推广 …… 618
区时差公式 …… 621
$A\cdot B$ 的前 t 位数与 A,B 的前 t 位数的联系 …… 623
也谈“一组有趣的数字” …… 625
也谈“莱福德排列” …… 628
“二次曲线上四点共圆的充要条件”简证 …… 630
三谈“漂洗衣服” …… 632
合理的定期存款利率 …… 635
斜抛运动的最佳抛射角 …… 637
鸡蛋能堆多高? …… 640
可听到多少下钟声? …… 644
a^b,b^a 谁大? …… 649
还贷款额函数 PMT 的内涵 …… 650
对分马问题的改进 …… 652
记住时间——推算星期几 …… 655
购物总价应是数量的严格递增函数 …… 656
2001 年 1 月 1 日星期一 …… 658
春节的公历日期范围 …… 659

问题与猜想

由“不全相等的四个完全平方数不能组成等差数列”所想到的 …… 663
关于 n 连贯多项式的一个问题 …… 665
一个猜想的证明 …… 666
公元纪年中三个计算问题的解决 …… 667
管家的难题 …… 672
对一道课本例题的异议及产生的新问题 …… 675
浅探一个最值问题 …… 676

整 数 性 质



正整数的一个奇异性质

[美]阿尔伯特·H·贝勒著，谈祥柏译的通俗数学名著《数论妙趣——数学女王的盛情款待》(1998年上海教育出版社，世界著名数学家陈省身为该书题词"迎接2000数学年")第193页写道：

"以故犹太学校的教师耶库梯尔·琴斯堡博士(Dr. Jekuthiel Ginsburg)注意到6的除数(除数即正约数——笔者注)为1,2,3,6，而它们又各有1,2,2,4个除数.这些数之间具有关系式$(1+2+2+4)^2=1^3+2^3+2^3+4^3$.另外30的除数为1,2,3,5,6,10,15,30，而它们的除数个数为1,2,2,2,4,4,4,8.且有下述关系式成立：

$$(1+2+2+2+4+4+4+8)^2=1^3+2^3+2^3+2^3+4^3+4^3+4^3+8^3=729$$

(这个奇异性质远远不限于6与30，对其他一大批自然数(这里的自然数指正整数——笔者注)也都适合，例如香港回归的特征数199771.——译者注)"

实际上，所有正整数都具有上述奇异性质：

定理 正整数的所有正约数的正约数个数之和的平方等于它们的立方和.

引理1 可设正整数$n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}$($p_i$是互不相同的质数，$\alpha_i\in\mathbf{N}^*$；$i=1,2,\cdots,k$)，则$n$的所有正约数为$\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i-1}$($\beta_i=1,2,\cdots,\alpha_i$；$i=1,2,\cdots,k$)，$n$的所有正约数个数为$\prod_{i=1}^{k}\alpha_i$.

引理2 设a_i取遍$x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im_i}$($i=1,2,\cdots,k$)，则$\prod_{i=1}^{k}\sum a_i=\sum\prod_{i=1}^{k}a_i$.

证明 即证

$$(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1m_1})(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m_2})\cdots(x_{k1}+x_{k2}+\cdots+x_{km_k})=\sum a_1a_2\cdots a_k$$

注：本书中提到的$\mathbf{N}^*$指非零自然数集；$\mathbf{R}^*$指非零实数集；$\mathbf{Q}^*$指非零有理数集；$\mathbf{Z}^*$指非零整数集.

而这正是多项式乘法法则(当然也可对 $\mathbf{k}$ 用数学归纳法给予证明).

引理 3 $(\sum_{i=1}^{k} i)^2 = \sum_{i=1}^{k} i^3$.

定理的证明 可设正整数 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1}$($p_i$ 是互不相同的质数,$\alpha_i \in \mathbf{N}^*$, $i = 1,2,\cdots,k$),由引理 1 知,定理即

$$(\sum \prod_{i=1}^{k} \beta_i)^2 = \sum (\prod_{i=1}^{k} \beta_i)^3 (\beta_i = 1,2,\cdots,\alpha_i; i = 1,2,\cdots,k)$$

用引理 2,3 证明如下:

$$(\sum \prod_{i=1}^{k} \beta_i)^2 = (\prod_{i=1}^{k} \sum \beta_i)^2 (\text{引理 } 2) = \prod_{i=1}^{k} (\sum \beta_i)^2 = \prod_{i=1}^{k} \sum \beta_i^3 (\text{引理 } 3) =$$
$$\sum \prod_{i=1}^{k} \beta_i^3 (\text{引理 } 2) = \sum (\prod_{i=1}^{k} \beta_i)^3$$

(注 以上证明包含了 $n = 1$ 的情形.)

正整数幂的一种奇妙性质

印度数学家 J·V·Chaudhari 和 M·N·Deshpande 在 1996 年 2 月发现了完全平方数的一种奇妙性质：当正整数 $k = 956 \sim 968$ 时，k^2 均为六位数，把它的前三位数与后三位数相加，得到的和也是完全平方数（例如，由 $967^2 = 935\ 089$ 得 $935 + 89 = 1\ 024 = 32^2$），并且这些完全平方数的算术平方根恰好是正整数 $43 \sim 31$.①

美国数学家 Owen Thomas 在 1996 年 9 月也发现了这样的完全平方数：当正整数 $k = 9\ 859 \sim 9\ 900$ 时，k^2 均为八位数，把它的前四位数与后四位数相加，得到的和也是完全平方数，并且这些完全平方数的算术平方根恰好是正整数 $140 \sim 99$.②

实际上，由 1998 年 10 月笔者发表的拙文《几类双色完全平方数》[1] 中的定理 1 也可得上述结论.

中国陕西省的王凯成老师对上述问题作了比较深入的研究（见注释 ③、④ 及文献[2]、[3]），文献[3] 的定理给出了 $k^{2m}(k, m \in \mathbf{N}^*)$ 的上述性质，本文将推广此性质，再给出 $k^{2m+1}(k, m \in \mathbf{N}^*)$ 的类似性质.

本文**定义** $g(\alpha, m) = 1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^{2m-2}$，则

$$g(\alpha, m) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{2m} - 1}{\alpha^2 - 1} & (\alpha \neq \pm 1) \\ m & (\alpha = \pm 1) \end{cases}$$

定理 1 设 $m, r, t \in \mathbf{N}^*, s \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{C}, s < 2mr^{2m-1}$

$$t \geqslant 2m\lg C_{2m}^{m} + (2m - 1)\lg(s + 1)$$

$$\sqrt[2m]{s \cdot 10^t} \leqslant r < \sqrt[2m]{(s + 1) \cdot 10^t}, r < 10^t$$

且 $$(10^t - r)^{2m} = \sum_{i=1}^{2m} a_i \cdot 10^{(2m-i)t} (a_i \in \mathbf{N}, a_i < 10^t, i = 1 \sim 2m)$$

则 $$\sum_{i=1}^{2m} \alpha^i a_i = [g(\alpha, m) - s\alpha^{2m-1}](\alpha \cdot 10^t - 1) + (1 - \alpha r)^{2m}$$

① 戴宏图. 一个有趣的连续数组. 小学数学教师，1996(6).
② 将秀章. 有趣的连续数组的再发现. 小学数学教师，1997(2).
③ 王凯成，罗运纶. 数论中的"漏网之鱼". 中学数学教学参考，1998(8-9).
④ 王凯成. 完全平方数对半和性质的推广. 中学数学教学参考，2001(7).

证明 由 $t\geqslant 2m\lg C_{2m}^{m}+(2m-1)\lg(s+1)$,得

$$\frac{t}{2m}\geqslant \lg[C_{2m}^{m}\cdot(s+1)^{\frac{2m-1}{2m}}]$$

$$C_{2m}^{m}\cdot(s+1)^{\frac{2m-1}{2m}}\leqslant 10^{\frac{t}{2m}}$$

$$C_{2m}^{m}\cdot(s+1)^{\frac{2m-1}{2m}}\cdot 10^{\frac{2m-1}{2m}t}\leqslant 10^{t}$$

又 $r<\sqrt[2m]{(s+1)\cdot 10^{t}}$,得 $r^{2m-1}C_{2m}^{m}<C_{2m}^{m}\cdot(s+1)^{\frac{2m-1}{2m}}\cdot 10^{\frac{2m-1}{2m}t}\leqslant 10^{t}$,即 $r^{2m-1}C_{2m}^{m}<10^{t}$,所以

$$r^{j}C_{2m}^{j}<10^{t}(j=1\sim 2m-1) \qquad ①$$

由 ① 易证:

$$0\leqslant 10^{t}-r^{j}C_{2m}^{j}<10^{t}(j=1,3,5,\cdots,2m-3) \qquad ②$$

$$0\leqslant r^{j}C_{2m}^{j}-1<10^{t}(j=2,4,6,\cdots,2m-2) \qquad ③$$

由 ① 还可得 $r^{2m-1}C_{2m}^{2m-1}<10^{t}\leqslant 10^{t}+s$,又由题设 $s<2mr^{2m-1}$,得

$$0\leqslant 10^{t}-r^{2m-1}C_{2m}^{2m-1}+s<10^{t} \qquad ④$$

又由题设 $\sqrt[2m]{s\cdot 10^{t}}\leqslant r<\sqrt[2m]{(s+1)\cdot 10^{t}}$ 得

$$0\leqslant r^{2m}-s\cdot 10^{t}<10^{t} \qquad ⑤$$

$$\begin{aligned}(10^{t}-r)^{2m}=&10^{2mt}-rC_{2m}^{1}\cdot 10^{(2m-1)t}+r^{2}C_{2m}^{2}\cdot 10^{(2m-2)t}-\\&r^{3}C_{2m}^{3}\cdot 10^{(2m-3)t}+\cdots-r^{2m-1}C_{2m}^{2m-1}\cdot 10^{t}+r^{2m}=\\&(10^{t}-rC_{2m}^{1})\cdot 10^{(2m-1)t}+(r^{2}C_{2m}^{2}-1)\cdot 10^{(2m-2)t}+\\&(10^{t}-r^{3}C_{2m}^{3})\cdot 10^{(2m-3)t}+(r^{4}C_{2m}^{4}-1)\cdot 10^{(2m-4)t}+\cdots+\\&(r^{2m-2}C_{2m}^{2m-2}-1)\cdot 10^{2t}+(10^{t}-r^{2m-1}C_{2m}^{2m-1}+s)\cdot 10^{t}+\\&(r^{2m}-s\cdot 10^{t})\end{aligned}$$

由 ② ~ ⑤ 及题设,可得

$$a_{1}=10^{t}-rC_{2m}^{1},a_{2}=r^{2}C_{2m}^{2}-1,a_{3}=10^{t}-r^{3}C_{2m}^{3}$$

$$a_{4}=r^{4}C_{2m}^{4}-1,\cdots,a_{2m-2}=r^{2m-2}C_{2m}^{2m-2}-1$$

$$a_{2m-1}=10^{t}-r^{2m-1}C_{2m}^{2m-1}+s,a_{2m}=r^{2m}-s\cdot 10^{t}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2m}\alpha^{i}a_{i}=&(\alpha+\alpha^{3}+\cdots+\alpha^{2m-1}-s\alpha^{2m})10^{t}-(1+\alpha^{2}+\alpha^{4}+\cdots+\\&\alpha^{2m-2}-s\cdot\alpha^{2m-1})+1-\alpha rC_{2m}^{1}+\alpha^{2}r^{2}C_{2m}^{2}-\alpha^{3}r^{3}C_{2m}^{3}+\cdots-\\&\alpha^{2m-1}r^{2m-1}C_{2m}^{2m-1}+\alpha^{2m}r^{2m}=\\&[g(\alpha,m)-s\alpha^{2m-1}](\alpha\cdot 10^{t}-1)+(1-\alpha r)^{2m}\end{aligned}$$

定理 2 设 $m,r,s,t\in\mathbf{N}^{*},\alpha\in\mathbf{C},s\leqslant(2m+1)r^{2m}$

$$t\geqslant(2m+1)\lg C_{2m+1}^{m}+2m\lg s$$

$$\sqrt[2m+1]{(s-1)\cdot 10^t} < r \leqslant \sqrt[2m+1]{s\cdot 10^t}, r < 10^t$$

且 $(10^t - r)^{2m+1} = \sum_{i=1}^{2m+1} b_i \cdot 10^{(2m+1-i)t} (b_i \in \mathbf{N}, b_i < 10^t, i = 1 \sim 2m+1)$

则 $\sum_{i=1}^{2m+1} \alpha^i b_i = [g(\alpha, m) + s\alpha^{2m}](\alpha \cdot 10^t - 1) + (1 - \alpha r)^{2m+1}$

证明 由 $t \geqslant (2m+1)\lg C_{2m+1}^m + 2m\lg s$,得

$$\frac{t}{2m+1} \geqslant \lg(C_{2m+1}^m \cdot s^{\frac{2m}{2m+1}}), C_{2m+1}^m \cdot s^{\frac{2m}{2m+1}} \leqslant 10^{\frac{t}{2m+1}}$$

$$C_{2m+1}^m \cdot s^{\frac{2m}{2m+1}} \cdot 10^{\frac{2m}{2m+1}t} \leqslant 10^t$$

又 $r \leqslant \sqrt[2m+1]{s \cdot 10^t}$,得 $r^{2m}C_{2m+1}^m \leqslant C_{2m+1}^m \cdot s^{\frac{2m}{2m+1}} \cdot 10^{\frac{2m}{2m+1}t} \leqslant 10^t$,即 $r^{2m}C_{2m+1}^m \leqslant 10^t$,所以

$$r^j C_{2m+1}^j \leqslant 10^t (j = 1 \sim 2m) \qquad ⑥$$

由⑥易证:

$$0 \leqslant 10^t - r^j C_{2m+1}^j < 10^t (j = 1,3,5,\cdots,2m-1) \qquad ⑦$$

$$0 \leqslant r^j C_{2m+1}^j - 1 < 10^t (j = 2,4,6,\cdots,2m-2) \qquad ⑧$$

由⑥还可得 $r^{2m}C_{2m+1}^{2m} \leqslant 10^t < 10^t + s$,又由题设 $s \leqslant (2m+1)r^{2m}$,得

$$0 \leqslant r^{2m}C_{2m+1}^{2m} s < 10^t \qquad ⑨$$

又由题设 $\sqrt[2m+1]{(s-1)\cdot 10^t} < r \leqslant \sqrt[2m+1]{s \cdot 10^t}$ 得

$$0 \leqslant s \cdot 10^t - r^{2m+1} < 10^t \qquad ⑩$$

$$\begin{aligned}(10^t - r)^{2m+1} = {} & 10^{(2m+1)t} - rC_{2m+1}^1 \cdot 10^{2mt} + r^2C_{2m+1}^2 \cdot 10^{(2m-1)t} - \\ & r^3C_{2m+1}^3 \cdot 10^{(2m-2)t} + \cdots - r^{2m-1}C_{2m+1}^{2m-1} \cdot 10^{2t} + \\ & r^{2m}C_{2m+1}^{2m} \cdot 10^t - r^{2m+1} = \\ & (10^t - rC_{2m+1}^1) \cdot 10^{2mt} + (r^2C_{2m+1}^2 - 1) \cdot 10^{(2m-1)t} + \\ & (10^t - r^3C_{2m+1}^3) \cdot 10^{(2m-2)t} + (r^4C_{2m+1}^4 - 1) \cdot 10^{(2m-3)t} + \cdots + \\ & (10^t - r^{2m-1}C_{2m+1}^{2m-1}) \cdot 10^{2t} + (r^{2m}C_{2m+1}^{2m} - s) \cdot 10^t + \\ & (s \cdot 10^t - r^{2m+1})\end{aligned}$$

由⑦~⑩及题设,可得

$$b_1 = 10^t - rC_{2m+1}^1, b_2 = r^2C_{2m+1}^2 - 1, b_3 = 10^t - r^3C_{2m+1}^3$$

$$b_4 = r^4C_{2m+1}^4 - 1, \cdots, b_{2m-1} = 10^t - r^{2m-1}C_{2m+1}^{2m-1}$$

$$b_{2m} = r^{2m}C_{2m+1}^{2m} - s, b_{2m+1} = s \cdot 10^t - r^{2m+1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2m+1} \alpha^i b_i = {} & (\alpha + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{2m-1} + s\alpha^{2m+1})10^t - (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \\ & \alpha^{2m-2} + s\alpha^{2m}) + 1 - \alpha rC_{2m+1}^1 + \alpha^2r^2C_{2m+1}^2 - \cdots +\end{aligned}$$

$$\alpha^{2m}r^{2m}C_{2m+1}^{2m} - \alpha^{2m+1}r^{2m+1} =$$
$$[g(\alpha, m) + s\alpha^{2m}](\alpha \cdot 10^t - 1) + (1 - \alpha r)^{2m+1}$$

在定理 1 中作代换 $2m \to n, s \to m - 1, r \to 10^t - k, i \to j, a_i \to m_i$,得

定理 1′ 设 n 是正偶数,$m, k, t \in \mathbf{N}^*, \alpha \in \mathbf{C}$,

$$k < 10^t, m \leqslant n(10^t - k)^{n-1}$$

$$t \geqslant n\lg C_n^{[\frac{n}{2}]} + (n - 1)\lg m$$

$$10^t - \sqrt[n]{m \cdot 10^t} < k \leqslant 10^t - \sqrt[n]{(m - 1) \cdot 10^t}$$

且
$$k^n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot 10^{(n-j)t} (m_j \in \mathbf{N}, m_j < 10^t, j = 1 \sim n)$$

则 $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha^j m_j = [g(\alpha, \frac{n}{2}) - (m - 1)\alpha^{n-1}](\alpha \cdot 10^t - 1) + [1 - \alpha(10^t - k)]^n$

特别的,有

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = (\frac{n}{2} - m + 1)(10^t - 1) + (10^t - k - 1)^n$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} m_j = (\frac{n}{2} + m - 1)(10^t + 1) - (10^t - k + 1)^n$$

($[\frac{n}{2}]$ 指 $\frac{n}{2}$ 的整数部分,下同)

在定理 2 中作代换 $2m + 1 \to n, s \to m, r \to 10^t - k, i \to j, b_i \to m_i$,得

定理 2′ 设 $n(n > 1)$ 是奇数 $m, k, t \in \mathbf{N}^*, \alpha \in \mathbf{C}$,

$$m \leqslant n(10^t - k)^{n-1}$$

$$t \geqslant n\lg C_n^{[\frac{n}{2}]} + (n - 1)\lg m$$

$$10^t - \sqrt[n]{m \cdot 10^t} \leqslant k < 10^t - \sqrt[n]{(m - 1) \cdot 10^t}$$

且
$$k^n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot 10^{(n-j)t} (m_j \in \mathbf{N}, m_j < 10^t, j = 1 \sim n)$$

则 $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha^j m_j = [g(\alpha, \frac{n-1}{2}) + m\alpha^{n-1}](\alpha \cdot 10^t - 1) + [1 - \alpha(10^t - k)]^n$

特别的,有

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = (\frac{n-1}{2} + m)(10^t - 1) + (10^t - k - 1)^n$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} m_j = (\frac{n-1}{2} + m)(10^t + 1) - (10^t - k + 1)^n$$

在定理 1′ 的特例中令 $m = \frac{n}{2} + 1$ 或 1,得

推论 1 设 n 是正偶数，$k, t \in \mathbf{N}^*$，

$$t \geqslant n\lg C_n^{\frac{n}{2}} + (n-1)\lg \frac{n+2}{2}$$

$$10^t - \sqrt[n]{\frac{n+2}{2} \cdot 10^t} < k \leqslant 10^t - \sqrt[n]{\frac{n}{2} \cdot 10^t}$$

且
$$k^n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot 10^{(n-j)t} (m_j \in N, m_j < 10^t, j = 1 \sim n)$$

则
$$\sum_{j=1}^{n} m_j = (10^t - k - 1)^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} m_j = n(10^t + 1) - (10^t - k + 1)^n.$$

推论 2 设 n 是正偶数，$k, t \in \mathbf{N}^*$，$t \geqslant n\lg C_n^{\frac{n}{2}}$，$10^t - 10^{\frac{t}{n}} < k < 10^t$

且
$$k^n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot 10^{(n-j)t} (m_j \in \mathbf{N}, m_j < 10^t, j = 1 \sim n)$$

则
$$\sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{n}{2}(10^t - 1) + (10^t - k - 1)^n$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} m_j = \frac{n}{2}(10^t + 1) - (10^t - k + 1)^n$$

由推论 1 易知文献[3] 的定理成立.

在定理 2′ 的特例中令 $m = \frac{n+1}{2}$ 或 1，得

推论 3 设 $n(n > 1)$ 是奇数，$k, t \in \mathbf{N}^*$，$t \geqslant n\lg C_n^{\frac{n-1}{2}} + (n-1)\lg \frac{n+1}{2}$

$$10^t - \sqrt[n]{\frac{n+1}{2} \cdot 10^t} \leqslant k < 10^t - \sqrt[n]{\frac{n-1}{2} \cdot 10^t}$$

且
$$k^n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot 10^{(n-j)t} (m_j \in \mathbf{N}, m_j < 10^t, j = 1 \sim n)$$

则
$$\sum_{j=1}^{n} m_j = n(10^t - 1) - (10^t - k - 1)^n$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} m_j = n(10^t + 1) - (10^t - k + 1)^n$$

推论 4 设 $n(n > 1)$ 是奇数，$k, t \in \mathbf{N}^*$，$t \geqslant n\lg C_n^{\frac{n-1}{2}}$

$$10^t - 10^{\frac{t}{n}} \leqslant k < 10^t$$

且
$$k^n = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot 10^{(n-j)t} (m_j \in \mathbf{N}, m_j < 10^t, j = 1 \sim n)$$

则
$$\sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{n+1}{2}(10^t - 1)(10^t - k - 1)^n$$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}m_j=\frac{n+1}{2}(10^t+1)-(10^t-k+1)^n$$

在推论 3 中可选 $n=t=3,k=988$ 或 989,可得两个完全立方数的性质:

$988^3=964\ 430\ 272,964+430+272=1\ 666=3(10^3-1)-11^3$;

$964-430+272=806=3(10^3+1)-13^3$

$989^3=967\ 361\ 669,967+361+669=1\ 997=3(10^3-1)-10^3$;

$967-361+669=1\ 275=3(10^3+1)-12^3$

还可将本文的四个定理及四个推论由"10 进制"推广到"$p(p\in\mathbf{N},p\geqslant 2)$进制":把这些结论中的"10"均改为"$p$",同时将常用对数"lg"改为以 p 为底的对数"$\log_p$",所得结论均成立.

参考文献

[1] 甘志国.几类双色完全平方数[J].中学数学月刊,1998(10):40.

[2] 王凯成.完全平方数对半和的几个性质[J].数学通报,1999(12):28-30.

[3] 王凯成.k^2 的一个有趣性质的推广[J].中学数学教学参考,2000(10):58-59.

p 变换黑洞

设 m 的标准分解式为 $\prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$（$p_i$ 是互不相同的素数，$\alpha_i \in \mathbf{N}^*$），定义 $p(m) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i p_i$，可以证明当 $m \geqslant 5$ 时，$p(m) \geqslant 5$，所以 p 是关于 $m = \{$不小于 5 的整数$\}$ 的一个变换．还记 $p^0(m) = m, p^{k+1}(m) = p(p^k(m))(k \in \mathbf{N})$ 关于 p 变换的黑洞有以下较完整的结论（关于黑洞的有关概念可参见文献[1]，[2]）．

定理　$\forall m \in M = \{$不小于 5 的整数$\}$，由 m 至多经过 k（k 是大于 $\log_2(n-4)-1$ 的最小自然数）步 p 变换可生成关于 M 的 p 变换的一个黑洞 q（q 是素数），且 $5 \leqslant q \leqslant m$．

为证明定理，先给出以下引理．

引理 1　若 $m = \prod_{i=1}^{k} a_i > 4, a_i \geqslant 2, k \geqslant 2$，则 $\sum_{i=1}^{k} a_i < 2 + \frac{1}{2}m$．

证明　当 $a \geqslant 2, b \geqslant 2$ 时，$(a-2)(b-2) \geqslant 0$，所以 $a + b \leqslant 2 + \frac{1}{2}ab$（当且仅当 $a = b = 2$ 时取等号）　①

由 ① 知 $k = 2$ 时引理 1 成立．

当 $k \geqslant 3$ 时，$\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i \leqslant a_1 + \prod_{i=2}^{k} a_i \leqslant 2 + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k} a_i$（最后一步由 ① 得），最后一步中若取"$=$"，则 $a_1 = \prod_{i=2}^{k} a_i = 2$，又 $a_i \geqslant 2$，所以 $m = a_1 a_2 = 4$，而 $m > 4$，所以 $\sum_{i=1}^{k} a_i < 2 + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k} a_i = 2 + \frac{1}{2}m$，即 $k \geqslant 3$ 时，引理 1 也成立．

引理 2　若合数 $m \geqslant 5, k \in \mathbf{N}$，则 $p(m) < 2 + \frac{1}{2}m$．

证明　设 $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$（标准分解式），由引理 1，得 $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i p_i < 2 + \frac{1}{2}m$，即 $p(m) < 2 + \frac{1}{2}m$．

引理 3　若素数 $m \geqslant 5, k \in \mathbf{N}$，则 $p^k(m) = m$．

引理 4　设整数 $m \geqslant 5, k \in \mathbf{N}$，则 $5 \leqslant p^k(m) \leqslant m$．

证明　当 $k = 0$ 时成立．

由引理 2,3 可知当 $k=1$ 时成立.由 $k=1$ 时成立知当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时成立.

引理 5 设整数 $m\geqslant 5$,$p^{k-1}(m)$ 为合数,则 $p^k(m)\leqslant 4+\frac{m-4}{2^k}$.

证明 对 k 用数学归纳法.由引理 2 知 $k=1$ 时成立.

假设 k 时成立,下证 $k+1$ 时成立.

当 $p^k(m)$ 为合数时,由引理 2,得

$$p^{k+1}(m)=p(p^k(m))\leqslant 2+\frac{1}{2}p^k(m)\leqslant 2+\frac{1}{2}\left(4+\frac{m-4}{2^k}\right)=4+\frac{m-4}{2^{k+1}}$$

即 $k+1$ 时成立.所以引理 5 成立.

定理的证明 当 $p^i(m)(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 中有素数时,不妨就设 $p^i(m)$ 是素数,由引理 3,得 $p^k(m)=p^{k-i}(p^i(m))=p^i(m)$,此时由 m 经过$(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 步 p 变换可生成黑洞 $p^i(m)$,$p^i(m)$ 是素数,由引理 4 知,$5\leqslant p^i(m)\leqslant m$.

当 $p^i(m)(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 全是合数时,由引理 5,得 $p^k(m)\leqslant 4+\frac{m-4}{2^k}$. 因为 $k>\log_2(m-4)-1$,所以 $m-4<2^{k+1}$,$p^k(m)<6$,又由引理 4,得 $p^k(m)\geqslant 5$,所以 $p^k(m)=5$.此时由 m 经过 k 步 p 变换可生成黑洞 5.

总之,定理成立.

对于变换 p,若补充定义 $p(0)=p(1)=0$,得 p 是关于 $D=\{0,1,\cdots,n\}$ 的一个变换,可将定理改为下述结论:

$\forall m\in D$,由 m 至多经过 k(k 是大于 $\log_2(n-4)-1$ 的最小自然数,$n\geqslant 5$) 步 p 变换可生成关于 D 的 p 变换的一个黑洞 q,且 $q\in\{0,4\}\cup\{\leqslant n$ 的素数$\}$.

当 $n=200$ 时,得 $p^7(m)\in\{0,4\}\cup\{200$ 以内的素数$\}$.此结论比文献[3]的结论"$p^{100}(m)\in\{0,4\}\cup\{200$ 以内的素数$\}$"要强得多.不过,笔者直接验证得到:此时,$p^6(m)\in\{0,4\}\cup\{200$ 以内的素数$\}$.

以上结论给出了文献[3]末提出的问题:"$\forall m\in D$,整数 k 至少是多少时,$p^k(m)\in\{0,4\}\cup\{n$ 以内的素数$\}$"的一个初步解答(还没有解决"至少").

参考文献

[1] 李鸿祥,张芝兰.数学黑洞问题的图论表示[J].数学通讯,1995(7):17-20.
[2] 甘志国.缩小变换黑洞[J].高等函授学报(自然科学版),1997(4):56-59.
[3] 徐学文.有限集上的复合函数[J].数学通讯,1995(12):33-35.

也谈周长为定值的整边三角形的个数

各边长均为整数的三角形叫做整边三角形，文献[1]的定理给出了周长为定值的整边三角形的个数，本文把该结论进一步简化．

引理 (1) $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right]$（其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数）；

(2) $\sum_{k=m}^{n}\left[\frac{k}{2}\right]=\sum_{k=m}^{n}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$ $(m,n\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n)$

证明 (1) $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{2}\right]=\sum_{2i=1}^{n}\left[\frac{2i}{2}\right]+\sum_{2i+1=1}^{n}\left[\frac{2i+1}{2}\right]=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}i+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}i=$

$\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{2}\right]\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)=$

$\left[\frac{n^2}{4}\right]$（最后一步可分$n=2m,2m+1$两种情形证明）．

(2) 可由(1)得．

注 文献[2]说“$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{2}\right]$”，由以上引理可知文献[2]的这个结论是错误的．

定理 周长为定值$l(\in\mathbf{N}^*)$的整边三角形的个数为

$$S(l)=\left(\left[\frac{l-1}{2}\right]-\left[\frac{l+2}{3}\right]+1\right)\left(\left[\frac{l-1}{2}\right]+\left[\frac{l+2}{3}\right]-l+1\right)\left[\left(\frac{l-\left[\frac{l+2}{3}\right]}{2}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{l-\left[\frac{l-1}{2}\right]-1}{2}\right)^2\right]$$

证明 可以直接验证$l=1,2,3,4$时成立$(S(l)=0,0,1,0)$．

当$l\geqslant5$时，由文献[1]的定理3可得，

$$S(l)=\sum_{n=\left[\frac{l+2}{3}\right]}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}\left(2n-l+1+\left[\frac{l-n}{2}\right]\right)=$$

$$\sum_{n=\left[\frac{l+2}{3}\right]}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}(2n-l+1)+\sum_{n=\left[\frac{l+2}{3}\right]}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}\left[\frac{l-n}{2}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(\left[\frac{l-1}{2}\right]-\left[\frac{l+2}{3}\right]+1\right)\left(2\left[\frac{l-1}{2}\right]+2\left[\frac{l+2}{3}\right]-2l+2\right)+$$

$$\left[\left(\frac{l-\left[\frac{l+2}{3}\right]}{2}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{l-\left[\frac{l-1}{2}\right]-1}{2}\right)^2\right]\text{(运用引理(2))}=$$

$$\left(\left[\frac{l-1}{2}\right]-\left[\frac{l+2}{3}\right]+1\right)\left(\left[\frac{l-1}{2}\right]+\left[\frac{l+2}{3}\right]-l+1\right)+$$

$$\left[\left(\frac{l-\left[\frac{l+2}{3}\right]}{2}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{l-\left[\frac{l-1}{2}\right]-1}{2}\right)^2\right]$$

推论 (1) $S(6k)=3k^2-\left[\frac{9}{4}k^2\right]$;

(2) $S(6k+1)=3k^2+k-\left[\frac{9}{4}k^2\right]$;

(3) $S(6k+2)=3k^2+2k-\left[\frac{(3k+1)^2}{4}\right]$;

(4) $S(6k+3)=3k^2+3k+1-\left[\frac{(3k+1)^2}{4}\right]$;

(5) $S(6k+4)=3k^2+4k+1-\left[\frac{(3k+2)^2}{4}\right]$;

(6) $S(6k+5)=3k^2+5k+2-\left[\frac{(3k+2)^2}{4}\right]$.

参考文献

[1] 潘洪亮.周长为定值的整边三角形[J].中学数学月刊,1997(3):26-27.
[2] 秦宗慈.一些取整数列求和公式及应用[J].数学通讯,1996(4):25-27.

基本重数问题与伪素数问题的联系

首先约定,本文中的字母均表示整数.

1 以 a 为底的伪素数

1.1 定义及已有的结论

定义 1 满足 $n \mid a^{n-1}-1(a \geqslant 2)$ 的合数 n 叫做以 a 为底的伪素数,以 2 为底的伪素数简称伪素数.

注意,由定义 1 知,若 n 是以 a 为底的伪素数,则 $a \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*$.

文献[1] 得到了以下关于伪素数的结论:

(1) 若 p 是奇素数,mp^2 是伪素数,则 p^2 也是伪素数;

(2) 若 p 是奇素数,则 p^2 是伪素数 $\Leftrightarrow p^2 \mid 2^{p-1}-1$;

(3) $\dfrac{2^{7\cdot 13\cdot 2^k}-1}{2^{13\cdot 2^k}-1}(k \in \mathbf{N}^*)$,$\dfrac{2^{7\cdot 13\cdot 2^k}-1}{2^{7\cdot 2^k}-1}(k \in \mathbf{N}^*)$ 均是伪素数;

(4) 当 $k \geqslant 2$ 时,结论(3) 中的两类伪素数均含有因数 $1\,093^2$.

结合文献[2] 中关于“以 a 为底的伪素数”的结论,很容易把上述结论(1),(2),(3) 推广到“以 a 为底的伪素数”中去.注释① 还证明了 $1\,093^2$,$3\,511^2$ 均是伪素数,下文的推论 1,2 还给出了另外三类“$1\,093^2$m 型”伪素数.

1.2 引理

引理 1[2] $(a^r-1, a^s-1)=a^{(r,s)}-1$.

引理 2[2] 若 $a \geqslant 2$,则 $a^r-1 \mid a^s-1 \Leftrightarrow r \mid s$.

引理 3[2] 以下两种情形 $\dfrac{a^{kp}-1}{a^k-1}(a \geqslant 2, k \in \mathbf{N}^*)$ 均为合数:(1)p 是合数;(2)p 是素数,$p \nmid k$,$k \geqslant 2$.

引理 4[2] 若 $n=\dfrac{a^{kp}-1}{a^k-1}(a \geqslant 2; k, p \in \mathbf{N}^*)$ 是合数,$kp(a^k-1) \mid a^k[a^{k(p-1)}-1]$,则 n 是以 a 为底的伪素数.

引理 5[3] (Euler定理)若$(p,a)=1$,$p \geqslant 2$,则 $p \mid a^{\varphi(p)}-1$,其中 $\varphi(p)$ 是 Euler 函数,$\varphi(p)$ 表示 $1,2,\cdots,p-1$ 中与 p 互素的数的个数(设 $p=\prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$($p_i$

① 张善立.含完全平方数因子的伪素数.中学数学月刊,1998(3)

是互不相同的素数),则 $\varphi(p)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$).(Fermat 小定理(即 p 是素数的情形)是其特例)

定义 2　若 p 是素数,$p\nmid a$,则由 Fermat 小定理知 $p\mid a^{p-1}-1$,所以存在最小的正整数 α 使 $p\mid a^{\alpha}-1$(由引理 1 可证 $\alpha\mid p-1$),这个 α 就叫做 a 关于 p 的方次数.此时,若 $p^{k_0}\parallel a^{\alpha}-1$(指 $p^{k_0}\mid a^{\alpha}-1$ 但 $p^{k_0+1}\nmid a^{\alpha}-1$),则 k_0 叫做 a 关于 p 的基本重数(显然,基本重数是正整数).(见文献[4]的第三段)

注意,由定义 2 知,若 a 关于 p 的方次数是 α,则必有"p 是素数且 $p\nmid a$";若 $p\mid a$,则 a 关于 p 的方次数不存在,基本重数也不存在.

引理 6　若 p 是奇素数,$a\neq 1$,a 关于 p 的方次数是 α,基本重数是 k_0;$k,n\in\mathbf{N}$,$p\nmid n$,则 $p^{k+k_0}\parallel a^{\alpha p^k n}-1$.(即文献[4]的定理 1,也即文献[5]的定理 6)

引理 7　若 a 关于 p 的方次数是 α,则 $p\mid a^r-1\Leftrightarrow\alpha\mid r$.

证明　只证 $\Rightarrow$　由 $p\mid a^{\alpha}-1$,$p\mid a^r-1$ 及引理 1,得 $p\mid a^{(\alpha,r)}-1$.

又由 $p\mid a^{\alpha}-1$(α 最小),得 $(\alpha,r)\geqslant\alpha$,又显然 $(\alpha,r)\leqslant\alpha$,所以 $(\alpha,r)=\alpha$,即 $\alpha\mid r$.

引理 8　若 a 关于 p 的方次数是 α,基本重数是 k_0,$k,n\in\mathbf{N}$,则 $p^{k+k_0}\mid a^{\alpha p^k n}-1$.(由引理 6 立得)

引理 9　2 关于 1 093,3 511 的方次数分别是 364,3 510,基本重数均大于 1.

证明　由文献[6]末的《9 000 以内的素数表》知 1 093,3 511 均是素数.

由文献[1]定理 3 的证明知关于 1 093 的结论成立.下证关于 3 511 的结论.

先证 2 关于 3 511 的方次数是 3 510,即证 $3\,511\nmid 2^i-1(1\leqslant i<3\,510,i\mid 3\,510)$.

因为 $3\,510=2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 13$,所以若要证结论不成立,则

$$3\,511\mid 2^{1\,755}-1(1\,755=3^3\cdot 5\cdot 13)$$

或

$$3\,511\mid 2^{1\,170}-1(1\,170=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13)$$

或

$$3\,511\mid 2^{702}-1(702=2\cdot 3^3\cdot 13)$$

或

$$3\,511\mid 2^{270}-1(270=2\cdot 3^3\cdot 5)$$

用科学计算器可以验证它们均不成立,所以 2 关于 3 511 的方次数是 3 510:

$$\begin{aligned}2^{1\,755}&=(2^{27})^{65}\equiv(-780)^{65}=-(780^3)^{21}\cdot 780^2\equiv-1\,729^{21}\cdot 997=\\&-(1\,729^3)^7\cdot 997\equiv-262^7\cdot 997=-(262^3)^2\cdot(262\cdot 997)\equiv\\&-1\,386\cdot 1\,400\equiv 1\,183(\mathrm{mod}\ 3\,511);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^{1\,170}&=(2^{30})^{39}\equiv 782^{39}=(782^3)^{13}\equiv(-476)^{13}=-(476^3)^4\cdot 476\equiv\\&-(-722)^4\cdot 476\equiv-1\,656^2\cdot 476\equiv-757(\mathrm{mod}\ 3\,511);\end{aligned}$$

$$2^{702}=(2^{27})^{26}\equiv(-780)^{26}=(780^3)^8\cdot 780^2\equiv 1\,729^8\cdot 997=$$

$$(1\ 729^3)^2 \cdot (1\ 729^2 \cdot 997) \equiv 262^2 \cdot (-1\ 179) \equiv 785 \pmod{3\ 511};$$
$$2^{270} = (2^{27})^{10} \equiv (-780)^{10} = (780^3)^3 \cdot 780 \equiv 1\ 729^3 \cdot 780 \equiv 262 \cdot 780 \equiv 722 \pmod{3\ 511}.$$

注释 ① 已证得 $3\ 511^2 \mid 2^{3\ 510} - 1$(但注释 ① 第 26 页右栏第五行中的“9 120 012”应为“910 012”,其余无误),所以 2 关于 3 511 的 基本重数大于 1.

猜想 $1\ 093^3 \nmid 2^{364} - 1, 3\ 511^3 \nmid 2^{3\ 510} - 1$.

1.3 结论的推广

定理 1 若 p,q 是不同的素数,$a \geqslant 2$,a 关于 p,q 的方次数分别是 r,s,$r \nmid qa^k$,$s \nmid qa^k$,$s \mid (p-1)a^k (k \in \mathbf{N})$,则 $\dfrac{a^{pqa^k}-1}{a^{qa^k}-1}$ 是以 a 为底的伪素数.

证明 因为 $q \mid a^s - 1$,$s \mid (p-1)a^k$,所以由引理 2 得 $q \mid a^{q(p-1)a^k} - 1$.

由 Fermat 小定理得 $p \mid a^{q(p-1)a^k} - 1$.

由 a 关于 p 的方次数是 r,$r \nmid qa^k$ 及引理 7 得 $p \nmid a^{qa^k} - 1$.同理有 $q \nmid a^{qa^k} - 1$.

又 p,q 是不同的素数,所以 $p,q,a^{qa^k}-1$ 两两互素.

因此,$pq(a^{qa^k}-1) \mid a^{q(p-1)a^k} - 1$,又显然 $a^k \mid a^{qa^k}$,所以 $pqa^k(a^{qa^k}-1) \mid a^{qa^k}[a^{qa^k(p-1)} - 1]$.再由引理 3,4 得定理 1 成立.

在定理 1 中令“$a=2, p=7, q=13$(得 $r=3, s=12, k \in \mathbf{N}^*$)”或“$a=2, p=13, q=7$(得 $r=12, s=3, k \in \mathbf{N}^*$)”,可得本文开头的结论(3),再由引理 9 可得结论(4)(注意 $364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$).

定理 2 若 p,q 是不同的素数,$a \geqslant 2$,a 关于 p,q 的方次数分别是 r,s,$r \nmid a^k$,$s \nmid a^k$,$r \mid (pq-1)a^k$,$s \mid (pq-1)a^k (k \in \mathbf{N})$,则 $\dfrac{a^{pqa^k}-1}{a^{a^k}-1}$ 是以 a 为底的伪素数.

证明 由 a 关于 p 的方次数是 r,$r \nmid a^k$,得 $p \nmid a^{a^k} - 1$,同理有 $q \nmid a^{a^k} - 1$.所以 $p,q,a^{a^k}-1$ 两两互素.

由 a 关于 p,q 的方次数分别是 r,s;且 $r \mid (pq-1)a^k$,$s \mid (pq-1)a^k$,得 $p \mid a^{(pq-1)a^k}$,$q \mid a^{(pq-1)a^k} - 1$.

所以 $pqa^k(a^{a^k}-1) \mid a^{a^k}[a^{(pq-1)a^k} - 1]$.再由引理 3,4 得定理 2 成立.

在定理 2 中令“$a=2, p=7, q=13$(得 $r=3, s=12$)”,再由引理 9,得

推论 1 $\dfrac{2^{7\cdot 13\cdot 2^k}-1}{2^{2^k}-1} (k \in \mathbf{N}^*)$ 是伪素数,当 $k \geqslant 2$ 时它还是“$1\ 093^2 m$ 型”伪

素数.

定理3 若 p,q 是不同的素数,$a\geqslant 2$,a 关于 p,q 的方次数分别是 r,s,$r\nmid a^lq^k$,$s\nmid a^lq^k(k,l\in\mathbf{N},k+l\neq 0)$,$s\mid(p-1)a^l$,则 $\dfrac{a^{pq^ka^l}-1}{a^{q^ka^l}-1}$ 是以 a 为底的伪素数.

证明 可证 $a^l,p,q^k,a^{a^lq^k}-1$ 两两互素(注意 $p\nmid a,q\nmid a$).

由 a 关于 q 的方次数分别是 s,$s\mid(p-1)a^l$,得 $q\mid a^{(p-1)a^l}-1$,又由引理8,得 $q^{k+1}\mid a^{(p-1)q^ka^l}-1$.

从而可证 $pq^ka^l(a^{q^ka^l}-1)\mid a^{q^ka^l}[a^{(p-1)q^ka^l}-1]$,再由引理3,4得定理3成立.

在定理3中令"$a=2,p=7,q=13$(得 $r=3,s=12$)"或"$a=2,p=13,q=7$(得 $r=12,s=3$)",再由引理9得($l=k=0$ 时的情形应另行验证):

推论2 $\dfrac{2^{2^l\cdot 7\cdot 13^k}-1}{2^{2^l\cdot 13^k}-1},\dfrac{2^{2^l\cdot 7^k\cdot 13}-1}{2^{2^l\cdot 7^k}-1}(k,l\in\mathbf{N})$ 是伪素数,且 $l\geqslant 2,k\in\mathbf{N}^*$ 时均是"$1\ 093^2$m 型"伪素数.

定理4 若 p 是素数,$mp^u(u\geqslant 2)$ 是以 a 为底的伪素数,则 p^u 也是以 a 为底的伪素数,且 $\alpha\mid m-1$(其中 α 是 a 关于 p 的方次数).

证明 由题设得 $p^u\mid a^{mp^u-1}$,又由引理5得 $p^u\mid a^{(p-1)p^{u-1}}-1$.

再由引理1可得 $p^u\mid a^{p-1}-1$ 所以 $p^u\mid a^{p^u-1}-1$,即 p^u 是以 a 为底的伪素数.

因为 α 是 a 关于 p 的方次数,所以 $\alpha\mid p-1$,也有 $\alpha\mid mp^u-1$,所以 $\alpha\mid m-1$.

本文开头的结论(4)及推论1,2共给出了五类"$1\ 093^2$m 型"伪素数,但笔者还未找到"$3\ 511^2$m 型"伪素数,不知用定理4能否找到此类伪素数?

推论3 若 p 是素数,$p^u(u\geqslant 2)$ 是以 a 为底的伪素数,则 $p^i(2\leqslant i\leqslant u)$ 均是以 a 为底的伪素数.

定理5 若 p 是素数,$a\geqslant 2,p\nmid a,u\geqslant 2$,则 p^u 是以 a 为底的伪素数 $\Leftrightarrow p^u\mid a^{p-1}-1$.

证明 只证 $\Rightarrow$ 在定理4的前一部分证明中令 $m=1$ 即得此处的证明.

2 基本重数问题的研究

文献[4]的第41页第一段说:方次数的计算理论上有标准方法,理论上算是解决了的,但又要借助于"原根和指数",也只有对小的素数才能在表上查到;至于基本重数的计算,理论上也没有一般方法,对小素数的尝试显示绝大多数

情况下,基本重数 $k_0=1$;但即使限于 $a=2$ 也不知道是否存在素数 p,使得2关于 p 的基本重数大于1.(文献[4]的第三段中已指出3关于11的方次数是5,基本重数是2)

基本重数问题 对于哪些 a 及素数 p, a 关于 p 的基本重数大于1?

2.1 $p=2$ 时

此时的情形非常简单:

奇数 a 关于2的方次数是1,此时,若 $2^{k_0}\parallel a-1$,则 a 关于2的基本重数就是 k_0;偶数 a 关于2的方次数不存在.

2.2 p 是奇素数时

定理6 若 p 是素数, $p\nmid a$, $a\neq 1$, a 关于 p 的方次数是 α,基本重数是 k_0; $k,n\in\mathbf{N}$, $(p\alpha,n)=1$,则 a^{np^k} 关于 p 的方次数是 α,基本重数是 $k+k_0$.

证明 由引理6得 $p^{k+k_0}\parallel(a^{np^k})^{\alpha}-1$.

当 $k,n\in\mathbf{N}$, $(p\alpha,n)=1$ 时,下证 a^{np^k} 关于 p 的方次数是 α,便得定理7成立.只需证 $p\nmid(a^{np^k})^i-1(1\leqslant i<\alpha)$,由引理7知只需证 $\alpha\nmid inp^k(1\leqslant i<\alpha)$.

因为 $\alpha\mid p-1$,所以 $(\alpha,p^k)=1$,又 $(\alpha,n)=1$,所以只需证 $\alpha\nmid i(1\leqslant i<\alpha)$,这显然成立.

推论4 (1) $2^{3^k n}(k,n\in\mathbf{N},2\nmid n,3\nmid n)$ 关于3的方次数是2,基本重数是 $k+1$;

(2) $2^{5^k n}(k,n\in\mathbf{N},2\nmid n,5\nmid n)$ 关于5的方次数是4,基本重数是 $k+1$;

(3) $2^{7^k n}(k,n\in\mathbf{N},3\nmid n,7\nmid n)$ 关于7的方次数是3,基本重数是 $k+1$;

(4) $2^{11^k n}(k,n\in\mathbf{N},2\nmid n,5\nmid n,11\nmid n)$ 关于11的方次数是10,基本重数是 $k+1$;

(5) $2^{13^k n}(k,n\in\mathbf{N},2\nmid n,3\nmid n,13\nmid n)$ 关于13的方次数是12,基本重数是 $k+1$;

(6) $2^{17^k n}(k,n\in\mathbf{N},2\nmid n,17\nmid n)$ 关于17的方次数是8,基本重数是 $k+1$.

因为推论4中的 $k+1$ 可表示任意正整数,所以存在整数 a,使 a 关于3,5,7,11,13,17的基本重数是任意正整数.

引理9也给出了基本重数问题的一个结果.

3 伪素数问题

文献[7]曾提出"伪素数是否一定不含大于1的完全平方因数",注释①解决了此问题,本文提出

伪素数问题 哪些以 a 为底的伪素数含有因数 p^u(p 是素数,$u \geqslant 2$)?(请读者重点研究 $a = u - 1 = 2$ 的情形)

4 基本重数问题与伪素数问题的联系

定理 7 $a(a \geqslant 2)$ 关于 p 的基本重数是 $k_0(k_0 \geqslant 2) \Leftrightarrow p^i(2 \leqslant i \leqslant k_0)$ 均是以 a 为底的伪素数且 $p^j(j > k_0)$ 均不是以 a 为底的伪素数.

证明 设 a 关于 p 的方次数是 α,则 $\alpha \mid p-1$,设 $p - 1 = \alpha m$,有 $p \nmid m$.则:

$a(a \geqslant 2)$ 关于 p 的基本重数是 $k_0(k_0 \geqslant 2) \Leftrightarrow p^{k_0} \parallel a^{\alpha} - 1 \Leftrightarrow p^{k_0} \parallel a^{p-1} - 1$(引理 6)$\Leftrightarrow p^i(2 \leqslant i \leqslant k_0)$ 均是以 a 为底的伪素数且 $p^j(j > k_0)$ 均不是以 a 为底的伪素数(定理 5).

由定理 4,推论 3,定理 7,得

推论 5 若 p 是素数,$mp^u(u \geqslant 2)$ 是以 a 为底的伪素数,则 a 关于 p 的基本重数不小于 u.

参考文献

[1] 张善立."mp^2 型"伪素数的性质与存在[J].中学数学,2001(3):37-38.

[2] 甘志国.浅探伪素数[J].数学通讯,2001(15):32-34.

[3] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.

[4] 陈培德.费尔马定理的一种推广及其应用[J].数学通报,2003(6):40-41.

[5] 甘志国.$a^n - 1$ 的标准分解式中诸质数的指数[C] // 傅海伦.中国教育优秀论文集.天津:天津社会科学院出版社,1998:369-371.

[6] 张文忠.整数中的明珠[M].重庆:西南师范大学出版社,1992.

[7] 单墫.趣味数论[M].北京:中国青年出版社,1987.

“和为定值的两个自然数之积的性质”的推广

文献[1]给出了和为定值的两个自然数之积的性质：

“和为 20 的两个正整数的积可依次写为

$$19\times1,18\times2,17\times3,\cdots,10\times10$$

其一阶差为 17,15,13,…,1；二阶差为 -2. 可见，这些积构成二阶等差数列. 一般的，有

“**定理 1** 和为定值的所有两个自然数的不同积，当和大于或等于 8 时，可排成二阶等差数列，其二阶差为 -2.”

（请注意，现在的“自然数”定义中包含 0，所以应把上述的“自然数”改为“正整数”.）

笔者发现，上述结论可以推广.

定理 2 设 S 为定值，$\{a_n\}$ 是至少有四项的公差为 $d(d\neq0)$ 的等差数列，则 $\{a_n\cdot(S-a_n)\}$ 是二阶差为 $-2d^2$ 二阶等差数列.

可以直接验证定理 2 成立，也可以由以下引理推出定理 2：

引理[2] 若 $f(n)$ 是首项为 $a_0n^k(a_0\neq0,k\in\mathbf{N}^*)$ 的 k 次多项式，则数列 $\{f(n)\}$（其项数大于 $k+1$）是 k 阶差为 $k!\cdot a_0$ 的 k 阶等差数列.

还可由引理把定理 2 再推广.

定理 3 设 S 为定值，$a_{i,n}$ 是 $k_i(k_i\in\mathbf{N}^*,i=1,2,\cdots,m)$ 次多项式，又设 $f(n)=(S-\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i,n})\cdot\prod\limits_{i=1}^{m}a_{i,n}$ 是首项为 an^k 的 k 次多项式，$\{a_{i,n}\}$ 均是至少有 $k+2$ 项的数列，则 $\{f(n)\}$ 是 k 阶差为 $k!\cdot\alpha$ 的 k 阶等差数列.

实际上，对定理 1 的本质认识是本文的引理及定理 3. 认识越深刻，得到的结论越具有一般性.

参考文献

[1] 王富英. 和为定值的两个自然数之积的性质[J]. 中学数学教学参考，2002(10)：59.

[2] BRUALDI B A. 组合学导引[M]. 李盘林，王天明，译. 武汉：华中理工大学出版社，1982.

k 个周长相等的基本勾股形有无穷组

整边直角三角形也叫做勾股形,三边长互素的勾股形叫做基本勾股形.文献[1]说,可以证明三个周长相等的基本勾股形中周长最小的一组为(3 255,5 032,5 993),(7 055,168,7 057),(7 080,119,7 081),它们的周长均为14 280(文献[1]有印刷错误),并问三个周长相等的基本勾股形有多少组?本文将证明 $k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant 2)$ 个周长相等的基本勾股形有无穷组.

引理 1 若 $f(n)=\sum\limits_{i=0}^{k}a_in^i,g(n)=\sum\limits_{i=0}^{k}b_in^i;a_i,b_i\in\mathbf{R}(i=0,1,\cdots,k)$,$n,k\in\mathbf{N}^*,a_k>b_k\geqslant 0$,则存在正整数常数 M,当 $n\geqslant M$(即 n 充分大)时,恒有 $f(n)>g(n)$.

引理 2 基本勾股形的三边长可表示为$(a^2-(b-a)^2,2a(b-a),a^2+(b-a)^2)$,其中 $a,b\in\mathbf{N}^*,a<b<2a,(a,b)=1,2\nmid b$.此时,基本勾股形的周长为 $2ab$.

容易理解引理1成立,证明略去.引理2可由下面的结论得到[2]:

基本勾股形的三边长可表示为$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$,其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$,$m>n,2\nmid m+n,(m,n)=1$.

定理 1 设 $p_1,\cdots,p_{k+1}$ 分别是1及前 k 个从小到大的奇素数(即1,3,5,7,11,…),$k\geqslant 4,u_i=(p_{k+1}-1)!n+p_i(i=1,\cdots,k),u=[(p_{k+1}-1)!n+p_{k+1}]^{k-2}(n\in\mathbf{N}^*),a_i=u_1\cdots u_{i-1}u_{i+1}\cdots u_k,b_i=uu_i$,则存在正整数常数 M,当 $n\geqslant M$ 时,$(a_i^2-(b_i-a_i)^2,2a_i(b_i-a_i),a_i^2+(b_i-a_i)^2)(i=1,\cdots,k)$ 是 k 个周长相等的基本勾股形.

证明 对照引理2,只需证明以下各条:

(1)$a_i<b_i<2a_i$;

(2)$2\nmid b_i,(a_i,b_i)=1$;

(3)$a_1b_1=\cdots=a_kb_k$;

(4)$i=1,\cdots,k$ 时,分别得到 k 个不同的基本勾股形.

下面逐条验证.

(1) 有 $a_ib_i=uu_1\cdots u_k$.

显然 $b_1<\cdots<b_k$,所以 $a_1>\cdots>a_k$.

欲证 $a_i < b_i < 2a_i(i = 1,\cdots,k)$,只需证 ①$a_1 < b_1$;②$b_k < 2a_k$.

欲证 $a_1 < b_1$,设 $A_n = (p_{k+1} - 1)!n$,即证

$$(A_n + 3)(A_n + p_3)\cdots(A_n + p_k) < (A_n + p_{k+1})^{k-2}(A_n + 1)$$

因为 $p_3 < \cdots < p_k, p_{k+1} \geqslant p_k + 2$,所以只需证

$$(A_n + 3)(A_n + p_k)^{k-2} < (A_n + p_k + 2)^{k-2}(A_n + 1)$$

即 $(A_n + 3)[A_n^{k-2} + (k - 2)p_kA_n^{k-3} + \cdots] < (A_n + 1)[A_n^{k-2} + (k - 2)(p_k + 2)A_n^{k-3} + \cdots]$

$$A_n^{k-1} + [(k - 2)p_k + 3]A_n^{k-2} + \cdots < A_n^{k-1} + [(k - 2)(p_k + 2) + 1]A_n^{k-2} + \cdots \quad ①$$

易证$(k - 2)p_k + 3 < (k - 2)(p_k + 2) + 1(k \geqslant 4$时),

所以由引理 1 知,当 n 充分大时式 ① 成立,所以 ① 成立.

② 欲证 $b_k < 2a_k$,即证

$$(A_n + p_{k+1})^{k-2}(A_n + p_k) < 2(A_n + p_1)\cdots(A_n + p_{k-1})$$

由引理 1 知,当 n 充分大时此式成立.

(2) 易证 $2 \nmid b_i$.欲证$(a_i, b_i) = 1$,只需证明 $u, u_1, \cdots, u_k$ 两两互素.

设 $d \mid (u_i, u_j), i > j$,得 $d \mid p_i - p_j$,又 $p_i - p_j < p_{k+1} - 1$,所以 $p_i - p_j \mid (p_{k+1} - 1)!n$,得 $d \mid (p_{k+1} - 1)!n, d \mid p_i, d \mid p_j$,而$(p_i, p_j) = 1$,所以 $d = 1$,即 $u_1, \cdots, u_k$ 两两互素.同理可证 u 与 $u_1, \cdots, u_k$ 均互素.所以 $u, u_1, \cdots, u_k$ 两两互素.

(3) 显然成立.

(4) 只需证明 $2a_i(b_i - a_i)(i = 1,\cdots,k)$ 两两不等.

假设
$$2u_1\cdots u_{i-1}u_{i+1}\cdots u_k(uu_i - u_1\cdots u_{i-1}u_{i+1}\cdots u_k) =$$
$$2u_1\cdots u_{j-1}u_{j+1}\cdots u_k(uu_j - u_1\cdots u_{j-1}u_{j+1}\cdots u_k)(u_i \neq u_j)$$

得
$$u_j(uu_i - u_1\cdots u_{i-1}u_{i+1}\cdots u_k) = u_i(uu_j - u_1\cdots u_{j-1}u_{j+1}\cdots u_k)$$

由 $u_1, \cdots, u_k$ 两两互素,得 $u_i \mid u_1\cdots u_{i-1}u_{i+1}\cdots u_k$,所以 $u_i = 1$,这不可能!定理成立.

由定理 1 可得,$k(k \in \mathbf{N}^*, k \geqslant 2)$ 个周长相等的基本勾股形有无穷组.当然也有 $k(k \in \mathbf{N}^*, k \geqslant 2)$ 个周长相等的勾股形有无穷组.

当 $k = 3$ 时,还有

定理 2 设 $a_1 = (6n - 1)(6n + 1), b_1 = (6n + 3)(6n + 7)$;$a_2 = (6n - 1)(6n + 3), b_2 = (6n + 1)(6n + 7)$;$a_3 = (6n + 1)(6n + 3), b_3 = (6n - 1)(6n + 7)$,其中 $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$,则$(a_i^2 - (b_i - a_i)^2, 2a_i(b_i - a_i), a_i^2 + (b_i - a_i)^2)(i = 1,2,3)$ 是三个周长相等的基本勾股形.

参考文献

[1] 张文忠.整数中的明珠[M].重庆:西南师范大学出版社,1992.
[2] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1979.

正 Fibonacci 数的标准分解式中诸素因数的指数

1 定义及问题

Fibonacci数列$\{F_n\}$定义如下：$F_0=0, F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，我们把$\{F_n\}$中的每一项叫做 Fibonacci 数，并把 $F_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 叫做正 Fibonacci 数.

本文将解决如下问题：

问题 求出 $F_n(n\in\mathbf{N}^*)$的标准分解式中任一素因数的指数，即设P是已知的素数，n 是已知的正整数，求出满足 $p^\alpha \mid F_n$ 的最大自然数α(即 $p^\alpha \mid F_n$，但 $p^{\alpha+1}\nmid F_n$，也可将它记作 $p^\alpha \parallel F_n$).

2 $p=2$的情形

文献[1]已得：

定理 1 (1)$2\mid F_n \Leftrightarrow 3\mid n$;

(2)$2\parallel F_{3m}(m\in\mathbf{N}^*, 2\nmid m)$;

(3)$2^{k+2}\parallel F_{3\cdot 2^k m}(k,m\in\mathbf{N}^*, 2\nmid m)$.

(顺便指出：文献[1]用了四次数学归纳法来证明定理 1(3)，用本文的方法只需两次即可.读罢本文，还可知对定理 1 的三个结论的证明均可简化.)

3 p为奇素数的情形

3.1 结论

定理 2 设 p 是奇素数，满足 $p\mid F_t$ 的最小正整数$t=l$且$p^\alpha\parallel F_l$，则

(1)$p\mid F_n\Leftrightarrow l\mid n$;

(2)$p^{k+\alpha}\parallel F_{lp^k m}(k\in\mathbf{N}, m\in\mathbf{N}^*, p\nmid m)$.

由定理 2，立得(以下诸推论中均有 $k\in\mathbf{N}, m\in\mathbf{N}^*$)

推论 (1)$3\mid F_n\Leftrightarrow 4\mid n; 3^{k+1}\parallel F_{4\cdot 3^k m}(3\nmid m)$.

(2)$5^k\mid F_{5^k m}(5\nmid m)$.

(3)$7\mid F_n\Leftrightarrow 8\mid n; 7^{k+1}\parallel F_{8\cdot 7^k m}(7\nmid m)$.

(4)$11\mid F_n\Leftrightarrow 10\mid n; 11^{k+1}\parallel F_{10\cdot 11^k m}(11\nmid m)$.

(5)$13 \mid F_n \Leftrightarrow 7 \mid n; 13^{k+1} \parallel F_{7\cdot 13^k m}(13 \nmid m)$.

(6)$17 \mid F_n \Leftrightarrow 9 \mid n; 17^{k+1} \parallel F_{9\cdot 17^k m}(17 \nmid m)$.

(7)$19 \mid F_n \Leftrightarrow 18 \mid n; 19^{k+1} \parallel F_{18\cdot 19^k m}(19 \nmid m)$.

(8) 若 F_p 是奇素数,则 $F_p \mid F_n \Leftrightarrow p \mid n; F_p^{k+1} \parallel F_{p^m F_p^k}(F_p \nmid m)$.

(9)$4\ 181 \mid F_n \Leftrightarrow 19 \mid n$(注意 $4\ 181 = 37 \cdot 113$).

3.2 引理

引理 1[2] $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

引理 2 若满足 $p \mid F_m$ 的最小正整数 $m = l$,则 $p \mid F_n \Leftrightarrow l \mid n$.

证明 $\Rightarrow$ 由 $p \mid F_n, p \mid F_l$,得 $p \mid (F_n, F_l)$,即 $p \mid F_{(n,l)}$(引理 1).

又由"l 的最小性"可得 $(n,l) \geqslant l$,又 $(n,l) \leqslant l$,所以 $(n,l) = l$,即 $l \mid n$.

$\Leftarrow$ 因为 $l \mid n$,所以 $F_l \mid F_n$,又 $p \mid F_l$,所以 $p \mid F_n$.

引理 3[2] $F_{n+m} = F_n F_{m-1} + F_{n+1} F_m$.

引理 4 若 $k, n \in \mathbf{N}^*$,则

$$F_{kn} = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i F_{k-i} F_n^{k-i} F_{n-1}^i$$

$$F_{kn+1} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{k-i+1} F_n^{k-i} F_{n-1}^i$$

证明 对 k 用数学归纳法证明这两式同时成立.

当 $k = 1$ 时容易验证成立.

假设 k 时成立,下证 $k+1$ 时成立.由引理 3,得

$$F_{(k+1)n} = F_{kn+n} = F_{kn}F_{n-1} + F_{kn+1}F_n =$$
$$\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i F_{k-i} F_n^{k-i} F_{n-1}^{i+1} + \sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{k-i+1} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i =$$
$$\sum_{i-1=0}^{k-1} C_k^{i-1} F_{k-i+1} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i + \sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{k-i+1} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i =$$
$$\sum_{i=1}^{k} C_k^{i-1} F_{k-i+1} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i + \sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{k-i+1} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i =$$
$$\sum_{i=1}^{k} C_{k+1}^i F_{k-i+1} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i + F_{n+1} F_n^{k+1} =$$
$$\sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^i F_{k-i+1} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i$$

$$F_{(k+1)n+1} = F_{(kn+1)+n} = F_{kn+1}F_{n-1} + (F_{kn+1}F_{kn})F_n =$$
$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{k-i+1} F_n^{k-i} F_{n-1}^{i+1} + \sum_{i=0}^{k} C_k^i F_{k-i+2} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i =$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} F_{k-i+2} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i + \sum_{i=0}^{k+1} C_k^i F_{k-i+2} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i =$$
$$\sum_{i=1}^{k+1} C_{k+1}^i F_{k-i+2} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i + F_{k+2} F_n^{k+1} =$$
$$\sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i F_{k-i+2} F_n^{k-i+1} F_{n-1}^i$$

得 $k+1$ 时成立.所以引理 4 成立.

引理 5 若 $p,l,m \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{N}, p \geqslant 3$,则

$$F_{plp^k m} = F_{lp^k m}\left(F_p F_{lp^k m}^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-2} C_p^i F_{p-i} F_{lp^k m}^{p-i-1} F_{lp^k m-1}^i + p F_{lp^k m-1}^{p-1}\right)$$

证明 在引理 4 的第一式中令 $k=p, n=lp^k m$ 立得.

引理 6 若 p 是素数,$i=1,2,\cdots,p-1$,则 $p \mid C_p^i$.(极易获证,也可见文献[3]).

3.3 定理 2 的证明

(1) 由引理 2 立得.

(2) 对 k 用数学归纳法.

当 $k=0$ 时,即证 $p^\alpha \parallel F_{lm}(l,m \in \mathbf{N}^*, p \nmid m)$.

设数列$\{m_n\}$为全体正整数中不是 p 的倍数的数从小到大排列成的数列,即证 $p^\alpha \parallel F_{l \cdot m_n}$.下面对 n 用数学归纳法来证.

当 $n=1$ 时,$m_1=1$,即证 $p^\alpha \parallel F_l$,这是题设.

假设 n 时成立,下证 $n+1$ 时成立.

1) 当 $p \nmid m_n+1$ 时,$m_{n+1}=m_n+1$

$$F_{l \cdot m_{n+1}} = F_{l(m_n+1)} = \sum_{i=0}^{m_n} C_{m_n+1}^i F_{m_n+1-i} F_l^{m_n+1-i} F_{l-1}^i =$$
$$F_l^2 \sum_{i=0}^{m_n-1} C_{m_n+1}^i F_{m_n+1-i} F_l^{m_n-1-i} F_{l-1}^i + (m_n+1) F_l F_{l-1}^{m_n}$$

由 $p^\alpha \parallel F_l, p \nmid (m_n+1) F_{l-1}^{m_n}, \alpha \in \mathbf{N}^*$,可得此时 $p^\alpha \parallel F_{l \cdot m_{n+1}}$.

2) 当 $p \mid m_n+1$ 时,$m_{n+1}=m_n+2$

$$F_{l \cdot m_{n+1}} = F_{l(m_n+2)} = \sum_{i=0}^{m_n+1} C_{m_n+2}^i F_{m_n+2-i} F_l^{m_n+2-i} F_{l-1}^i =$$
$$F_l^2 \sum_{i=0}^{m_n} C_{m_n+2}^i F_{m_n+2-i} F_l^{m_n-i} F_{l-1}^i + (m_n+2) F_l F_{l-1}^{m_n+1}$$

此时也有 $p^\alpha \parallel F_{l \cdot m_{n+1}}$.

假设 $k(k \in \mathbf{N})$ 时成立,下证 $k+1$ 时成立.由引理 5,只需证明

$$p \parallel F_pF^{p-1}_{lp^km} + \sum_{i=1}^{p-2} C_p^iF_{p-i}F^{p-i-1}_{lp^km}F^i_{lp^km-1} + pF^{p-1}_{lp^km-1}$$

这是因为由"假设 k 时成立",可得

$$p^2 \mid F_pF^{p-1}_{lp^km}, p^2 \mid C_p^iF^{p-i-1}_{lp^km}(i = 1,2,\cdots,p-2), p \nmid F^{p-1}_{lp^km-1}$$

4　其他问题及猜想

解决以下问题及猜想有重要意义:

问题1　证明$\{F_n\}$中有无限多项是素数.

问题2　寻找奇素数p及相应的正整数l(l是满足$p \mid F_n$的最小正整数n),使得$p^2 \mid F_l$.

猜想1　设p是奇素数,满足$p \mid F_n$的最小正整数$n = l$,则$p^2 \nmid F_l$.

猜想2　若p是不为5的素数,满足$p \mid F_n$的最小正整数$n = l$,则$l \mid p + 1$或$l \mid p - 1$(由此可对素数p进行分类).

猜想2若成立,可得文献[2]中的结论"任给一个正整数m,则在$F_i(i = 1,2,\cdots,m^2)$中必有一个是m的倍数"在m是素数时的加强:

若p是素数,则在$F_i(i = 1,2,\cdots,p+1)$中必有一个是p的倍数.

问题3　研究$\{F_n(\bmod p^k)\}$(p是素数,$k \in \mathbf{N}^*$)的周期性.

参考文献

[1] 袁明豪.正 Fibonacci 数的标准分解式中因子2的指数[J].数学通讯,2003(15):26-27.

[2] 揭方琢.菲波那契数列[J].华中师范大学学报:自然科学版,数学史专辑,1987(3):72-85.

[3] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.

“Lucas 数的标准分解式中诸素因数的指数”研究

1 引言及问题

历史上两类著名的二阶线性递归数列：

Fibonacci 数列 $\{F_n\}_{n\geq 0}$:0,1,1,2,3,5,8,…(各项满足递推关系 $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$);

Lucas 数列 $\{L_n\}_{n\geq 0}$:2,1,3,4,7,11,18,…(各项满足递推关系 $L_{n+2}=L_n+L_{n+1}$).

本书“正 Fibonacci 数的标准分解式中诸素因数的指数”部分已给出了关于正 Fibonacci 数 $F_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的标准分解式中诸素因数的指数的结论：

定理 1 (1)$2\mid F_n\Leftrightarrow 3\mid n$;

(2)$2\parallel F_{3m}(m\in\mathbf{N}^*,2\nmid m)$;

(3)$2^{k+2}\parallel F_{3\cdot 2^k m}(k,m\in\mathbf{N}^*,2\nmid m)$.

定理 2 设 p 是奇素数，满足 $p\mid F_t$ 的最小正整数 $t=l$，且 $p^\alpha\parallel F_l$，则

(1)$p\mid F_n\Leftrightarrow l\mid n$;

(2)$p^{k+\alpha}\parallel F_{lp^k m}(k\in\mathbf{N},m\in\mathbf{N}^*,p\nmid m)$.

本文将研究“Lucas 数 $L_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的标准分解式中诸素因数的指数”：即设 p 是已知的素数，n 是已知的正整数，求出满足 $p^\alpha\mid L_n$ 的最大自然数 α(即 $p^\alpha\parallel L_n$：指 $p^\alpha\mid L_n$，但 $p^{\alpha+1}\nmid L_n$).

2 引理

引理 1 $L_{n+m}=L_nL_m+(-1)^{m+1}L_{n-m}(n\geq m)$.(见注释① 或文献[1])

引理 2 若 $k\in\mathbf{N}^*$，则

$$L_{2kn}=\sum_{i=0}^{k}(C_{k+i+1}^{2i+1}-C_{k+i-1}^{2i+1})(-1)^{(k-i)(n+1)}L_n^{2i}$$

$$L_{(2k+1)n}=\sum_{i=0}^{k}(C_{k+i+2}^{2i+2}-C_{k+i}^{2i+2})(-1)^{(k-i)(n+1)}L_n^{2i+1}$$

证明 由引理 1，可得

① 张善立.Fibonacci 数与 Lucas 数的一个性质.中学数学(武汉),1996(3).

$$L_{2n} = 2(-1)^{n+1} + L_n^2, L_{3n} = 3(-1)^{n+1}L_n + L_n^3$$

所以 $k = 1$ 时成立.

假设 k 时成立,下证 $k+1$ 时成立.

先由引理 1,可得

$$L_{(k+2)n} = L_{(k+1)n+n} = L_{(k+1)n}L_n + (-1)^{n+1}L_{kn}$$

所以

$$\begin{aligned}L_{(2k+2)n} = {} & L_{(2k+1)n}L_n + (-1)^{n+1}L_{2kn} = \\ & \sum_{i=0}^{k}(C_{k+i+2}^{2i+2} - C_{k+i}^{2i+2})(-1)^{(k-i)(n+1)}L_n^{2(i+1)} + \\ & \sum_{i=0}^{k}(C_{k+i+1}^{2i+1} - C_{k+i-1}^{2i+1})(-1)^{(k-i+1)(n+1)}L_n^{2i} = \\ & \sum_{i=1}^{k+1}(C_{k+i+1}^{2i} - C_{k+i-1}^{2i})(-1)^{(k-i+1)(n+1)}L_n^{2i} + \\ & \sum_{i=0}^{k}(C_{k+i+1}^{2i+1} - C_{k+i-1}^{2i+1})(-1)^{(k-i+1)(n+1)}L_n^{2i} = \\ & 2(-1)^{(k+1)(n+1)} + \sum_{i=1}^{k}(C_{k+i+2}^{2i+1} - C_{k+i}^{2i+1})(-1)^{(k-i+1)(n+1)}L_n^{2i} + L_n^{2(k+1)} = \\ & \sum_{i=0}^{k+1}(C_{k+i+2}^{2i+1} - C_{k+i}^{2i+1})(-1)^{(k-i+1)(n+1)}L_n^{2i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{(2k+3)n} = {} & L_{(2k+2)n}L_n + (-1)^{n+1}L_{(2k+1)n} = \\ & \sum_{i=0}^{k+1}(C_{k+i+2}^{2i+1} - C_{k+i}^{2i+1})(-1)^{(k-i+1)(n+1)}L_n^{2i+1} + \\ & \sum_{i=0}^{k}(C_{k+i+2}^{2i+2} - C_{k+i}^{2i+2})(-1)^{(k-i+1)(n+1)}L_n^{2i+1} = \\ & \sum_{i=0}^{k+1}(C_{k+i+3}^{2i+2} - C_{k+i+1}^{2i+2})(-1)^{(k-i+1)(n+1)}L_n^{2i+1}\end{aligned}$$

得 $k+1$ 时成立.所以引理 2 成立.

引理 3 若奇数 $p > 1$,则 $L_{pn} = \pm pL_n + AL_n^3 (A \in \mathbf{Z})$.

证明 由引理 2 的第二个式子立得.

3 $p = 2$ 的情形

定理 3 (1)$2 \mid L_n \Leftrightarrow 3 \mid n$;

(2)$2 \parallel L_{6n}$;

(3)$2^2 \parallel L_{6n-3}$;

(4)$2^3 \nmid L_n$.

证明 (1) 先用递推关系"$L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$"及步长为 2 的数学归纳法证

明 $2 \mid L_{n+3}-L_n$.

当 $n=0,1$ 时成立:即 $2 \mid 4-2, 2 \mid 7-1$.

假设 $n, n+1$ 时成立:$2 \mid L_{n+3}-L_n, 2 \mid L_{n+4}-L_{n+1}$.

下证 $n+2$ 时成立:$2 \mid L_{n+5}-L_{n+2}$.这由递推关系立得.

从而,还可得$\{L_n(\bmod 2)\}_{n \geqslant 0}$($L_n(\bmod 2)$ 表示 L_n 除以 2 所得的余数)是最小正周期为 3 的周期数列:

$$0,1,1;0,1,1;\cdots$$

所以(1) 成立.

(也可用引理 1 及步长为 2 的数学归纳法同时证明 $2 \nmid L_{3m+1}, 2 \nmid L_{3m+2}$, $2 \mid L_{3m+3}(m \in \mathbf{N})$.)

(2)$n=1,2$ 时成立:$2 \| 18, 2 \| 322$.

假设 $2 \| L_{6n}, 2 \| L_{6n+6}$. 由引理 1,得

$$L_{6n+12}=L_{6n+6+6}=18 L_{6n+6}-L_{6n}$$

由此可得 $2 \| L_{6n+12}$,即 $n+2$ 时成立,所以(2) 成立.

(3)$n=1,2$ 时成立:$2^2 \| 4, 2^2 \| 76$.

假设 $2^2 \| L_{6n-3}, 2^2 \| L_{6n+3}$,得

$$L_{6n+9}=L_{6n+3+6}=18 L_{6n+3}-L_{6n-3}$$

所以 $n+2$ 时成立.得(3) 成立.

(4) 由(1),(2),(3) 立得.

4 p 是奇素数的情形的研究

4.1 $p=3,5,7,13,17$ 的情形

定理 4 以下 $n \in \mathbf{N}^*, m, k \in \mathbf{N}$:

(1)$3 \mid L_n \Leftrightarrow n=4m+2, 3^{k+1} \| L_{4m+2}$(其中 $3^k \| 4m+2$);

(2)$5 \nmid L_n$;

(3)$7 \mid L_n \Leftrightarrow n=8m+4, 7^{k+1} \| L_{8m+4}$(其中 $7^k \| 8m+4$);

(4)$11 \mid L_n \Leftrightarrow n=10m+5$;

(5)$13 \nmid L_n$;

(6)$17 \nmid L_n$;

(7)$19 \mid L_n \Leftrightarrow n=18m+9$.

证明 同定理 3(1) 的证明可证:

当 $p=3,5,7,11,13,17,19$ 时,$\{L_n(\bmod p)\}$ 的最小正周期分别是 8,4,16,10,28,36,18.

从而可得(2),(4),(5),(6),(7) 成立,(1),(3) 的前一部分结论也成立.下面用数学归纳法证明(1),(3) 的后一部分结论成立:

(1) 先证 $k=0$ 时成立:$3 \| L_{4m+2}(3 \nmid 4m+2)$.

即证 $m_n = 0,2,3,5,6,8,9,\cdots$(有 $m_{n+2} = m_n + 3$)时,$3 \parallel L_{4m_n+2}$.

当 $n = 1,2$ 时成立:$3 \parallel L_2$,$3 \parallel L_{10}$,即 $3 \parallel 3$,$3 \parallel 123$.

假设 n 时成立:$3 \parallel L_{4m_n+2}$,下证 $n+2$ 时成立:由

$$L_{4m_{n+2}+2} = L_{4(m_n+3)+2} = L_{(4m_n+8)+6} = 18L_{4m_n+8} - L_{4m_n+2}$$

可得 $3 \parallel L_{4m_{n+2}+2}$.所以 $k = 0$ 时成立.

(**注** 可直接验证$\{L_n(\bmod 9)\}$的最小正周期是24,从而也可得 $k = 0$时成立.)

假设 k 时成立,下证 $k+1$ 时成立.只需证明:

$$3^{k+1} \parallel L_{3^k t}(3 \nmid t) \Rightarrow 3^{k+2} \parallel L_{3^{k+1}t}$$

由引理3,得

$$L_{3^{k+1}t} = L_{3\cdot 3^k t} = \pm 3L_{3^k t} + AL_{3^k t}^3(A \in \mathbf{Z})$$

所以

$$3^{k+2} \parallel L_{3^{k+1}t}$$

得(1)的后一部分结论成立.

(3) 先证 $k = 0$ 时成立:$7 \parallel L_{8m+4}$($7 \nmid 8m+4$,即 $7 \nmid m+4$).

即证 $m_n = 0,1,2,4,5,6,7,8,9,11,12,\cdots$(有 $m_{n+6} = m_n + 7$)时,$7 \parallel L_{8m_n+4}$.

当 $n = 1,2,3,4,5,6$ 时成立(即 $m_n = 0,1,2,4,5,6$ 时成立:$7 \parallel 7$,$7 \parallel 322$,$7 \parallel 15\ 127$,$7 \parallel 33\ 385\ 282$,$7 \parallel 1\ 568\ 397\ 607$,$7 \parallel 73\ 681\ 302\ 247$).

假设 n 时成立:$7 \parallel L_{8m_n+4}$,下证 $n+6$ 时成立:

由

$$L_{8m_{n+6}+4} = L_{8(m_n+7)+4} = L_{(8m_n+32)+28} = 7^2 \cdot 14\ 503L_{8m_n+32} - L_{8m_n+4}$$

可得 $7 \parallel L_{8m_{n+6}+4}$,所以 $k = 0$ 时成立.

(若能验证$\{L_n(\bmod 49)\}$)的最小正周期是112,也可得 $k = 0$ 时成立.)

假设 k 时成立,同上可证 $k+1$ 时成立.

注 在(4)中,若还能验证 $11 \mid L_{10m+5}$($m = 0,1,2,3,4,6,7,8,9,10$),则可同上证得 $11^{k+1} \parallel L_{10m+5}$(其中 $11^k \parallel 10m+5$;$k,m \in \mathbf{N}$).

在(7)中,若还能验证 $19 \parallel L_{18m+9}$($m = 0,1,2,\cdots,8,10,11,\cdots,18$),则可证得 $19^{k+1} \parallel L_{18m+9}$(其中 $19^k \parallel 18m+9$,$k,m \in \mathbf{N}$).

4.2 p 是任意奇素数的情形的研究

4.2.1 一个结论

由引理3易证:

定理5 若 p 是奇素数,$p^{k+1} \parallel L_{p^k t}(p \nmid t, k \in \mathbf{N})$,则 $p^{k+2} \parallel L_{p^{k+1}t}$.

4.2.2 猜想及问题

猜想1 以下 $m,n \in \mathbf{N}$.

(1) 当 $p = 5,13,17,37,53,61,73,89,97$ 时,$p \nmid L_n$;

(2) 当 $p=3,7,23,43,47,67,83$ 时，$p \mid L_n \Leftrightarrow n=(p+1)m+\frac{p+1}{2}$；

(3) 当 $p=11,19,29,31,41,59,71,79$ 时，$p \mid L_n \Leftrightarrow n=(p-1)m+\frac{p-1}{i}$（当 $p=29,41$ 时 $i=4$，其余的情形 $i=2$）.

猜想 2 以下 $t,m,n,n_0 \in \mathbf{N}$.

(1) 当 p 为 $20t+3$ 或 $20t+7$ 形素数时，$p \mid L_n \Leftrightarrow n=(p+1)m+\frac{p+1}{2}$；

(2) 当 p 不为 $20t+3,20t+7$ 形素数时，若存在 n_0，使 $p \mid L_{n_0}$，则 $p \mid L_n \Leftrightarrow n=(p-1)m+\frac{p-1}{i}$ ($i=2$ 或 4)；

(3) 若 p 为已知的素数，$p \nmid L_n$ 恒成立，则 p 为 $4t+1$ 形素数；

(4) 若 p 为已知的素数，存在 n_0 使 $P \mid L_{n_0}$，则在 $L_1,L_2,\cdots,L_{\frac{p+1}{2}}$ 中必有一个能被 p 整除.

问题 1 求出所有的素数 p，使 $p \nmid L_n$ 恒成立.

猜想 3 若 p 是奇素数，则 $\{L_n \pmod p\}$ 的最小正周期是 $p-1$ 或 $2(p+1)$.

（比如，可证 $p=5,11,19$ 时属于前者，$p=3,7,13,17$ 时属于后者. 请问：每类素数有何特点?）

猜想 4 若 p 是奇素数，$\{L_n \pmod p\}$ 的最小正周期是 p_0，则 $\{L_n \pmod{p^k}\}$ $(k \in \mathbf{N}^*)$ 的最小正周期是 $p_0 \cdot p^{k-1}$.

猜想 5 若 $a,b \in \mathbf{N}, a,b \geqslant 2$，$\{L_n \pmod a\}$，$\{L_n \pmod b\}$ 的最小正周期分别是 a_0,b_0，则 $\{L_n \pmod{ab}\}$ 的最小正周期为 a_0b_0.

猜想 6 若 p 是奇素数，使得 $p \mid L_t$ 的最小正整数 t 和第二小的正整数 t 分别为 $n_0,n_0+d\,(d \in \mathbf{N}^*)$，则

(1) $2 \mid d, p^2 \mid L_{\frac{pd}{2}}$；

(2) $d=p \pm 1$；

(3) $p \mid L_n \Leftrightarrow n=n_0+md\,(m \in \mathbf{N})$；

(4) 设 $p^k \parallel n_0+md\,(m \in \mathbf{N})$，则 $p^{k+1} \parallel L_{n_0+md}$.

问题 2 研究 $\{L_n \pmod{p^k}\}$（p 是素数，$k \in \mathbf{N}^*$）的周期性.

问题 3 找一个奇素数 p，设 $p \mid L_n$ 的最小正整数 $n=t$，使 $p^2 \mid L_t$.

参考文献

[1] 许康华. 关于 Fibonacci 数与 Lucas 数的两个猜想的证明[J]. 中学数学，1997(4)：31-32.

K 数及其对偶数 Z 数的构造

文献[1]介绍了 K 数,若$(\overline{a_1\cdots a_k}+\overline{a_{k+1}\cdots a_n})^2=\overline{a_1\cdots a_ka_{k+1}\cdots a_n}$,则正整数$\overline{a_1\cdots a_k}+\overline{a_{k+1}\cdots a_n}$叫做$K$数.由$(30+25)^2=3\,025$知55是$K$数.

文献[2]研究了K数的对偶数(也叫做Z数):若$(\overline{a_1\cdots a_k}-\overline{a_{k+1}\cdots a_n})^2=\overline{a_1\cdots a_ka_{k+1}\cdots a_n}$,则正整数$|\overline{a_1\cdots a_k}-\overline{a_{k+1}\cdots a_n}|$叫做$Z$数.由$(12-1)^2=121$知11是$Z$数.

1 两类 K 数的构造

在K数的定义中,设$x=\overline{a_1\cdots a_k}$(是$k$位数),$y=\overline{a_{k+1}\cdots a_n}$(是$n-k$位数码),得

$$(x+y)^2=10^{n-k}x+y$$

$$x(10^{n-k}-x)=y(y+2x-1)$$

当$y=0$时,得$10^{n'}(n'\in\mathbf{N}^*)$是$K$数(这里$n'=n-k$).

若$y\in\mathbf{N}^*$,可设$\dfrac{y+2x-1}{x}=\dfrac{10^{n-k}-x}{y}=u$.

可证$y+2x-1>x$,即$u>1$.

若$u\in\mathbf{N}$,得$u\geqslant 2$,且

$$\begin{cases}y=(u-2)x+1\\10^{n-k}-u=(u-1)^2x\end{cases}\quad①$$

当$u-1\mid 10^p-1$时,设$10^p=a(u-1)+1,a\in\mathbf{N}^*$,并选$(u-1,a)=1$,又设$n-k=pm(m\in\mathbf{N}^*)$,得$(u-1)^2\mid 10^{n-k}-u$,即$(u-1)^2\mid[a(u-1)+1]^m-u$,即$(u-1)^2\mid \mathrm{C}_m^{m-1}\cdot a(u-1)+1-u$,也即$u-1\mid ma-1$.

由$(u-1,a)=1$知,存在$m=m_0(m_0\in\mathbf{N}^*)$,使得$u-1\mid ma-1$,且$m=m_0+(u-1)t(t\in\mathbf{N})$时均满足$u-1\mid ma-1$.

且此时

$$y=(u-2)x+1=\frac{u-2}{(u-1)^2}(10^{pm}-u)+1<$$

$$10^{pm}-u+1<10^{pm}=10^{n-k}$$

说明y是$n-k$位数码.

由以上论述,得

定理1 设 $10^p-1=a(u-1)(p,a,u\in\mathbf{N}^*,(a,u-1)=1)$.由 $(a,u-1)=1$ 知,存在 $m_0\in\mathbf{N}^*$,使得 $u-1\mid am_0-1$,又设 $m=m_0+(u-1)t(t\in\mathbf{N})$,则 $x=\dfrac{10^{pm}-u}{(u-1)^2}$ 是正整数.又设 $y=(u-2)x+1$,则 $x+y$ 是 K 数.

令 $u=2$,得

推论1 $10^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 是 K 数.

当 $p=2$ 时,可选 $(a,u)=(9,12),(11,10)$,得

推论2 (1) 设 $x=\dfrac{10^{22t+10}-12}{121}(t\in\mathbf{N}),y=10x+1$,则 $x+y$ 是 K 数;

(2) 设 $x=\dfrac{10^{18t-8}-10}{81}(t\in\mathbf{N}^*),y=8x+1$,则 $x+y$ 是 K 数.

当 $p=3$ 时,可选 $(a,u)=(27,38),(37,28)$,得

推论3 (1) 设 $x=\dfrac{10^{111t+33}-38}{1\,369}(t\in\mathbf{N}),y=36x+1$,则 $x+y$ 是 K 数;

(2) 设 $x=\dfrac{10^{81t-24}-28}{729}(t\in\mathbf{N}^*),y=26x+1$,则 $x+y$ 是 K 数.

在①中,若 $u-1\mid 10^p+1$,设 $10^p=a(u-1)-1,a\in\mathbf{N}^*$,并选 $(u-1,a)=1$.又设 $n-k=2pm(m\in\mathbf{N}^*)$,得

$$(u-1)^2\mid 10^{n-k}-u,\text{即}(u-1)^2\mid[a(u-1)-1]^{2m}-u$$

即 $(u-1)^2\mid -C_{2m}^{2m-1}\cdot a(u-1)+1-u$,也即 $u-1\mid 2ma+1$.

由 $u-1\mid 10^p+1$ 知,$u-1$ 是奇数;再由 $(u-1,a)=1$,得 $(u-1,2a)=1$.所以存在 $m=m_0(m_0\in\mathbf{N}^*)$ 使得 $u-1\mid 2m_0a+1$,且 $m=m_0+(u-1)t(t\in\mathbf{N})$ 时均满足 $u-1\mid 2ma+1$.

且此时 $y=(u-2)x+1$ 也是 $n-k$ 位数码(证明同前).

由以上论述,得

定理2 设 $10^p+1=a(u-1)(p,a,u\in\mathbf{N}^*,(a,u-1)=1)$,可得 $(2a,u-1)=1$,所以存在 $m_0\in\mathbf{N}^*$,使得 $u-1\mid 2m_0a+1$,又设 $m=m_0+(u-1)t(t\in\mathbf{N})$,则 $x=\dfrac{10^{2pm}-u}{(u-1)^2}$ 是正整数.又设 $y=(u-2)x+1$,则 $x+y$ 是 K 数.

当 $p=1$ 时,可选 $a=1,u=12$,也得推论2.

当 $p=2$ 时,可选 $a=1,u=102$,得

推论5 设 $x=\dfrac{10^{404t+200}-102}{101^2}(t\in\mathbf{N}),y=100x+1$,则 $x+y$ 是 K 数.

当 $p=3$ 时,可选 $(a,u)=(143,8),(91,12),(77,14),(13,78),(11,92),(7,144),(1,1\,002)$,得

推论 6 (1) 设 $x=\frac{10^{42t+6}-8}{49}(t\in\mathbf{N}^*)$, $y=6x+1$,则 $x+y$ 是 K 数;

(2) 设 $x=\frac{10^{66t-12}-12}{121}(t\in\mathbf{N}^*)$, $y=10x+1$,则 $x+y$ 是 K 数;

(3) 设 $x=\frac{10^{78t-36}-14}{169}(t\in\mathbf{N}^*)$, $y=12x+1$,则 $x+y$ 是 K 数;

(4) 设 $x=\frac{10^{462t-18}-78}{77^2}(t\in\mathbf{N}^*)$, $y=76x+1$,则 $x+y$ 是 K 数;

(5) 设 $x=\frac{10^{546t-174}-92}{91^2}(t\in\mathbf{N}^*)$, $y=90x+1$,则 $x+y$ 是 K 数;

(6) 设 $x=\frac{10^{858t+306}-144}{143^2}(t\in\mathbf{N})$, $y=142x+1$,则 $x+y$ 是 K 数;

(7) 设 $x=\frac{10^{6\,006t+3\,000}-1\,002}{1\,001^2}(t\in\mathbf{N})$, $y=1\,000x+1$,则 $x+y$ 是 K 数.

2 一类 Z 数的构造

在 Z 数的定义中,设 $x=\overline{a_1\cdots a_k}$(是 k 位数), $y=\overline{a_{k+1}\cdots a_n}$(是 $n-k$ 位数码),得

$$(x-y)^2=10^{n-k}x+y$$
$$x(10^{n-k}-x)=y(y-2x-1)$$

当 $y=0$ 时,得 $10^{n'}(n'\in\mathbf{N}^*)$ 是 Z 数(这里 $n'=n-k$).

当 $y\in\mathbf{N}^*$ 时,可设 $\frac{y-2x-1}{x}=\frac{10^{n-k}-x}{y}=u$.

又当 $u\in\mathbf{N}^*$ 时,得

$$\begin{cases}y=(u+2)x+1\\10^{n-k}-u=(u+1)^2x\end{cases}$$

当 $u+1\mid 10^p+1$ 时,设 $10^p=a(u+1)-1$, $a\in\mathbf{N}^*$,并选 $(a,u+1)=1$.又设 $n-k=p(2m+1)(m\in\mathbf{N})$,得

$$(u+1)^2\mid 10^{n-k}-u,即(u+1)^2\mid[a(u+1)-1]^{2m+1}-u$$

即
$$(u+1)^2\mid \mathrm{C}_{2m+1}^{2m}\cdot a(u+1)-1-u$$

也即
$$u+1\mid a(2m+1)-1$$

可得 $(u+1,2a)=1$,所以存在 $m_0\in\mathbf{N}$,使得 $u+1\mid a(2m_0+1)-1$,且 $m=m_0+(u+1)t(t\in\mathbf{N})$ 时均满足 $u+1\mid a(2m+1)-1$.

且此时

$$y=(u+2)x+1=\frac{u+2}{(u+1)^2}[10^{p(2m+1)}-u]+1<$$
$$10^{p(2m+1)}-u+1\leqslant 10^{p(2m+1)}=10^{n-k}$$

又 $y\in\mathbf{N}^*$,所以 y 是 $n-k$ 位数码.

由以上论述,得

定理 3 设 $10^p+1=a(u+1)(p,a,u\in\mathbf{N}^*,(a,u+1)=1)$,可得$(u+1,2a)=1$,所以存在 $m_0\in\mathbf{N}$,使得 $u+1\mid a(2m_0+1)-1$,又设 $m=m_0+(u+1)t(t\in\mathbf{N})$,则 $x=\dfrac{10^{p(2m+1)}-u}{(u+1)^2}$ 是正整数.又设 $y=(u+2)x+1$,则 $\mid x-y\mid$ 是 Z 数.

可令 $a=1$,得 $u=10^p$,所以有

推论 7 设 $x=\dfrac{10^{p[2t(10^p+1)+1]}-10^p}{(10^p+1)^2}(t\in\mathbf{N}^*)$,$y=(10^p+2)x+1$,则 $\mid x-y\mid$ 是 Z 数.

当 $p=3$ 时,可选$(a,u)=(143,6),(91,10),(77,12),(13,76),(11,90),(7,142)$,得

推论 8 (1) 设 $x=\dfrac{10^{42t+15}-6}{49}(t\in\mathbf{N})$,$y=8x+1$,则 $\mid x-y\mid=y-x$ 是 Z 数;

(2) 设 $x=\dfrac{10^{66t-21}-10}{121}(t\in\mathbf{N}^*)$,$y=12x+1$,则 $\mid x-y\mid$ 是 Z 数;

(3) 设 $x=\dfrac{10^{78t-3}-12}{169}(t\in\mathbf{N}^*)$,$y=14x+1$,则 $\mid x-y\mid$ 是 Z 数;

(4) 设 $x=\dfrac{1\,000^{154t-71}-76}{77^2}(t\in\mathbf{N}^*)$,$y=78x+1$,则 $\mid x-y\mid$ 是 Z 数;

(5) 设 $x=\dfrac{1\,000^{182t-33}-90}{91^2}(t\in\mathbf{N}^*)$,$y=92x+1$,则 $\mid x-y\mid$ 是 Z 数;

(6) 设 $x=\dfrac{1\,000^{286t+41}-142}{143^2}(t\in\mathbf{N})$,$y=144x+1$,则 $\mid x-y\mid$ 是 Z 数.

读者还可再从“P 进制”的情形推广本文这些“10 进制”中的结论.

参考文献

[1] 谈祥柏.数:上帝的宠物[M].上海:上海教育出版社,1996.
[2] 张赟.K 数的对偶数研究[J].中学数学教学参考,2006(5):55.

whc① 7 的初步解决

本文用 J^+, O^+ 分别表示正奇数集,正偶数集,$2^k \| a(k \in \mathbf{N}, a \in \mathbf{Z})$ 指 $2^k \| a$,且 $2^{k+1} \nmid a$.

定义 1 设 $x \in J^+$, $2^\alpha \| 3x+1$,定义 $g(x)=\frac{3x+1}{2^\alpha}$.(显然 $g(x)$ 是 J^+ 的变换.)

定义 2 设 $x \in J^+$, $l \in \mathbf{N}^*$,定义 $g^0(x)=x$, $g^l(x)=g(g^{l-1}(x))$.(由定义 2,可对 l 用数学归纳法证明 $g^l(x)=g^{l-1}(g(x))$.)

定义 3 记集合 $G_l=\{x \mid x \in J^+, g^l(x)=1, g^i(x) \neq 1(i=0,1,\cdots,l-1)\}(l \in \mathbf{N}^*)$.

流传很广且至今不得解决的$(3n+1)$问题[1],就是要证明:$\forall x \in J^+$,均存在 $l \in \mathbf{N}$,使 $g^l(x)=1$.也即要证 $\bigcup\limits_{l=0}^{\infty} G_l=\mathbf{N}^*$.

定理 1 (1) $G_0=\{1\}$;

(2) $G_{l+1}=\{x \mid x=\frac{2^\alpha a_l-1}{3}, a_l \in G_l, \alpha, x \in \mathbf{N}^*, x \neq 1\}(l \in \mathbf{N})$

证明 由定义 3,2,得

(1) $G_0=\{x \mid x \in J^+, g^0(x)=x=1\}=\{1\}$.

(2) $G_{l+1}=\{x \mid x \in J^+, g^{l+1}(x)=1\}, g^i(x) \neq 1(i=0,1,\cdots,l)\}=\{x \mid x \in J^+, g^l(g(x))=1, g^{i-1}(g(x)) \neq 1(i-1=0,1,\cdots,l-1), g^0(x) \neq 1\}=\{x \mid x \in J^+, g(x) \in G_l, x \neq 1\}$.

再证 $g(x) \in G_l(x \in J^+) \Leftrightarrow (x=\frac{2^\alpha a_l-1}{3}, a_l \in G_l, \alpha, x \in \mathbf{N}^*)$,便得(2)成立.

$\Rightarrow$ 设 $g(x)=a_l(\in G_l)$,即$\frac{3x+1}{2^\alpha}=a_l$(这里 $2^\alpha \| 3x+1$).由 $x \in J^+$,得 $\alpha \in \mathbf{N}^*$,且 $x=\frac{2^\alpha a_l-1}{3}$.

$\Leftarrow$ 因为 $x=\frac{2^\alpha a_l-1}{3}$, $a_l \in G_l$,所以 $g(x)=\frac{3x+1}{2^\alpha}=a_l$.因为 $\alpha, x \in$

① whc 指杨之《初等数学研究的问题与课题》中的编号,指未解决的问题.

$\mathbf{N}^*$，所以 $x \in J^+$.

可把定理 1(2) 简化为

定理 2 (1) $G_1 = \{\frac{4^\alpha - 1}{3} \mid \alpha \in \mathbf{N}^*, \alpha > 1\}$；

(2) $G_{l+1} = \{x \mid x = \frac{2^\alpha a_l - 1}{3}, a_l \in G_l, \alpha, x \in \mathbf{N}^*\}(l \in \mathbf{N}^*)$.

证明 (1) 由定理 1，得 $G_1 = \{x \mid x = \frac{2^\alpha - 1}{3}, \alpha, x \in \mathbf{N}^*, x \neq 1\}$，所以 $G_1 = \{\frac{4^\alpha - 1}{3} \mid \alpha \in \mathbf{N}^*, \alpha > 1\}$.

(2) 只需证明：当 $l \in \mathbf{N}^*, a_l \in G_l, \alpha, x \in \mathbf{N}^*$ 时，$x = \frac{2^\alpha a_l - 1}{3} \neq 1$.

假设 $x = 1$，得 $2^\alpha a_l = 4$. 由 $a_l \in J^+$，得 $a_l = 1, 1 \in G_l, l = 0$，与 $l \in \mathbf{N}^*$ 矛盾！所以 $x \neq 1$.

定理 3 $G_l = \{x_l \mid x_l = 3^{-l}(2^{2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_l} - 2^{\alpha_2+\cdots+\alpha_l} - 3 \cdot 2^{\alpha_3+\cdots+\alpha_l} - 3^2 \cdot 2^{\alpha_4+\cdots+\alpha_l} - \cdots - 3^{l-2} \cdot 2^{\alpha_l} - 3^{l-1}) \mid \alpha_1, \cdots, \alpha_l, x_l \in \mathbf{N}^*, \alpha_1 > 1\}(l \in \mathbf{N}^*)$.

证明 对 l 用数学归纳法.

由定理 2(1) 知，$l = 1$ 时成立.

假设 l 时成立，下证 $l + 1$ 时成立. 由定理 2(2) 得

$G_{l+1} = \{x_{l+1} \mid x_{l+1} = \frac{2^{\alpha_l+1} a_l - 1}{3}, a_l \in G_l, \alpha_{l+1}, x_{l+1} \in \mathbf{N}^*\} = \{x_{l+1} \mid x_{l+1} = 3^{-l-1}(2^{2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{l+1}} - 2^{\alpha_2+\cdots+\alpha_{l+1}} - 3 \cdot 2^{\alpha_3+\cdots+\alpha_{l+1}} - 3^2 \cdot 2^{\alpha_4+\cdots+\alpha_{l+1}} - \cdots - 3^{l-1} \cdot 2^{\alpha_{l+1}} - 3^l); \alpha_1, \cdots, \alpha_{l+1}, x_l, x_{l+1} \in \mathbf{N}^*, \alpha_1 > 1\}$

又易证 $x_{l+1} \in \mathbf{N}^* \Rightarrow x_l \in \mathbf{N}^*$，得 $l + 1$ 时成立.

推论 (1) $G_2 = \{\frac{1}{9}(2^{2\alpha_1+\alpha_2} - 2^{\alpha_2} - 3) \mid$ 有序数对 $(\alpha_1, \alpha_2) = (3\alpha - 1, 2k - 1)$ 或 $(3\alpha + 1, 2k)$，其中 $\alpha, k \in \mathbf{N}^*\}$；

(2) $G_3 = \{\frac{1}{27}(2^{2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - 2^{\alpha_2+\alpha_3} - 3 \cdot 2^{\alpha_3} - 9) \mid$ 有序数组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (9\alpha + 7, 6k, 2m - 1), (9\alpha + 5, 6k + 1, 2m - 1), (9\alpha + 4, 6k + 2, 2m - 1), (9\alpha + 8, 6k + 3, 2m - 1), (9\alpha + 1, 6k + 4, 2m - 1), (9\alpha + 2, 6k + 5, 2m - 1), (9\alpha + 4, 6k, 2m), (9\alpha + 8, 6k + 1, 2m), (9\alpha + 1, 6k + 2, 2m), (9\alpha + 2, 6k + 3, 2m), (9\alpha + 7, 6k + 4, 2m)$，或 $(9\alpha + 5, 6k + 5, 2m)$，其中 $m \in \mathbf{N}^*, k, \alpha \in \mathbf{N}, b, c \in \mathbf{N}^*$，且“$9\alpha + 1$”中还要求 $\alpha \in \mathbf{N}^*\}$.

证明 用定理 2 证.

(1) $G_2 = \{x \mid x = \frac{1}{3}[2^{\alpha_2} \cdot \frac{1}{3}(2^{2\alpha_1} - 1) - 1], \alpha_1, \alpha_2, x \in \mathbf{N}^*, \alpha_1 > 1\}$.

当 $\alpha_2 = 2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$2^{\alpha_2}\equiv 2(\bmod 3)$. 此时 G_2 中的 $x\in\mathbf{N}^*\Leftrightarrow \frac{2^{2\alpha_1}-1}{3}\equiv 2(\bmod 3)\Leftrightarrow 4^{\alpha_1}\equiv 7(\bmod 9)\Leftrightarrow \alpha_1 = 3\alpha - 1(\alpha\in\mathbf{N}^*)$

当 $\alpha_2 = 2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$2^{\alpha_2}\equiv 1(\bmod 3)$. 此时 G_2 中的 $x\in\mathbf{N}^*\Leftrightarrow \frac{2^{2\alpha_1}-1}{3}\equiv 1(\bmod 3)\Leftrightarrow 4^{\alpha_1}\equiv 4(\bmod 9)\Leftrightarrow \alpha_1 = 3\alpha + 1$($\alpha\in\mathbf{N}^*$，因为 $\alpha_1 > 1$).

从而可得结论(1)成立.

(2)囿于篇幅，就不证了.

定义 4[1] 设 $m\in\mathbf{N}^*$，定义 $T_1(2m) = m, T_2(2m+1) = 3(2m+1)+1$. 当 $m\in\mathbf{N}^*$ 且 $m > 1$ 时，若存在 $l,\alpha_0\in\mathbf{N},\alpha_1,\cdots,\alpha_l\in\mathbf{N}^*$，使 $T_1^{\alpha_l}T_2\cdots T_1^{\alpha_1}T_2T_1^{\alpha_0}(m) = 1$(约定 $T_1^0(m) = m$)，则 m 叫做 l 次库拉兹数. 并记集合 $G'_l = \{l$ 次库拉兹数$\}$.

定理 4 设 $t,l\in\mathbf{N}$，则 $2^t a_l\in G'_l\Leftrightarrow a_l\in \mathbf{G}_l$.

证明 $\Rightarrow$ 因为 $2^t a_l\in G'_l$，所以存在 $l,\alpha_0\in\mathbf{N},\alpha_1,\cdots,\alpha_l\in\mathbf{N}^*$，使得

$$T_1^{\alpha_l}T_2\cdots T_1^{\alpha_1}T_2T_1^{\alpha_0}(2^t a_l) = 1 \qquad ①$$

先对 i 用数学归纳法证明：

$$T_1^{\alpha_i}T_2\cdots T_1^{\alpha_1}T_2T_1^{\alpha_0}(2^t a_l) = g^i(a_l)(i = 0,1,\cdots,l-1) \qquad ②$$

因为 $T_2T_1^{\alpha_0}(2^t a_l)$ 有意义，所以 $2^{\alpha_0}\parallel 2^t a_l$. 又 $a_l\in J^+$，所以 $\alpha_0 = t$，$T_1^{\alpha_0}(2^t a_l) = a_l = g^0(a_l)$，即 $i = 0$ 时②成立.

假设 i 时②成立，下证 $i+1(i+1\leqslant l-1)$ 时②成立.

由 $i+1\leqslant l-1$，得 $T_2T_1^{\alpha_{i+1}}T_2T_1^{\alpha_i}T_2\cdots T_1^{\alpha_1}T_2T_1^{\alpha_0}(2^t a_l) = T_2T_1^{\alpha_{i+1}}T_2(g^i(a_l))$ 有意义，所以 $2^{\alpha_{i+1}}\parallel T_2(g^i(a_l))$，得

$$T_1^{\alpha_{i+1}}T_2(g^i(a_l)) = \frac{3g^i(a_l)+1}{2^{\alpha_{i+1}}} = g^{i+1}(a_l)$$

得 $i+1$ 时②成立. 所以②成立.

把②中取 $i = l-1$ 得到的结论代入①，得

$$T_1^{\alpha_l}T_2(g^{l-1}(a_l)) = T_1^{\alpha_l}(3g^{l-1}(a_l)+1) = 1$$

设 $2^\alpha\parallel 3g^{l-1}(a_l)+1$，下证 $\alpha = \alpha_l$.

若 $\alpha < \alpha_l$，得 $T_1^{\alpha_l}(3g^{l-1}(a_l)+1)$ 无意义；若 $\alpha > \alpha_l$，得 $T_1^{\alpha_l}(3g^{l-1}(a_l)+1)\in O^+$. 均不可能！所以 $\alpha = \alpha_l$，$2^{\alpha_l}\parallel 3g^{l-1}(a_l)+1$，得

$$T_1^{\alpha_l}(3g^{l-1}(a_l)+1) = \frac{3g^{l-1}(a_l)+1}{2^{\alpha_l}} = g^l(a_l) = 1$$

再证

$$g^i(a_l)\neq 1(i = 0,1,\cdots,l-1) \qquad ③$$

假设存在 $i \in \{0,1,\cdots,\ l-1\}$，使 $g^i(a_l) = 1$，由 ② 及 ①，得 $T_1^{\alpha_l} T_2 \cdots T_1^{\alpha_{i+1}} T_2(1) = 1$，这不可能(因为 $T_2(1)$ 无意义)！所以 ③ 成立.

又 $a_l \in J^+$，所以由定义 3 知 $a_l \in G_l$.

$\Leftarrow$ 由 $a_l \in G_l$，得 $a_l \in J^+, g^l(a_l) = 1$.

设 $2^{\alpha_{i+1}} \parallel 3g^i(a_l) + 1 (i = 0,1,\cdots,l-1)$，则

$$g^{i+1}(a_l) = g(g^i(a_l)) = \frac{3g^i(a_l) + 1}{2^{\alpha_{i+1}}} = T_1^{\alpha_{i+1}} T_2(g^i(a_l))$$

所以 $T_1^{\alpha_l} T_2 \cdots T_1^{\alpha_1} T_2 T_1^{t}(2^t a_l) = T_1^{\alpha_l} T_2 \cdots T_1^{\alpha_1} T_2(g^0(a_l)) =$

$$T_1^{\alpha_l} T_2 \cdots T_1^{\alpha_2} T_2(g^1(a_l)) = \cdots = T_1^{\alpha_l} T_2(g^{l-1}(a_l)) = g^l(a_l) = 1$$

所以 $2^t a_l \in G'_l$(已证 $a_l \in J^+$).

定理 5 (1) $G'_0 = \{2^t \mid t \in \mathbf{N}\}$；

(2) $G'_1 = \{\frac{1}{3} \cdot 2^t(4^\alpha - 1) \mid t \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{N}^*, \alpha > 1\}$；

(3) $G'_{l+1} = \{2^t x \mid x = \dfrac{2^\alpha a_l - 1}{3}, a_l \in G_l, \alpha, x \in \mathbf{N}^*, t \in \mathbf{N}\} (l \in \mathbf{N})$.

由推论及定理 4 还可得关于 G'_2, G'_3 的结论(这里略去不述).

上述定理 5,2 初步解决了

whc 7[1] $l(l \in \mathbf{N}^*, l > 1)$ 次库拉兹数的表达式是什么？

参考文献

[1] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993.

K 变换的合理定义及 $p=2$ 时 whc 12 的解决

1 K 变换的合理定义

文献[1],[2]给出了十进制下的 K' 变换定义,按此说法,P 进制下的 K' 变换应定义为:

设 p,n 均为大于1的整数,$N'_{p,n}=\{\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}\mid a_1,\cdots,a_n$ 不全相同$\}$,这里"$\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}$"表示 p 进制下的 n 位数码,即 $a_i\in\{0,1,\cdots,p-1\}(i=1,\cdots,n)$,并规定数码 $\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}$ 的大小为

$$\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}=\sum_{i=1}^{n}a_ip^{n-i}$$

(可以证明:$0\sim p^n-1$ 内的整数按照 n 位数码的大小与 $N_{p,n}=\{\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}\}$ 中的元素一一对应,从而可把 $N_{p,n}$ 中的元素按其大小从小到大排序).对于任意的 $x\in\mathbf{N}'_{p,n}$,设将 x 的各位数字重排得到的最大数码是 $\overline{a_n\cdots a_{1(p)}}$(有 $a_n\geqslant\cdots\geqslant a_1$,且 $a_n>a_1$),又设

$$\overline{a_n\cdots a_{1(p)}}-\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}=\overline{b_1\cdots b_{n(p)}}$$

(可证 $\overline{b_1\cdots b_{n(p)}}$ 是存在且唯一的一个 n 位数码,是 $N_{p,n}$ 的元素),就定义

$$k'_{p,n}(x)=\overline{b_1\cdots b_{n(p)}}$$

定理1 $x\in\mathbf{N}'_{p,n}$,但 $k'_{p,n}(x)\notin N'_{p,n}$ 的充要条件是 $n=2$ 且 $p=2b+1(b\in\mathbf{N}^*)$ 且 x 的两个数码是 a_1 与 $a_1+b+1(a_1\leqslant b-1,a_1\in\mathbf{N})$.

证明 **必要性** 先证 n 为偶数,假设 $n=2l+1(l\in\mathbf{N}^*)$,设 $2l+1$ 位数码 x 的各位数字重排得到的最大数码是 $\overline{a_{2l+1}\cdots a_{1(p)}}$(有 $a_{2l+1}\geqslant\cdots\geqslant a_1$,且 $a_{2l+1}>a_1$),因为 $k'_{p,2l+1}(x)\notin N'_{p,2l+1}$,又显然 $k'_{p,2l+1}\notin N_{p,2l+1}$,所以

$$\begin{array}{r}\overline{a_{2l+1}\ \cdots\ a_{l+1}\ \cdots\ a_{1(p)}}\\ -\ \ \overline{a_1\ \cdots\ a_{l+1}\ \cdots\ a_{2l+1(p)}}\\ \hline \overline{b\ \cdots\ b\ \cdots\ b_{(p)}}\end{array}$$

看以上竖式中 p^l 位上的数相减,得 $b=p-1$,即两个 $2l+1$ 位数码相减得到最大的 $2l+1$ 位数码 $\overline{p-1,\cdots,p-1_{(p)}}$,所以

$$\overline{a_{2l+1}\cdots a_{1(p)}}=\overline{p-1,\cdots,p-1_{(p)}}$$

$$\overline{a_1\cdots a_{2l+1}}_{(p)} = \overline{0,\cdots,0}_{(p)}$$

得 $a_1 = p-1$ 且 $a_1 = 0$,这不可能!所以 n 为偶数.

再证 $n = 2$ 或4,假设 $n = 2l$ 且 $l \geqslant 3$,又设 $2l$ 位数码 x 的各位数字重排得到的最大数码是 $\overline{a_{2l}\cdots a_1}_{(p)}$ 有($a_{2l} \geqslant \cdots \geqslant a_1$,且 $a_{2l} > a_1$),因为 $k'_{p,2l}(x) \notin N'_{p,2l}$,$k'_{p,2l}(x) \in \mathbf{N}_{p,2l}$,所以

$$\begin{array}{r} \overline{a_{2l}\cdots a_{l+1}a_l\cdots a_1}_{(p)} \\ -\ \overline{a_1\cdots a_l a_{l+1}\cdots a_{2l}}_{(p)} \\ \hline \overline{b\ \cdots\ b\ b\ \cdots\ b}_{(p)} \end{array}$$

由 $a_{2l} \geqslant \cdots \geqslant a_1$,$a_{2l} > a_1$ 得

$$\begin{cases} p + a_1 - a_{2l} = b & ① \\ p - 1 + a_2 - a_{2l-1} = b & ② \\ p - 1 + a_3 - a_{2l-2} = b \\ \cdots \\ p - 1 + a_l - a_{l+1} = b \\ a_{l+1} - 1 - a_l = b \text{(不会是 } p - 1 + a_{l+1} - a_l = b\text{,否则} \\ \qquad a_{l+1} = a_l, b = p - 1\text{,同前应有 } b \neq p - 1\text{)} \\ a_{l+2} - a_{l-1} = b \\ a_{l+3} - a_{l-2} = b \\ \cdots \\ a_{2l-1} - a_2 = b & ③ \\ a_{2l} - a_1 = b & ④ \end{cases}$$

由 ①,④ 得 $p = 2b$;由 ②,③ 得 $p = 2b + 1$,矛盾!所以 $n = 2$ 或4.

接着证 $n = 2$.假设 $n = 4$,仿上一步证明,可得 $p = 2b$,且 $p = 2b + 2$,矛盾!所以 $n = 2$.

最后证“$p = 2b + 1$($b \in \mathbf{N}^*$)且 x 的两个数码是 a_1 与 $a_1 + b + 1$($a_1 \leqslant b - 1$,$a_1 \in \mathbf{N}$)”.

可设二位数码 x 的两个数字是 a_1, a_2($a_1 < a_2$),得

$$\begin{array}{r} \overline{a_2\quad a_1}_{(p)} \\ -\ \overline{a_1\quad a_2}_{(p)} \\ \hline \overline{b\qquad b}_{(p)} \end{array}$$

所以
$$\begin{cases} p + a_1 - a_2 = b \\ a_2 - 1 - a_1 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 2b + 1(b \in \mathbf{N}^*) \\ a_2 = a_1 + b + 1 \end{cases}$$

因为 $0 \leqslant a_1 \leqslant p-1, 0 \leqslant a_2 \leqslant p-1$，所以 $a_1 \leqslant b-1, a_1 \in \mathbf{N}$.

充分性 可得 $k'_{2b+1,2}(x) = \overline{bb}_{(2)} \notin N'_{2b+1,2}$.

由定理 1 知，$k'_{p,n}$ 变换的定义有以下不妥之处：

其一，没有保证 $k'_{p,n}$ 运算的封闭性(如 $k'_{3,2}(02_{(3)}) = 11_{(3)}, 11_{(3)} (\notin N'_{3,2})$，因而不能叫做 $k'_{p,n}$ 变换.

其二，没有给出 $N_{p,n}$ 中每一个元素的 $k'_{p,n}$ 运算，也没有规定 $k'_{p,1}$ 运算.

所以可把上述欠妥的 $k'_{p,n}$ 变换定义改述为：

$k_{p,n}$ 变换定义 $p, n \in \mathbf{N}^*, p \geqslant 2, N_{p,n} = \{\overline{a_1 \cdots a_n}_{(p)}\}$，对于任意的 $x \in \mathbf{N}_{p,n}$，设将 x 的各位数字重排得到的最大数码是 $\overline{a_1 \cdots a_n}_{(p)}$，又设 $\overline{a_n \cdots a_1}_{(p)} - \overline{a_1 \cdots a_n}_{(p)} = \overline{b_1 \cdots b_n}_{(p)}$(可证 $\overline{b_1 \cdots b_n}_{(p)}$ 是存在且唯一的一个 n 位数码，是 $N_{p,n}$ 的元素)，就定义 $k_{p,n}(x) = \overline{b_1 \cdots b_n}_{(p)}$. 显然 $k_{p,n}$ 是关于 $N_{p,n}$ 的变换，就叫做 $k_{p,n}$ 变换.(可参见本文开头的 k' 变换定义)

把 $k_{p,n}$ 变换黑洞的集合记作 $Dk_{p,n}$，有

$$Dk_{p,1} = \{0_{(p)}\}$$

$$Dk_{p,n} = Dk'_{p,n} \cup \{0_{n(p)}\}$$

(这里 p 为偶数或 $n \neq 2$(否则 $Dk'_{p,n}$ 无意义)，0_n 表示由 n 个 0 组成的数码，下同).

定理 2 (黑洞数存在定理)对于任意的 $x \in \mathbf{N}_{p,n}$，由 x 连续进行 $k_{p,n}$ 变换，总可生成 $k_{p,n}$ 变换的一个黑洞.

我们把 $0_{n(p)}$ 叫做 $k_{p,n}$ 变换的平凡黑洞，其他的黑洞(若存在的话)叫做 $k_{p,n}$ 变换的非平凡黑洞，并提出以下平凡黑洞问题：

问题 1 $k_{p,n}$ 变换只有平凡黑洞的充要条件是什么？

问题 2 能且只能由 $N_{p,n}$ 中的哪些元素生成 $k_{p,n}$ 变换的平凡黑洞(把由这些全部元素组成的集合记为 $G_{0_{n(p)}}$，即要求出集合 $G_{0_{n(p)}}$ 的全部元素)，特别的，应当求出 $G_{0_{n(p)}}$ 的元素个数 $|G_{0_{n(p)}}|$，$G_{0_{n(p)}}$ 的每一个元素的黑程是多少(即由这个元素经过多少步 $k_{p,n}$ 变换得到黑洞 $0_{n(p)}$)？

问题 1 即要求出全部的 p 与 n，使其满足 $G_{0_{n(p)}} = N_{p,n}$(由定理 1 知，必须 $n = 2$ 且 $p = 2b + 1$)，所以若彻底解决了问题 2 的第一问，就完全解决了问题 1.

由定理 1，可把问题 1 改述为

问题 1′ 求出全部的正整数 b，使 $k_{2b+1,2}$ 变换只有平凡黑洞.(笔者已得：

$b=1,3$ 满足，$b=2,4$ 不满足．猜想：问题 1′ 的答案是“全部正奇数”．）

2 $k_{2,n}$ 变换黑洞

研究 $k_{p,n}$ 变换黑洞的一般情形是困难的，但本文将彻底解决 $k_{2,n}$ 变换黑洞．

定理 3 （1）当 $n=1$ 时，$N_{2,1}=\{0_{(2)},1_{(2)}\}$，对于 $N_{2,1}$ 的每个元素经过 0 步或 1 步 $k_{2,1}$ 变换开始进入黑洞 $0_{(2)}$（当这个数本身是黑洞时黑程为 0，否则为 1，下同），$Dk_{2,1}=\{0_{(2)}\}$．

（2）当 $n\geqslant 2$ 时

1）设二进制数 x 由 $l(1\leqslant l\leqslant \frac{n}{2}, l\in\mathbf{N}^*)$ 个 1 及 $n-l$ 个 0 组成，二进制数 y 由 l 个 0 及 $n-l$ 个 1 组成，则由 x 和 y 生成的 $k_{2,n}$ 变换黑洞相同，都是 $1_{l-1}01_{n-2l}0_{l-1}1_{(2)}$．

由 $0_{n(2)}$ 及 $1_{n(2)}$ 生成的 $k_{2,n}$ 变换黑洞均为平凡黑洞 $0_{n(2)}$．

2）$|Dk_{2,n}|=[\frac{n}{2}]+1$

证明 只证(2)1)((2)2) 可由(2)1) 得到)．

因为 $1\leqslant l\leqslant\frac{n}{2}$，所以 $n-2l\geqslant 0, l-1\geqslant 0$，可得 $k_{2,n}$ 变换：

$$0_{n-l}1_{l(2)}\rightarrow 1_{l-1}01_{n-2l}0_{l-1}1_{(2)}\rightarrow 1_{l-1}01_{n-2l}0_{l-1}1_{(2)}$$

（这两步变换可见以下两个竖式）→ ⋯

$$\begin{array}{r} 1_l0_{n-2l}0_{l(2)} \\ -\qquad\qquad 1_{l(2)} \\ \hline 1_{l-1}01_{n-2l}0_{l-1}1_{(2)} \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 1_l1_{n-2l}0_{l(2)} \\ -\qquad 1_{n-2l}1_{l(2)} \\ \hline 1_{l-1}01_{n-2l}0_{l-1}1_{(2)} \end{array}$$

本文定理 3 解决了

whc 12[2] 研究 $k_{p,n}$ 变换黑洞，中 $p=2$ 时的情形．

参考文献

[1] 李鸿祥，张芝兰．数学黑洞问题的图论表示[J]．数学通讯，1995(7)：17-20．
[2] 杨之．初等数学研究的问题与课题[M]．长沙：湖南教育出版社，1993．

p 进制下的三个数学黑洞问题
——whc 3,4,5 的初步解决

1 缩小变换黑洞

文献[1] 用数列语言介绍了数学黑洞的有关概念及其记号,文献[1] 的定理 1,4,6 也给出了

whc 1[2] 数列$\{F^n(x)\}_{n\geq 0}$(F 是 $\mathbf{N}^*$ 的变换)存在黑洞的条件是什么?(这里的"条件"包括充分条件、必要条件或充要条件)

的一个初步解决.

定义 1 $M=\{x_i \mid i\in \mathbf{N}^*\}$(其中 $x_1<\cdots<x_n<\cdots$,这里"<"仅表示排序后的先后关系),M 的有限子集 $M_0=\{x_j \mid j\in \mathbf{N}^*, j\leqslant t\}$,$F$ 是关于 M 的变换,若对于任意的 $x\in \complement_M M_0$,有 $F(x)<x$,则称 F 是关于 M 的缩小变换.

(文献[1] 还定义了半缩小变换,扩大变换,半扩大变换).

定理 1[1] 集合 M, M_0 同定义 1,F 是关于 M 的缩小变换,则

(1) 对于任意的 $x\in M$,由 x 可生成 F 的一个黑洞;

(2) 关于 M 的变换 F 的所有黑洞的集合记作 $DF(M)$,有 $DF(M)=\{F$ 的由 M_0 的元素生成的黑洞$\}$;

(3) $DF(M)$ 是有限集,且 $DF(M)\neq\varnothing$.

定义 2 设 p,k 是已知的正整数,$p\geqslant 2$,对于任间的 $x\in\mathbf{N}^*$,定义

(1) $A_{p,k}(x)=x$ 的 p 进制表示的各位数字的 k 次幂之和,显然 $A_{p,k}$ 是 $\mathbf{N}^*$ 的变换,就叫做 $A_{p,k}$ 变换,也叫做 p 进制下正整数的各位数字 k 次幂之和变换;

(2) $B_{p,k}(x)=x$ 的 k 次幂的 p 进制表示的各位数字之和,显然 $B_{p,k}$ 是 $\mathbf{N}^*$ 的变换,就叫做 $B_{p,k}$ 变换,也叫做 p 进制下正整数的 k 次幂的各位数字之和变换;

(3) $C_{p,k}(x)=x$ 的 p 进制表示的各位数字之和的 k 次幂,显然 $C_{p,k}$ 是 $\mathbf{N}^*$ 的变换,就叫做 $C_{p,k}$ 变换,也叫做 p 进制下正整数的各位数字之和的 k 次幂变换.

本文研究 $A_{p,k}, B_{p,k}, C_{p,k}$ 这三种变换的黑洞,从而给出了 **whc 3,4,5**[2] 的初步解答.

2 $A_{p,k}$ 变换黑洞

定理 2 设 p,k 是已知的正整数,$p\geqslant 2$,则

(1) 存在仅与 p,k 有关的正整数常数 n,使 $(p-1)^k n < p^{n-1}$;

(2) 设使 $(p-1)^k n < p^{n-1}$ 的最小正整数 $n=a(p,k)$,则 $n\geqslant a(p,k)$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,均有 $(p-1)^k n < p^{n-1}$;

(3) $A_{p,k}$ 是关于 $\mathbf{N}^*$ 的缩小变换:

设 $N_{a,p,k}=\{\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}\mid n<a(p,k)\}$(这里 $\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}$ 表示 p 进制的正整数,所以 $a_i\in\{0,1,\cdots,p-1\}(i=1,\cdots,n)$,且 $a_1\neq 0$,下同)则 $\forall x\in \complement_{\mathbf{N}^*}N_{a,p,k}$,有 $A_{p,k}(x)<x$.

证明 (1) 略.

(2) 可对 n 用数学归纳法证明.

(3) 可设 $x=\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}$,$n\geqslant a(p,k)$,由(2)得 $(p-1)^k n<p^{n-1}$.

所以 $A_{p,k}(x)=a_1^k+\cdots+a_n^k\leqslant (p-1)^k n<p^{n-1}\leqslant \overline{a_1\cdots a_{n(p)}}=x$,即 $A_{p,k}(x)<x$.

由定理 1,2(3),可得

定理 3 把定理 1 中的 M 换为 $\mathbf{N}^*$,M_0 换为 $N_{a,p,k}$(见定理 2(3)),F 换为 $A_{p,k}$ 所得结论成立.

定理 4 设 $N'_{a,p,k}=\{\overline{a_1\cdots a_{n(p)}}\mid n<a(p,k),0<a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\}$,则 $DA_{p,k}(\mathbf{N}^*)=\{A_{p,k}$ 是由 $N'_{a,p,k}$ 的元素生成的黑洞$\}$.

问题 求 $N'_{a,p,k}$ 的元素个数.

定理 5 (1) $\forall x\in\mathbf{N}^*$,有 $A_{p,1}(x)=B_{p,1}(x)=C_{p,1}(x)=x$ 的 p 进制表示的各位数字之和,$DA_{p,1}(\mathbf{N}^*)=DB_{p,1}(\mathbf{N}^*)=DC_{p,1}(\mathbf{N}^*)=\{1,2,\cdots,p-1\}$.

(2) $DA_{2,k}(\mathbf{N}^*)=\{1\}$.

(3) 1) $DA_{3,2}(\mathbf{N}^*)=\{1,2\rightarrow 4,5,8\}$;

2) $DA_{3,3}(\mathbf{N}^*)=\{1,2\rightarrow 8\rightarrow 16\rightarrow 10,17\}$;

3) $DA_{3,4}(\mathbf{N}^*)=\{1,16\rightarrow 18,17\rightarrow 33\}$;

4) $DA_{3,5}(\mathbf{N}^*)=\{1,34,33,65\}$.

(4) 1) $DA_{4,2}(\mathbf{N}^*)=\{1\}$;

2) $DA_{4,3}(\mathbf{N}^*)=\{1,8,9,28,35,29,55,43,62\}$.

(本文中的黑洞均按由 1,2,… 生成的黑洞出现的先后顺序排列.)

文献[2] 提出了以下两个问题(表述有改动):

whc 3 (1) 当 k 为正奇数时,$|DA_{10,k}(\mathbf{N}^*)|=9$ 是否成立?

(2) 当 k 为正偶数时，$|DA_{10,k}(\mathbf{N}^*)|=2$ 是否成立？

(3) 怎样求出集合 $DA_{10,k}(\mathbf{N}^*)$ 的全部元素？

whc 4 (1) 当 k 为正奇数时，$|DA_{p,k}(\mathbf{N}^*)|=p-1$ 是否正确？

(2) 当 k 为正偶数时，$|DA_{p,k}(\mathbf{N}^*)|=2$ 是否正确？

(3) 怎样求出集合 $DA_{p,k}(\mathbf{N}^*)$ 的全部元素？

本文定理5(3) 的2) 和4)，(4)2) 均否定了 **whc** 4(1)，定理5(2)，(3)1)，3)，(4)1) 均否定了 **whc** 4(2).

对于 $A_{10,k}$ 变换的黑洞，有

定理6 (1) $DA_{10,2}(\mathbf{N}^*)=\{1,4\to16\to37\to58\to89\to145\to42\to20\}$；

(2) $DA_{10,3}(\mathbf{N}^*)=\{1,371,153,55\to250\to133,370,217\to352\to160,407,1\,459\to919,136\to244\}$；

(3) $DA_{10,4}(\mathbf{N}^*)\supseteq\{1,13\,139\to6\,725\to4\,338\to4\,514\to1\,138\to4\,179\to9\,219,2\,178\to6\,514\}$(第2个黑洞可由2生成，第3个黑洞可由127生成)；

(4) $DA_{10,5}(\mathbf{N}^*)\supseteq\{1,24\,585\to40\,074\to18\,855\to71\,787\to83\,190\to92\,061\to66\,858\to84\,213\to34\,068\to41\,811\to33\,795\to79\,467\to101\,463\to9\,045\to63\,198\to99\,837\to167\,916\to91\,410\to60\,075\to27\,708\to66\,414\to17\,601,24\,584\to37\,973\to93\,149\to119\,366\to74\,846\to59\,399\to180\,515\to39\,020\to59\,324\to63\,473\to26\,093\to67\,100,10\,933\to59\,536\to73\,318\to50\,062,83\,633\to41\,273\to18\,107\to49\,577\to96\,812\to99\,626\to133\,682\to41\,063\to9\,044\to61\,097,70\,225\to19\,996\to184\,924\to93\,898\to183\,877\to99\,394\to178\,414\to51\,625\to14\,059\to63\,199\to126\,118\to40\,579\to80\,005\to35\,893\to95\,428\to95\,998\to213\,040\to1\,300\to244\to2\,080\to32\,800\to33\,043\to1\,753\to20\,176\to24\,616\to16\,609\to74\,602\to25\,639,44\,155\to8\,299\to150\,898\to127\,711\to33\,649\to68\,335\}$(这里给出了关于 $\mathbf{N}^*$ 的变换 $A_{10,5}$ 的7个黑洞，它们的周长分别是1,22,12,4,10,28,6. 对于1 ~ 112以内的数只能生成以上黑洞，并且由 1 ~ 16 的数就能生成以上黑洞).

定理6(2) 肯定了 **whc** 3(1) 中 $k=3$ 的情形；$k=5$ 时，**whc** 3(1) 是否成立尚需验证. 定理6(1) 肯定了 **whc** 3 的(2) 中 $k=2$ 的情形，定理6(3) 否定了 **whc** 3(2).

3 $B_{p,k}$ 变换黑洞

定理7 设 p,k 是已知的正整数，$p\geqslant2$，则

(1) 存在仅与 p,k 有关的正整数常数 n，使 $(p-1)kn<p^{n-1}$；

(2) 设使 $(p-1)kn<p^{n-1}$ 成立的最小正整数 $n=b(p,k)$，则 $n\geqslant b(p,$

k)且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时,均有$(p-1)kn < p^{n-1}$;

(3)$B_{p,k}$ 是关于 $\mathbf{N}^*$ 的缩小变换:

设 $N_{b,p,k} = \{\overline{a_1 \cdots a_{n(p)}} \mid n < b(p,k)\}$,则对于任意的 $x \in \complement_{\mathbf{N}^*} N_{b,p,k}$,有 $B_{p,k}(x) < x$.

证明 只证(3).

可设 $x = \overline{a_1 \cdots a_{n(p)}}$,$n \geqslant b(p,k)$,由定理 7(2) 得$(p-1)kn < p^{n-1}$.

设$(\overline{a_1 \cdots a_{n(p)}})^k = \overline{b_1 \cdots b_{m(p)}}$

因为$(\overline{a_1 \cdots a_{n(p)}})^k = < (p^n)^k$,所以$(\overline{a_1 \cdots a_{n(p)}})^k$ 至多是 nk 位数,得 $m \leqslant nk$.

所以 $B_{p,k}(x) = b_1 + \cdots + b_m \leqslant (p-1)m \leqslant (p-1)kn < p^{n-1} \leqslant \overline{a_1 \cdots a_{n(p)}} = x$,即 $B_{p,k}(x) < x$.

由定理 1,7(3) 可得

定理 8 把定理 1 中的 M 换为 $\mathbf{N}^*$,M_0 换为 $N_{b,p,k}$,F 换为 $B_{p,k}$,所得结论成立.

定理 9 (1)1)$DB_{2,2}(\mathbf{N}^*) = \{1\}$;

2)$DB_{2,3}(\mathbf{N}^*) = \{1\}$;

3)$DB_{2,4}(\mathbf{N}^*) = \{1,3,5\}$;

4)$DB_{2,5}(\mathbf{N}^*) = \{1,6,7,9\}$;

5)$DB_{2,6}(\mathbf{N}^*) \supseteq \{1,6,7 \to 9 \to 10\}$(若再对 21 ~ 63 的数进行 $B_{2,6}$ 变换也能生成这里的黑洞,则可将"$\supseteq$"改为"$=$").

(2)1)$DB_{3,2}(\mathbf{N}^*) = \{1,2,4,5\}$;

2)$DB_{3,3}(\mathbf{N}^*) = \{1,8,4\}$;

3)$DB_{3,4}(\mathbf{N}^*) \supseteq \{1,4\}$(若再对 33 ~ 80 的数进行 $B_{3,4}$ 变换也能生成这里的黑洞,则可将"$\supseteq$"改为"$=$").

(3)1)$DB_{10,2}(\mathbf{N}^*) = \{1,13 \to 16,9\}$;

2)$DB_{10,3}(\mathbf{N}^*) = \{1,8,18,19 \to 28,17,26,27\}$;

3)$DB_{10,4}(\mathbf{N}^*) = \{1,7,18 \to 27,22,25,28,36\}$.

4 $C_{p,k}$ 变换黑洞

定理 10 设正整数 x 在 p 进制下的各位数字之和是 y,又设 y 的 $B_{p,k}$ 变换为:$y \to y_1 \to y_2 \to \cdots$,则 x 的 $C_{p,k}$ 变换为:$x \to y^k \to y_1^k \to y_2^k \to \cdots$. 即 x 的 $C_{p,k}$ 变换为:$x \to y^k \to (B_{p,k}(y))^k \to (B_{p,k}^2(y))^k \to \cdots$.

由定理 10 知,要研究 $C_{p,k}$ 变换,只需研究 $B_{p,k}$ 变换.

由定理8,10,得

定理11 (1)把定理1中的 M 换为 $\mathbf{N}^*$,M_0 换为 $N_{c,p,k}=\{(\overline{a_1\cdots a_{n(p)}})^k\mid n<b(p,k)\}$($b(p,k)$ 见定理7),F 换为 $C_{p,k}$,所得结论成立;

(2) $|DC_{p,k}(\mathbf{N}^*)|=|DB_{p,k}(\mathbf{N}^*)|$;

(3)设正整数 x 在 p 进制下的各位数字之和是 y,在 $B_{p,k}$ 变换下,由 y 生成的黑洞是 $r\to s\to\cdots$,则在 $C_{p,k}$ 变换下,由 x 生成的黑洞是 $r^k\to s^k\to\cdots$.

由定理9,11还可得关于 $C_{p,k}$ 变换的黑洞的一些结论,这些结论与定理11 .给出了

whc 5[2] $C_{p,k}$ 变换有何性质?

的初步解答.

参考文献

[1] 甘志国.缩小变换黑洞[J].高等函授学报(自然科学报),1997(4):56-59.
[2] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993.

否定一个定理的逆命题

1 问题的提出

面积为整数的整边三角形叫做海伦三角形，三边互素（指三边长度互素，下同）的海伦三角形叫做本原海伦三角形，也叫做素海伦三角形．关于海伦三角形的研究，可见文献[1] ~ [3] 以及注释 ①、②．

定理 1[3] 本原海伦三角形的面积是 6 的倍数．

文献[3] 又说定理 1 的逆命题不成立，即本原海伦三角形的面积不能是 6 的任意正整数倍，因为文献[4] 说不存在面积为 360 的本原海伦三角形．文献[5] 又证明了存在面积为 360 的本原海伦本角形，所以文献[3] ~ [6] 并未举出定理 1 的逆命题不成立的反例，本文将否定定理 1 的逆命题．

2 引理

引理 1① (1) 海伦三角形的半周长为正整数；

(2) 海伦三角形的三边中有且仅有一边是偶数，或三边均是偶数；

(3) 本原海伦三角形的三边中有且仅有一边是偶数．

引理 2 设海伦三角形的三边为$(a,b,c)(2\mid a)$，面积为 $S_\triangle$，则

$$\left(\frac{1}{2}ab\right)^2-\left[\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\right]^2=S_\triangle^2 \qquad ①$$

（其中$\frac{1}{2}a,b\in\mathbf{N}^*,\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\in\mathbf{Z}$）

证明 文献[5] 的(1) 式，即

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4=16S_\triangle^2$$

由此可得 ① 中等式成立．

由引理 1(1) 知，$2\mid a+b+c$，又 $2\mid a$，所以 $2\mid b+c$．

若 $2\nmid b$，得 $2\nmid c$，所以 $4\mid b^2-c^2$，又 $4\mid a^2$，所以 $4\mid a^2+b^2-c^2$，即 $\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\in\mathbf{Z}$．

---

① 甘志国．已知内切圆半径的面积为有理数的整边三角形 // 傅海伦．中国教育优秀论文集．天津：天津社会科学院出版社，1998．

② 甘志国．再谈海伦三角形 // 傅海伦．中国教育优秀论文集．天津：天津社会科学院出版社，1998．

若 $2\mid b$,得 $2\mid c$,又 $2\mid a$,也得 $\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\in\mathbf{Z}$.

引理 3 方程

$$x^2-y^2=(2n)^2(n\text{ 是已知的任意正整数},x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{Z}) \qquad ②$$

的全部解 $(x,y)=(2n,0)$ 或 $(u+v,\pm(u-v))$,其中 $u,v\in\mathbf{N}^*$,$uv=n^2$,$v<n$.

(由文献[6]的定理1(2)可证)

注释①给出了已知内切圆半径的海伦三角形三边的求法,由本文的引理2,3可求出已知面积的(本原)海伦三角形的三边.

3 定理1逆命题的否定

定理 2 (1)不存在面积为18的海伦三角形;

(2)不存在面积为54的本原海伦三角形.

证明 (1)由引理2,只需证明

$$\left(\frac{1}{2}ab\right)^2-\left[\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\right]^2=18^2$$

(其中 $\frac{1}{2}a,b\in\mathbf{N}^*$,$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\in\mathbf{Z}$)

没有正整数解 (a,b,c).

运用引理3:$n=9$,$uv=9^2$,$v<9$,可得有序数对 $(u,v)=(81,1),(27,3)$,所以

$$\begin{cases}\frac{1}{2}ab & =18,\quad 82,\quad 30\\ \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2) & =0,\pm 80,\pm 24\end{cases}$$

进而可验证出(1)成立.

(2)由引理1(3),引理2,只需证明

$$\left(\frac{1}{2}ab\right)^2-\left[\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\right]^2=54^2$$

(其中 $\frac{1}{2}a,b\in\mathbf{N}^*$,$2\nmid b$,$2\nmid c$,$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\in\mathbf{Z}$)

没有正整数解 (a,b,c).

运用引理3:$n=27$,$uv=27^2$,$v<27$,可得 $(u,v)=(729,1),(243,3),(81,9)$,所以

$$\begin{cases}\frac{1}{2}ab & =54,\quad 730,\quad 246,\quad 90\\ \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2) & =0,\pm 728,\pm 240,\pm 72\end{cases}$$

当$\frac{1}{2}ab=54(\frac{1}{2}a,b\in \mathbf{N}^*,2\nmid b)$时

$$\begin{cases}a= & 108, & 36, & 12, & 4\\ b= & 1, & 3, & 9, & 27\end{cases}$$

又$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)=0$,得$(a,b,c)=(12,9,15)$,这与$(a,b,c)=1$矛盾!

……

可得结论(2)成立.

(由此证明知,存在面积为54的海伦三角形,其三边为(9,12,15).)

仿定理2(2)可证:

定理3 (1)面积为6的本原海伦三角形的三边为(3,4,5);

(2)面积为12的本原海伦三角形的三边为(5,5,6),(5,5,8);

(3)面积为24的本原海伦三角形的三边为(4,13,15);

(4)面积为30的本原海伦三角形的三边为(5,12,13);

(5)面积为36的本原海伦三角形的三边为(3,25,26),(9,10,17).

由定理2,3,笔者提出

猜想1 当且仅当$S_\triangle=6\cdot 3^k(k\in \mathbf{N}^*)$时,不存在面积为$S_\triangle$的本原海伦三角形.

猜想2 当且仅当$S_\triangle=6\cdot 3^{2k-1}(k\in \mathbf{N}^*)$时,不存在面积为$S_\triangle$的海伦三角形.

参考文献

[1] 郑玉美.有趣的海伦三角形[J].中学数学(武汉),1993(3).
[2] 杨世明.中国初等数学研究文集[M].郑州:河南教育出版社,1992.
[3] 朱道勋.关于海伦三角形的边和面积的性质[J].数学通讯,1994(9):20-21.
[4] 潘承彪.有趣的数论[M].北京:北京大学出版社,1985.
[5] 姚兆栋.存在面积为360的本原海伦三角形[J].数学通讯,1999(4):23.
[6] 甘志国.自然数的互素平方差分析[J].中学数学月刊,1997(11):15-16.

已知面积的(本原)海伦三角形三边的求法

面积为整数的整边三角形叫做海伦三角形,三边互素(指三边长度互素,下同)的海伦三角形叫做本原海伦三角形,也叫做素海伦三角形.文献[1]给出了已知内切圆半径的海伦三角形三边的求法,本文再给出已知面积的海伦三角形三边的求法.

本文中(a,b,c),P,S表示海伦三角形的三边长,半周长,面积.用$H(S)$表示面积为S的海伦三角形组成的集合,$h(S)$表示集合$H(S)$的元素个数$|H(S)|$;用(a_0,b_0,c_0),P_0,S_0表示本原海伦三角形的三边长,半周长,面积,$H_0(S_0)$表示面积为S_0的本原海伦三角形组成的集合,$h_0(S_0)=|H_0(S_0)|$.

引理1[①] (1)$P\in\mathbf{N}^*$;

(2)a,b,c中有且仅有一个是偶数或三个全是偶数;

(3)a_0,b_0,c_0中有且仅有一个是偶数.

引理2 (1)设$2\mid a$,则$(\frac{1}{2}ab)^2-[\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)]^2=S^2$(其中$\frac{1}{2}a$,$b\in\mathbf{N}^*$,$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\in\mathbf{Z}$).(见本书“否定一个定理的逆命题”部分)

引理3 (1)方程$x^2-y^2=S^2$(S是已知的任意正奇数,$x\in\mathbf{N}^*$,$y\in\mathbf{Z}$)的全部解是$(x,y)=(S,0)$,或$(\frac{1}{2}(u+v),\pm\frac{1}{2}(u-v))$(其中$u,v\in\mathbf{N}^*$,$uv=S^2$,$v<S$);

(2)方程$x^2-y^2=(2n)^2$(n是已知的任意正整数,$x\in\mathbf{N}^*$,$y\in\mathbf{Z}$)的全部解是$(x,y)=(2n,0)$,或$(u+v,\pm(u-v))$(其中$u,v\in\mathbf{N}^*$,$uv=n^2$,$v<n$).(由文献[1]的定理1可证)

当S已知时,由引理2,3可求出集合$H(S)$的全部元素,进而可从中找出$H_0(S)$的全部元素.

下面的定理给出了一些集合$H_0(S_0)$(注意文献[2]的定理1证明了$6\mid S_0$):

定理 (1)$H_0(6)=\{(3,4,5)\}$;

(2)$H_0(12)=\{(5,5,6),(5,5,8)\}$;

---

① 甘志国.已知内切圆半径的面积为有理数的整边三角形 // 傅海伦.中国教育优秀论文集.天津:天津社会科学院出版社,1998.

(3)$H(18) = H_0(18) = \varnothing$;

(4)$H_0(24) = \{(4,13,15)\}$;

(5)$H_0(30) = \{(5,12,13)\}$;

(6)$H_0(36) = \{(3,25,26),(9,10,17)\}$;

(7)$H_0(54) = \varnothing,(9,12,15) \in H(54)$.

定理(3),(7) 说明了 S_0 不能是 6 的任意整数倍,S 也不能是 6 的任意整数倍.

问题 求出 $h(S)$ 及 $h_0(S_0)$ 的表达式.

猜想 (1)$S_0 = 6 \cdot 3^k (k \in \mathbf{N}^*) \Leftrightarrow h_0(S_0) = 0$;

(2)$S = 6 \cdot 3^{2k-1} (k \in \mathbf{N}^*) \Leftrightarrow h(S) = 0$.

参考文献

[1] 甘志国.自然数的互素平方差分析[J].中学数学月刊,1997(11):15-16.

[2] 朱道勋.关于海伦三角形的边和面积的性质[J].数学通讯,1994(9):20-21.

能表示成两个正整数的平方和的数

很多文献只给出了一个正整数能表示成两个整数的平方和的充要条件[1,2]:

如果 M 的素因数分解式中,所有 $4n-1$ 形素因数的幂指数全是偶数,那么 M 能表示成两个整数的平方和.其逆命题也正确.

本文将给出一个正整数能表示成两个正整数的平方和的充要条件:

定理 正整数 M 能表示成两个正整数的平方和的充要条件是 $M=2a^2(a\in\mathbf{N}^*)$,或 M 含有 $4n+1$ 形素因数且 M 的素因数分解式中所有 $4n-1$ 形素因数的幂指数全是偶数.

引理1 $4n+1$ 形素数能唯一的表示成两个整数的平方和(见文献[1]或文献[2]).

引理2 一个正整数能表示成两个整数的平方和的充要条件(见本文开头).

引理3 若 $a,b,c,d\in\mathbf{N}^*$,$a\neq b$ 或 $c\neq d$,则 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 能表示成两个正整数的平方和.

证明 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$

若 $ac-bd=ad-bc=0$,得 $a=b$ 且 $c=d$,这与题设矛盾!从而可得引理3成立.

引理4 存在 $a,b\in\mathbf{N}^*$,$a\neq b$,使 $4n+1$ 形素数等于 a^2+b^2(由引理1得).

引理5 设 $p_1,\cdots,p_k$ 均是 $4n+1$ 形素数(相同或不同),则存在 $a,b\in\mathbf{N}^*$,$a\neq b$,使 $p_1\cdots p_k=a^2+b^2$.

证明 由引理4,3可对 k 用数学归纳法证明.

引理6 (1)设 $k,x,y\in\mathbf{N}^*$,则 $2^{2k}=x^2+y^2$ 无解;

(2)$2^{2k-1}=x^2+y^2(k,x,y\in\mathbf{N}^*)$ 的全部解是 $x=y=2^{k-1}$.

证明 (1)假设有解,得 x,y 同奇或同偶,进而得 x,y 同偶.可设 $2^i\parallel x$,$2^j\parallel y$,$i\geqslant j\geqslant 1$.

若 $i>j$,得 $2^{2j}\parallel x^2+y^2$,所以 $2j=2k$,$x^2+y^2>y^2\geqslant 2^{2j}=2^{2k}$,与 $x^2+y^2=2^{2k}$ 矛盾!

若 $i=j$,得$(\frac{x}{2^i})^2+(\frac{y}{2^i})^2=2^{2k-2i}$.由$\frac{x}{2^i},\frac{y}{2^i}$均奇,得$2\parallel(\frac{x}{2^i})^2+(\frac{y}{2^i})^2$,$2k-2i=1$,不可能!所以(1)成立!

(2)$k=1$时成立.

$k\geqslant 2$时,得x,y同偶,设$2^i\parallel x,2^j\parallel y,i\geqslant j\geqslant 1$.

若$i>j$,得$2^{2j}\parallel x^2+y^2,2j=2k-1$,不可能!

所以$i=j,(\frac{x}{2^i})^2+(\frac{y}{2^i})^2=2^{2k-1-2i},2k-1-2i=1,i=k-1$,得$x=y=2^{k-1}$,(2)成立.

引理 7 方程$x^2+y^2=z^2(x,y,z\in\mathbf{N}^*,z$不含$4n+1$形素因数)无解.

证明 假设有解,又设$(x,y)=d$,得$\frac{z}{d}\in\mathbf{N}^*,\frac{z}{d}$不含$4n+1$形素因数,$(\frac{x}{d})^2+(\frac{y}{d})^2=(\frac{z}{d})^2,(\frac{x}{d},\frac{y}{d})=1$,得原方程有正整数解$(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d})$,且$(\frac{x}{d},\frac{y}{d})=1$.

所以只需证明原方程没有$(x,y)=1$的解.

假设原方程有$(x,y)=1$的解,且z最小,得$z\neq 1,z^2>z$.

由求勾股数组的定理[3],得$z=x_1^2+y_1^2,x_1,y_1\in\mathbf{N}^*,2\nmid x_1+y_1$,所以$2\nmid z$,又$z$不含$4n+1$形素因数,$z\neq 1$,所以$z$是若干个相同或不相同的$4n-1$形素数之积.由引理2,得$z=z_1^2,z_1^2=x_1^2+y_1^2$,所以原方程又有解$(x_1,y_1,z_1)$,但$z_1^2=z<z^2,z_1<z$,与$z$最小矛盾!所以原方程无解.

定理的证明 **必要性** 若M能表示成两个正整数的平方和,由引理2知,M的素因数分解式中所有$4n-1$形素因数的指数全是偶数.假设M不含$4n+1$形素因数,则$M=a^2$或$2a^2(a\in\mathbf{N}^*)$,由引理7知$M\neq a^2$,所以$M=2a^2$.

充分性 当$M=2a^2(a\in\mathbf{N}^*)$时,$M=a^2+a^2$.

当M含有$4n+1$形素因数且M的素因数分解式中所有$4n-1$形素因数的指数全是偶数时,可设$M=pc^2$或$2pc^2$,其中p是若干个(至少一个)相同或不相同的$4n+1$形素数之积,$c\in\mathbf{N}^*,c$不含$4n+1$形素因数.

当$M=pa^2$时,由引理5可设$p=a^2+b^2(a,b\in\mathbf{N}^*,a\neq b)$,得$M=(ac)^2+(bc)^2$.

当$M=2pa^2$时,因为存在$a_1,b_1\in\mathbf{N}^*,a_1\neq b_1$,使$pa^2=a_1^2+b_1^2$,所以

$$M=2pa^2=(a_1+b_1)^2+(a_1-b_1)^2$$

推论 $a^2(a\in\mathbf{N}^*)$能表示成两个正整数的平方和的充要条件是a含有$4n+1$形素因数.

运用推论,可把文献[4]的定理1改述得更简洁:

关于 x,y 的不定方程 $x^2+dy^2=(p^2+dq^2)^n(|d|,p,q\in\mathbf{N}^*,p^2+dq^2\neq0)$ 对于一切正整数 n 恒有正整数解的充要条件是 $p^2\neq dq^2$ 或 p 含有 $4t+1$ 形素因数.

参考文献

[1] 单墫.趣味数论[M].北京:中国青年出版社,1987.
[2] 傅钟鹏.数学的魅力[M].福州:福建科学技术出版社,1985.
[3] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1979.
[4] 简超.一类不定方程恒有正整数解的条件[J].数学通讯,1997(1):28-30.

$p \mid C_{p-1}^{k} - (-1)^{k}$ 时 p 的性质的研究

定理 1 若 p 是素数，$k=0,1,\cdots,p-1$，则 $p \mid C_{p-1}^{k}-(-1)^{k}$.

证明 $C_{p-1}^{k}-(-1)^{k}=\dfrac{(p-1)\cdots(p-k)-(-1)^{k}k!}{k!}=p\cdot\dfrac{A}{k!}$ ①

其中 $A=p^{k-1}-(\sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant k}a_1)p^{k-2}+\cdots+(-1)^{k-2}(\sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant k}a_1\cdots a_{k-2})p+(-1)^{k-1}\sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant k}a_1\cdots a_{k-1}$ ②

($\sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant k}a_1\cdots a_n$ 表示 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的所有 n 元子集 $\{a_1,\cdots,a_n\}$（$a_1,\cdots,a_n$ 中每两个不相等）的全部元素乘积的和)

由 p 是素数，$k=0,1,\cdots,p-1$，得 $(p,k!)=1$.

在①中有 $p\cdot\dfrac{A}{k!}$ 是整数，所以 $k!\mid pA$，得 $k!\mid A$，$\dfrac{A}{k!}$ 是整数，所以 $p\mid C_{p-1}^{k}-(-1)^{k}$.

定理 1 的逆命题不成立，如 $15\mid C_{14}^{2}-1$（即 $15\mid 90$），但 15 是合数，当 $p\mid C_{p-1}^{k}-(-1)^{k}$ 时，p 有哪些性质呢?

定理 2 若 $p\mid C_{p-1}^{k}-(-1)^{k}$，$p_1$ 是素数，$\dfrac{k}{2}<p_1\leqslant k$，则 $p_1\nmid p$.

证明 由 $p\mid C_{p-1}^{k}-(-1)^{k}$ 及①，有 $k!\mid A$.

由 $p_1\leqslant k$，得 $p_1\mid A$. 假设 $p_1\mid p$，由②得，$p_1\mid \sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant k}a_1\cdots a_{k-1}$.

$\sum\limits_{1\leqslant a_i\leqslant k}a_1\cdots a_{k-1}$ 是 k 项式，其中只有一项 $1\cdots(p_1-1)(p_1+1)\cdots k$ 不含 p_1，所以 $p_1\mid 1\cdots(p_1-1)(p_1+1)\cdots k$.

由 p_1 是素数，得 $p_1\nmid 1\cdots(p_1-1)(p_1+1)\cdots(2p_1-1)$.

由 $\dfrac{k}{2}<p_1$，得 $k\leqslant 2p_1-1$，所以 $p_1\nmid 1\cdots(p_1-1)(p_1+1)\cdots k$. 得到矛盾!所以 $p_1\nmid p$.

推论 1 若 $p\mid C_{p-1}^{k}-(-1)^{k}$，$k$ 是素数，则 $k\nmid p$.

定理 3 若 $k_n=\left[\dfrac{\sqrt{p}}{2^{n-1}}\right]$（$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数），$p\mid C_{p-1}^{k_n}-(-1)^{k_n}$（$n=1,2,\cdots,N-1$；$k_N\leqslant 1$），则 p 是素数.

证明 我们证明:对于不大于$[\sqrt{p}]$的素数p_1,均有$p_1 \nmid p$,便得p是素数.

因为$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_N, p_1 \leqslant k_1, k_N \leqslant 1$,所以可把这样的素数$p_1$分为$N-1$种情形:

$$k_1 \geqslant p_1 > k_2, k_2 \geqslant p_1 > k_3, \cdots, k_{N-1} \geqslant p_1 > k_N$$

或表示为

$$k_n \geqslant p_1 > k_{n+1} (n = 1, 2, \cdots, N-1)$$

因为$p \mid C_{p^n-1}^{k_n} - (-1)^{k_n}$,所以由定理2得,当$\frac{k_n}{2} < p_1 \leqslant k_n$时,$p_1 \nmid p$.

可证$\frac{1}{2}[a] < [\frac{a}{2}] + 1$恒成立.得

$$\frac{k_n}{2} = \frac{1}{2}[\frac{\sqrt{p}}{2^{n-1}}] < [\frac{\sqrt{p}}{2^n}] + 1 = k_{n+1} + 1$$

所以$k_{n+1} + 1 \leqslant p_1 \leqslant k_n$,即当$k_{n+1} < p_1 \leqslant k_n$时,$p_1 \nmid p$.定理3成立.

定理4 若$p \mid C_{p-1}^{2k+1} + 1, (p, (2k+1)!) = 1$,则$p \mid C_{p-1}^{2k} - 1$.

证明 因为$p \mid C_{p-1}^{2k+1} + 1$,

$$C_{p-1}^{2k+1} + 1 = \frac{(p-1)\cdots(p-2k-1)}{(2k+1)!} + 1$$

所以
$$p(2k+1)! \mid (p-1)\cdots(p-2k-1) + (2k+1)!$$

因为
$$C_p^{2k+1} = \frac{p(p-1)\cdots(p-2k)}{(2k+1)!} (\text{右边} \in \mathbf{Z})$$

所以
$$(2k+1)! \mid p(p-1)\cdots(p-2k)$$

又
$$(p, (2k+1)!) = 1$$

所以$(2k+1)! \mid (p-1)\cdots(p-2k), p(2k+1)! \mid p(p-1)\cdots(p-2k)$

所以
$$p(2k+1)! \mid (p-1)\cdots(p-2k)(2k+1) - (2k+1)!$$

$$p \left| \frac{(p-1)\cdots(p-2k)}{(2k)!} - 1\right.$$

即
$$p \mid C_{p-1}^{2k} - 1$$

定理5 (1)$p \mid C_{p-1}^2 - 1 \Leftrightarrow 2 \nmid p$;

(2)$p \mid C_{p-1}^3 + 1 \Leftrightarrow 2 \nmid p$,且$3 \nmid p$;

(3)$p \mid C_{p-1}^4 - 1 \Leftrightarrow (2 \nmid p$,或$p = 8t-2, t \in \mathbf{N}$,下同),且$3 \nmid p$;

(4)$p \mid C_{p-1}^5 + 1 \Leftrightarrow (2 \nmid p$,或$p = 8t-2,)$,且$3 \nmid p$,且$5 \nmid p$;

(5)$p \mid C_{p-1}^6 - 1 \Leftrightarrow 2 \nmid p$,且$(3 \nmid p$,或$9 \mid p)$,且$5 \nmid p$;

(6)$p \mid C_{p-1}^7 + 1 \Leftrightarrow 2 \nmid p$,且$(3 \nmid p$,或$9 \mid p)$,且$5 \nmid p$,且$7 \nmid p$.

证明 这里只证(3),其余的可类似证明.

$p \mid C_{p-1}^4 - 1 \Leftrightarrow p \mid p \cdot \frac{1}{24}(p^3 - 10p^2 + 35p - 50) \Leftrightarrow 2^3 \cdot 3 \mid p^3 - 10p^2 +$

$35p-50 \Leftrightarrow 2^3 \mid p^3-10p^2+35p-50$,且$3 \mid p^3-10p^2+35p-50$.

$2^3 \mid p^3-10p^2+35p-50 \Leftrightarrow 2^3 \mid p^3-2p^2+3p-2 \Leftrightarrow 2 \nmid p$ 或 $p=8t-2$(设 $p=8t,8t \pm 1,8t \pm 2,8t \pm 3,8t+4$,讨论得 $p=8t \pm 1,8t \pm 3,8t-2$);

$3 \mid p^3-10p^2+35p-50 \Leftrightarrow 3 \mid p^3-p^2-p+1 \Leftrightarrow 3 \nmid p$($\Rightarrow$ 显然,$\Leftarrow$ 由 Fermat 小定理可得,当 $3 \nmid p$ 时,$3 \mid p^3-p$,$3 \mid p^2-1$,所以 $3 \mid p^3-p^2-p+1$).

得结论(3)成立.

由定理5,我们提出

猜想 $p \mid C_{p-1}^{2k}-1$,且 $p_1 \nmid p$(p_1 是不大于 $2k+1$ 的最大素数)$\Leftrightarrow p \mid C_{p-1}^{2k+1}+1$.

下面再给出一个定理.

定理6 若 $p \mid C_p^k$,k 是素数,则 $k \nmid p$.

证明 $C_p^k=p \cdot \dfrac{(p-1)\cdots[p-(k-1)]}{k!}=p \cdot \dfrac{A}{k!}$

其中 $A=(p-1)\cdots[p-(k-1)]$,有 $A \equiv (k-1)!\pmod{p}$.

由 $p \mid C_p^k$,得 $k! \mid A$,$k \mid A$.假设 $k \mid p$,得 $k \mid (k-1)!$,这与 k 是素数矛盾!,所以 $k \nmid p$.

推论2 p 是素数 $\Leftrightarrow$ 对于所有不大于$\sqrt{p}$ 的素数 k,均有 $p \mid C_p^k$.

贝尔数的递推公式及一条新性质

贝尔(Bell)是出生于苏格兰的美国数学家,1960 年逝世. 贝尔数 $B_n(n \in \mathbf{N}^*)$在组合理论上很有用,用多宾斯基(Dobjnski)公式 $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$(其中 e 为自然对数的底数)计算 B_n 的值不方便,通常用下面的贝尔三角形计算 B_n:

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 27 & 37 & 52 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

用 $A_{ij}(i,j \in \mathbf{N}^*, i \geqslant j)$ 表示贝尔三角形中第 i 行第 j 列的数,则

(1) $A_{11} = A_{21} = 1$;

(2) $A_{ij} = A_{i-1,j-1} + A_{i,j-1}$;

(3) $A_{i1} = A_{i-1,i-1}$;

(4) $A_{ii} = B_i$.

以上叙述参见文献[1]第 264 ~ 265 页.

本文给出贝尔数 B_n 的递推公式.

定理 1 $B_n = B_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}C_{n-1}^{i-1}B_i$.

证明 先用数学归纳法证明

$$B_n = A_{n,n-k} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}C_k^{i-1}B_{n-(k-i+1)}(k \in \mathbf{N}^*, k \leqslant n-1) \quad ①$$

容易验证 $k = 1$ 时成立(这里的证明要多次运用(2),(3),(4)).

假设 $k = r(r \in \mathbf{N}^*, r \leqslant n-2)$ 时 ① 成立:

$$B_n = A_{n,n-r} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}C_r^{i-1}B_{n-(r-i+1)} \quad ②$$

所以

$$A_{n-1,n-1-r} = B_{n-1} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{r+1-i}C_r^{i-1}B_{n-(r-i+2)} \quad ③$$

由 ②,③,得

$$B_n = A_{n-1,n-1-r} + A_{n,n-1-r} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}C_r^{i-1}B_{n-(r-i+1)} =$$

$$A_{n,n-(r+1)} + B_{n-1} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{r+1-i}C_r^{i-1}B_{n-(r-i+2)} +$$

$$\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}C_r^{i-1}B_{n-(r-i+1)} =$$

$$A_{n,n-(r+1)} + B_{n-1} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{r+1-i}C_r^{i-1}B_{n-(r-i+2)} +$$

$$\sum_{i=2}^{r+1}(-1)^{r+1-i}C_r^{i-2}B_{n-(r-i+2)} =$$

$$A_{n,n-(r+1)} + B_{n-1} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{r+1-i}(C_r^{i-1} + C_r^{i-2})B_{n-(r-i+2)} +$$

$$(-1)^rB_{n-(r+1)} + C_r^{r-1}B_{n-1} =$$

$$A_{n,n-(r+1)} + \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{r+1-i}C_{r+1}^{i-1}B_{n-(r-i+2)}$$

即 $k = r + 1$ 时 ① 也成立.所以 ① 成立.

在 ① 中令 $k = n - 1$,可得定理 1 成立.

由定理 1 计算 B_n 较用贝尔三角形计算 B_n 要方便得多.

数学家陶尔德(Touchard) 还发现 B_n 的整除性质(见文献[1] 第 266 页):若 p 是素数,则

$$p \mid B_p - 2 \qquad ④$$

$$p \mid B_{p+k} - (B_k + B_{k-1})(k \in \mathbf{N}^*, \text{约定 } B_0 = 1) \qquad ⑤$$

本文还得到 B_n 的另一条新的整除性质:

定理 2 若 p 是奇素数,则

(1) $p \mid B_p + \sum_{i=1}^{p-2} B_i$;

(2) $p \mid 2 + \sum_{i=1}^{p-2} B_i$.

证明 (1) 读者可证:若 p 是奇素数,$0 \leqslant i \leqslant p - 1$,则

$$p \mid C_{p-1}^{i} - (-1)^i \qquad ⑥$$

由定理 1 及 ⑥,得

$$B_p = B_{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{p-i}C_{p-1}^{i-1}B_i \equiv$$

$$B_{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{p-i}(-1)^{i-1}B_i = B_{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1}B_i = -\sum_{i=1}^{p-2}B_i \pmod p$$

所以
$$p \mid B_p + \sum_{i=1}^{p-2} B_i$$

(2) 由(1)及④可得

数列$\{B_n\}$中是否有无限项为素数?这是至今尚未解决的.

参考文献

[1] 张文忠.中学数学中的趣题[M].西安:陕西科学技术出版社,1989.

一边为定值的勾股形的个数及求法

整边直角三角形叫做勾股形,三边互素的勾股形叫做基本勾股形.文献[1]给出了一直角边为定值的勾股形的个数,但该文的结论、推证都很复杂,读来费时费力.本文给出任一边为定值的勾股形、基本勾股形的个数及求法,结论与推证都很简洁、严密.

正整数 x,y,z 是勾股形的三边 $\Leftrightarrow x^2+y^2=z^2$,所以求一直角边为定值 a 的勾股形及其个数,即求

$$a^2=z^2-y^2(a\text{ 是已知的正整数}) \quad ①$$

的全部正整数解及其组数.

关于组数,早已有简洁完整的结论(见文献[2]第95页):

设 a 的标准分解式为 $a=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}(\alpha,\alpha_i\in\mathbf{N}^*)$,$P_i$ 是互不相同的奇素数,$i=1,\cdots,k$),则①的正整数解的组数是

$$\frac{1}{2}[(2\alpha-1)(2\alpha_1+1)\cdot\cdots\cdot(2\alpha_k+1)-1] \quad ②$$

结论②也给出了文献[1]中"④,⑪,⑫"三个繁杂和式的求和结果,具体的等式这里就不写出了.

文献[2]没有给出②的证明,谈及证明,也有文献.

求①的全部正整数解及其组数,即求 a^2 的全部平方差分拆及其组数,这在文献[3]中可以找到完整的答案.

引理 本文用 $\sigma(a)(a\in\mathbf{N}^*)$ 表示 a 的全部正约数的个数.显然 $\sigma(1)=1$;当 $a\geqslant 2$ 时,设 a 的标准分解式 $a=p_1^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$,则 $\sigma(a)=(\alpha_1+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha_k+1)$.(即文献[3]引理1)

由文献[3]中定理1,2,及定理2(4)的证明可得

定理1 (1)当 $2\nmid a$ 时,①的全部正整数解为

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}(\frac{a^2}{b}-b)\\ z=\frac{1}{2}(\frac{a^2}{b}+b)\end{cases}$$

其中 $b\in\mathbf{N}^*,b\mid a^2,b<a$,此时①的解的组数为 $[\frac{1}{2}\sigma(a^2)]$;

(2)当 $2\mid a$ 时,设 $a=2a_1$,①的全部正整数解为

$$\begin{cases} y = \dfrac{a_1^2}{b} - b \\ z = \dfrac{a_1^2}{b} + b \end{cases}$$

其中 $b \in \mathbf{N}^*$, $b \mid a_1^2$, $b < a_1$,此时 ① 的解的组数为$[\frac{1}{2}\sigma(a_1^2)]$.

定理 1 中的组数与结论 ② 是一致的.

由 ② 容易得到

定理 2 (1)① 有正整数解 $\Leftrightarrow a \geqslant 3$;

(2)① 有且只有一组正整数解 $\Leftrightarrow a = 2^3, p$,或 $2p^2$(p 是奇素数);

(3)① 有且只有两组正整数解 $\Leftrightarrow a = 2^3, p^2$,或 $2p^2$(p 是奇素数);

(4)① 有且只有三组正整数解 $\Leftrightarrow a = 2^4, p^3$,或 $2p^3$(p 是奇素数).

读者可用定理 1 求解文献[1] 的例 1,2,方法一定简捷些.

正整数 x, y, z 是基本勾股形的三边 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$,且$(y, z) = 1$,所以求一直角边为定值 a 的基本勾股形及其个数,即求

$$a^2 = z^2 - y^2(a\text{ 是已知的正整数},(y,z) = 1) \tag{③}$$

的全部正整数解及其组数.关于此,有

定理 3 (1) 当 $2 \nmid a$ 时,③ 的全部正整数解为

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}(\dfrac{a^2}{b} - b) \\ z = \dfrac{1}{2}(\dfrac{a^2}{b} + b) \end{cases}$$

其中 $b \in \mathbf{N}^*$, $b \mid a^2$, $b < a$, $(\frac{a^2}{b}, b) = 1$,此时解的组数为 2^{k-1}(其中 k 是 a 的不同素因数的个数);

(2) 当 $2 \parallel a$(指 $2 \mid a$,但 $2^2 \nmid a$) 时,③ 没有正整数解;

(3) 当 $a = 2a_1$, $2 \mid a_1$ 时,③ 的全部正整数解为

$$\begin{cases} y = \dfrac{a_1^2}{b} - b \\ z = \dfrac{a_1^2}{b} + b \end{cases}$$

其中 $b \in \mathbf{N}^*$, $b \mid a_1^2$, $b < a_1$, $(\frac{a_1^2}{b}, b) = 1$,此时解的组数为 2^{k-1}(其中 k 是 a 的不同素因数的个数).

证明 (1) 由 $2 \nmid a$,得 $2 \mid y$, $2 \nmid z$. 可证$(y, z) = 1 \Leftrightarrow (z + y, z - y) = 1$. 又

由定理 1(1) 可得定理 3(1) 的前半部分结论成立.下面再求 ③ 的解的组数.

记 $A_a = \{b \mid b \in \mathbf{N}^*, b \mid a^2, b < a, (\frac{a^2}{b}, b) = 1\}$,

$B_a = \{b \mid b \in \mathbf{N}^*, b \mid a^2, b > a, (\frac{a^2}{b}, b) = 1\}$,

$C_a = \{b \mid b \in \mathbf{N}^*, b \mid a^2, (\frac{a^2}{b}, b) = 1\}$.

因为 k 是 a 的不同素因数的个数,所以集合 C_a 的元素个数 $= 2^k$(这里省去了一些推导),可证 $|A_a| = |B_a|$(因为容易证明,当 $b \in A_a$ 时,$\frac{a^2}{b} \in B_a$;当 $b \in B_a$ 时,$\frac{a^2}{b} \in A_a$),$A_a \cup B_a = C_a$(因为在定理 3(1) 中有 $a > 1$,所以在 C_a 中 $b \neq a$),$A_a \cap B_a = \varnothing$.

所以 $|A_a| = \frac{1}{2}|C_a| = 2^{k-1}$,得此时 ③ 的解的组数是 2^{k-1}.

(2) 假设 ③ 有正整数解(y, z),则(y, z) 满足定理 1(2),且定理 1(2) 中的 a_1 为奇数(因为 $2 \parallel a, a = 2a_1$),b 也为奇数(因为 $b \mid a_1^2$),所以 $y = \frac{a_1^2}{b} - b, z = \frac{a_1^2}{b} + b$ 均为偶数,与$(y, z) = 1$ 矛盾!所以此时 ③ 没有正整数解.

(3) 由 $2 \mid a$,得 $2 \nmid y, 2 \nmid z$.可证$(y, z) = 1 \Leftrightarrow (\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}) = 1$,而后的证明全同(1).

例 1 求以 $a = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ 为一直角边的所有基本勾股形的另一直角边 y 与斜边 z.

解 由定理 3(1) 得,所求基本勾股形的个数为 $2^{3-1} = 4$.

在定理 3(1) 中,$a = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$,得 $b = 1, 3^6, 5^4, 7^2$,所以$(y, z) =$ (11 16 28 12,11 16 28 13),(14 948,15 677),(17 548,18 173),(227 788,227 837).

关于文献[1],笔者还作以下四点说明:

(1)③ 中 m, n 也应有与 ② 后面相同的限制:$(m, n) = 1, m > n, 2 \nmid m + n$.因为定理 1,2 的证明都用到了这些限制条件.

(2) 在定理 1 的证明中,几处“恰有一半”不是显然的,应予以严格证明(可参见本文定理 3(1) 的证法).

(3) 定理 2 的证明开头“因 b 为偶数,应在文献[1] 中(3) 式中取 $2tmn = b$”的叙述不妥:因为 t 为偶数时,$t(m^2 - n^2)$ 也为偶数.

因为是求勾股形的个数,所以 x,y 之间无序.因而可以选 $2tmn = b$ 求个数,得文献[1] 定理 2 的结论及证明正确.

(4) 定理文献[1]2 中没有给出 $b = 2^k (k \geqslant 2)$ 时的基本勾股形的个数.

例 2 求以 $a = 2^{1\,997}$ 为一直角边的所有基本勾股形.

解 由定理 3(3) 得,$(y,z) = (2^{1\,996} - 1, 2^{1\,996} + 1)$.

要求斜边为定值 c 的勾股形及其个数,即求

$$x^2 + y^2 = c^2(c\text{ 是已知的正整数},x,y\text{ 之间无序}) \qquad ④$$

的全部正整数解及其组数;

要求斜边为定值 c 的基本勾股形及其个数,即求

$$x^2 + y^2 = c^2(c\text{ 是已知的正整数},(x,y) = 1,x,y\text{ 之间无序}) \qquad ⑤$$

的全部正整数解及其组数.

关于此,有以下结果.

定理 4 (1)④ 有正整数解 $\Leftrightarrow c = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k} q_1^{2\beta_1} \cdot \cdots \cdot q_l^{2\beta_l} (\alpha, \alpha_i, \beta_j \in \mathbf{N}, p_i$ 是 $4n + 1$ 形素数,q_j 是 $4n - 1$ 形素数,$i = 1,\cdots,k; j = 1,\cdots,l)$ ⑥
且 c 有 $4n + 1$ 形素因数;

(2) 当 c 表示为 ⑥ 式时,④ 的正整数解的组数是

$$\frac{1}{2}[(2\alpha_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (2\alpha_k + 1) - 1]$$

证明 (1) 由注释① 的引理可得.

(2) 见文献[2] 第 97 页.

④ 的全部正整数解(只有有限组),可由求勾股数组的公式得到(例子可见文献[2] 第 96 页).⑤ 的全部正整数解可由基本勾股数组得到,⑤ 有正整数解的充要条件是 c^2 能表示成两个互质数的平方和(当然 $2 \nmid c$),表示的组数即 ⑤ 的正整数解的组数(具体为多少,笔者还未从文献中查得).

定理 5 斜边为 $4n + 1$ 形素数的勾股形唯一存在,且为基本勾股形.

证明 由定理 4(2) 知前半部分结论成立.设此勾股形的三边是 (x,y,c),$x^2 + y^2 = c^2$(c 是 $4n + 1$ 形素数),由 $(x,y) \mid x^2 + y^2$,得 $(x,y) = 1, c$ 或 c^2,可得 $(x,y) = 1$,所以 (x,y,c) 是基本勾股形的三边.

例 3 求斜边为 1 997,1 999 的勾股形.

解 因为 1 997 是素数,所以由定理 5 知,斜边为 1 997 的勾股形唯一存在,且是基本勾股形,即(315,1 972,1 977).

---

① 甘志国.一类不定方程有正整数解的充要条件 // 傅海伦.中国教育优秀论文集.天津:天津社会科学院出版社,1998.

因为 1 999 是 $4n-1$ 形素数,所以由定理 4(1) 知,斜边为 1 999 的勾股形不存在.

参考文献

[1] 张文忠.一直角边为定值的勾股形的个数[J].数学通讯,1996(7):25-27.
[2] 傅钟鹏.数学的魅力[M].福州:福建科学技术出版社,1985.
[3] 甘志国.任意自然数的全部平方差分拆及其组数[J].数学通讯,1996(11):29-31.

已知一边范围的整边三角形的个数

定理 1 (1) 最大边等于 n 的整边三角形的个数为

$$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+2}{2}\right]$$

(2)$m\leqslant$ 最大边 $\leqslant n$ 的整边三角形的个数为

$$F(m,n)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{12}m(m-1)(m+1)+\frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+2}{2}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{m+1}{2}\right]$$

证明 (1) 所求的个数 $f(n)$ 即 $x\leqslant y\leqslant n<x+y$ 的正整数解的组数.

当 n 为奇数时,解的组数即图 1 中 $\triangle BCD$(包括边界)中除去 CD 上的整点(坐标为整数的点)数,即

$$f(n)=1+3+5+\cdots+n=\frac{1}{4}(n+1)^2$$

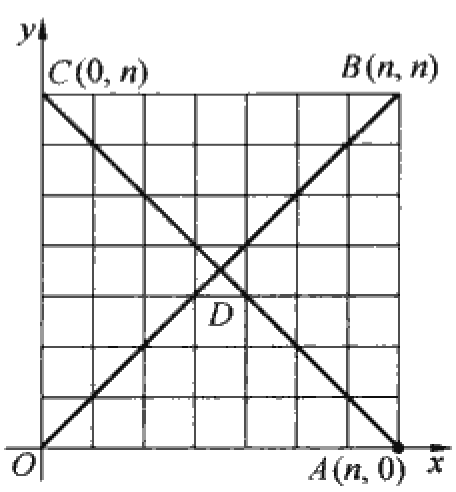


图 1

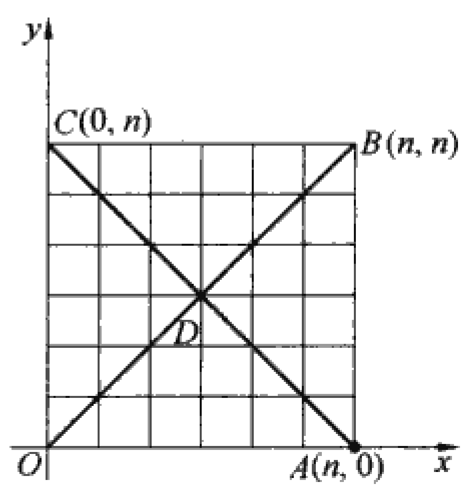


图 2

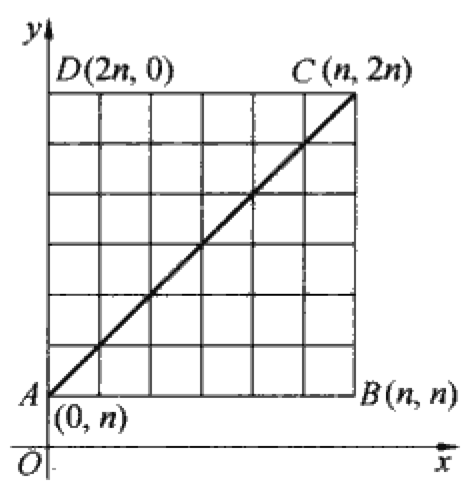


图 3

当 n 为偶数时,解的组数即图 2 中 $\triangle BCD$(包括边界)中除去 CD 上的整点数,即

$$f(n)=2+4+6+\cdots+n=\frac{1}{4}n(n+2)$$

所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,有

$$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+2}{2}\right]$$

(2) 由文献[1] 的 ⑥ 式可得

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{j=2}^{n+1}\left[\frac{j}{2}\right]\left[\frac{j+1}{2}\right] = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right]$$

所以

$$F(m,n) = \sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i) - \sum_{i=1}^{m-1} f(i) = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right] - \frac{1}{12}m(m-1)(m+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m+1}{2}\right]$$

由图 1,2 还易得以下结论(以下 $f(n)$ 的意义同定理 1):

(1) 最大边等于 n 的非等腰整边三角形的个数为 $f(n-3)$;

(2) 最大边等于 n 且最大边不是腰的整边三角形的个数为 $f(n-2)$;

(3) 最大边等于 n 且最小边不是腰的整边三角形的个数为 $f(n-1)$.

定理 2 (1) 次大边等于 n 的整边三角形的个数为

$$g(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) $m \leqslant$ 次大边 $\leqslant n$ 的整边三角形的个数为

$$G(m,n) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{6}m(m-1)(m+1)$$

证明 (1) 所求的个数 $g(n)$ 即 $x \leqslant n \leqslant z < x + n$ 的正整数解的组数,即图 3 中 $\triangle ABC$(包括边界) 中除去 AC 上的整点数,即

$$g(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) 是容易证明的.

由图 3 也可得以下结论(下面的 $g(n)$ 同定理 2):

(1) 次大边等于 n 的非等腰整边三角形的个数为 $g(n-2)$;

(2) 次大边等于 n 且最大边不是腰的整边三角形的个数为 $g(n-1)$;

(3) 次大边等于 n 且最小边不是腰的整边三角形的个数为 $g(n-1)$.

显然,$m \leqslant$ 最小边 $\leqslant n(m \leqslant n \leqslant +\infty)$ 的整边三角形有无限个.

注意,本文中的 $m,n \in \mathbf{N}^*$.

参考文献

[1] 秦宗慈.一些取整数列求和公式及应用[J].数学通讯,1996,(4):25-27.

求 t 除 a^n 的余数

文献[1]给出了求 b 除 $a^n(a,b,n\in\mathbf{N}^*)$ 的余数的方法,但该文在表述上有以下错误:

(1) 结论2是错的(反例:当 $a=2,b=12,i=6,j=2$ 时,该结论不成立).

(2) 结论3是错的(反例:当 $a=2,b=4$ 时,不存在 $T\in\mathbf{N}^*$,使 $R(\frac{2^{T+1}}{4})=R(\frac{2}{4})$,因为不存在 $T\in\mathbf{N}^*$,使 $4\mid 2^{T+1}-2$).

(3) 求 $R(\frac{a^n}{b})$ 的一般步骤第三步中"$R(\frac{a_0^n}{b})=R(\frac{a_0^k}{b})$"($T$ 是 $R(\frac{a_0^n}{b})$ 的周期,$n=Tq+k,0\leqslant k\leqslant T-1$)是错的(反例:当 $a_0=2,b=6$ 时,有 $T=2$,又 $n=2$ 时,$k=0$,但 $4=R(\frac{2^2}{6})=R(\frac{a_0^n}{b})\neq R(\frac{a_0^k}{b})=R(\frac{2^0}{6})=1$).

(4) 用记号 $R(\frac{a}{b})$ 表示 b 除 a 的余数不妥(虽然 b 除 a 的余数是由 a,b 唯一确定的),因为会出现 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$,但 $R(\frac{6}{8})\neq R(\frac{3}{4})$ 的情形.

本文给出 t 除 $a^n(a\in\mathbf{Z},t,n\in\mathbf{N}^*)$ 的余数的完整方法.用 $R_t(a)$ 表示 t 除 a 的余数(参见文献[2]),显然

$$R_t(a)=R_t(b)\Leftrightarrow t\mid a-b$$

定义 若存在 $T\in\mathbf{N}^*$,使对于任意的正整数 $n\geqslant\alpha$,有 $R_t(a^{n+T})=R_t(a^n)$,则 T 叫做数列 $\{R_t(a^n)\}_{n\geqslant\alpha}$ 的一个周期.

定理1 设 $t=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*$),$\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i\}=\alpha$,$s=\varphi(t)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$,则当 $a\in\mathbf{Z}$ 时,$t\mid a^\alpha(a^s-1)$.进而有 $n\geqslant\alpha$ 时,$R_t(a^{n+s})=R_t(a^n)$,s 是 $\{R_t(a^n)\}_{n\geqslant\alpha}$ 的一个周期,这个周期 s 只与 t 有关,与 a 无关,$s\leqslant t-1$.

证明 由欧拉定理[3],得

当 $p_i\nmid a$ 时,$p_i^{\alpha_i}\mid a^{p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}-1$;当 $p_i\mid a$ 时,$p_i^{\alpha_i}\mid a^\alpha$.

所以对于任意的整数 a,$p_i^{\alpha_i}\mid a^\alpha(a^{p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}-1)$.

所以 $p_i^{\alpha_i} \mid a^{\alpha}(a^{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}-1)$，$p_i^{\alpha_i} \mid a^{\alpha}(a^s-1)$.

因为 $p_i^{\alpha_i}(i=1,\cdots,k)$ 表示的数两两互素，所以 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \mid a^{\alpha}(a^s-1)$，即 $t \mid a^{\alpha}(a^s-1)$.

由 $t \mid a^{\alpha}(a^s-1)$，$n \geqslant \alpha$，得 $t \mid a^{n+s}-a^n$，$R_t(a^{n+s})=R_t(a^n)$.

显然 $s=\varphi(t)<t$，所以 $s \leqslant t-1$.

由定理1，可得求 $R_t(a^n)$（t,a,n 是已知数）的一般步骤：

第一步，求 $R_t(a)=a_0$，得 $R_t(a^n)=R_t(a_0^n)$；

第二步，求出 $\{R_t(a_0^n)\}_{n\geqslant\alpha}$ 的一个周期 T（可选 $T=\varphi(t)$）；

第三步，设 $n=Tq+r$（$q\in\mathbf{N}$，$r\geqslant\alpha$，使 r 尽可能小），则

$$R_t(a^n)=R_t(a_0^n)=R_t(a_0^r)$$

注 (1) 当 $n<\alpha$ 时，可直接求 $R_t(a_0^n)$；

(2) 运用以下定理2,3,4，有时可使计算更简便.

定理2 $R_{td}(ad)=dR_t(a)$（$t,d\in\mathbf{N}^*$，$a\in\mathbf{Z}$）.

证明 设 $a=tq+r$，$0\leqslant r<t$，则 $R_t(a)=r$. 所以 $ad=tdq+dr$，$0\leqslant dr<td$，所以

$$R_{td}(ad)=dr=dR_t(a)$$

定理3 $R_t(ab)=R_t(R_t(a)R_t(b))$.

证明 由 $a\equiv R_t(a)$，$b\equiv R_t(b) \pmod t$，得 $ab\equiv R_t(a)R_t(b) \pmod t$，$t \mid ab-R_t(a)R_t(b)$，所以 $R_t(ab)=R_t(R_t(a)R_t(b))$.

定理4 若 $t\nmid a$，$a\in\mathbf{Z}$，则 $R_t(-a)=t-R_t(a)$.

证明 设 $a=tq+r$（$0<r<t$），则 $-a=t(q-1)+(t-r)$（$0<t-r<t$），所以

$$R_t(a)+R_t(-a)=r+(t-r)=t$$

例 求 $R_{240}((-40)^{1\,997})$.

解 由定理2，得 $R_{240}(40^{1\,997})=40R_6(40^{1\,996})=40R_6(4^{1\,996})=40R_6(2^{3\,992})=80R_3(2^{3\,991})$.

因为 $\{R_3(2^n)\}_{n\geqslant1}$ 有周期 $T=2$（最小周期），$3\,991\equiv1 \pmod 2$，所以 $R_3(2^{3\,991})=R_3(2^1)=2$.

所以 $R_{240}(40^{1\,997})=80\times2=160$，又由定理4，得

$$R_{240}((-40)^{1\,997})=240-160=80$$

参考文献

[1] 赵东方.求 $a^n \div b$ 的余数[J].数学通讯,1994(6):37-38.
[2] 甘志国.余数另外的意义[J].数学通讯,1995(7):23.
[3] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.

浅探循环节长度对应的素数

循环小数第一个循环节的数字个数叫做这个循环小数的循环节长度，也叫做与这个循环小数相等的分数的循环节长度．若 $p(p\neq 2,5)$ 是素数，$\frac{1}{p}$ 的循环节长度是 n，就称 p 是 n 按循环节长度对应的一个素数，也可简称 p 是 n 对应的素数，本文用 $\Delta(n)$ 表示 n 按循环节长度对应的素数的个数．

文献[1]研究了循环节长度对应的素数，并问每个正整数 n 是否对应至少一个素数，即问是否恒有 $\Delta(n)\geqslant 1(n\in\mathbf{N}^*)$．笔者通过研究，得到了关于此的部分结论．

定理 1 n 对应的素数 p 都是 10^n-1 的因子．

证明 由文献[1]的定理 5 可得．

由定理 1 可计算出 $\Delta(n)$ 的前 10 个值．

n	n 对应的素数	$\Delta(n)$	n	n 对应的素数	$\Delta(n)$
1	3	1	6	7，13	2
2	11	1	7	239，4 649	2
3	37	1	8	73，137	2
4	101	1	9	333 667	1
5	41，271	2	10	9 091	1

由分数与纯循环小数互化的方法，可知以下引理成立：

引理 1 若 $a,m\in\mathbf{N}^*,m>1,m\mid 10^a-1$，则 $\frac{1}{m}$ 的循环节长度 t 是 a 的因子．

引理 2 若 $m\in\mathbf{N}^*,m>1,(m,10)=1,\frac{1}{m}$ 的循环节长度是 t，则 $m\mid 10^t-1$．

定理 2 若 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$（$q_i$ 是互不相同的素数，$\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,k$），则素数 p 是 n 对应的素数的充要条件是 $p\mid 10^n-1$ 且 $p\nmid 10^{n/q_i}-1(i=1,\cdots,k)$．

证明 **充分性** 因为 $p\mid 10^n-1$，所以由引理 1，得 $\frac{1}{p}$ 的循环节长度 t 是

n 的因子,所以 $t = \frac{n}{q_i}(i = 1,\cdots,k)$ 的因子,或 n.

假设 $t = \frac{n}{q_i}(i = 1,\cdots,k)$ 的因子,由引理2,得 $p \mid 10^{n/q_i} - 1$,这与题设矛盾!所以 $t = n$,即 p 是 n 对应的素数.

必要性 p 是 n 对应的素数,即 $\frac{1}{p}$ 的循环节长度是 n,由引理2,得 $p \mid 10^n - 1$.

假设 $p \mid 10^{n/q_i} - 1(i = 1,2,\cdots,或\ k)$,由引理1,得 t 是 $\frac{n}{q_i}$ 的因子,所以 $t < n$,与 $t = n$ 矛盾!得 $p \nmid 10^{n/q_i} - 1(i = 1,\cdots,k)$.

定理3 若 $n = q^\alpha$(q 是素数,$\alpha \in \mathbf{N}^*$),则

(1)n 对应的素数是 $\frac{10^n - 1}{10^{n/q} - 1}$ 的除3以外的全部素因子;

(2)$\Delta(n) \geqslant 1$.

证明 (1)$10^n - 1 = (10^{n/q} - 1) \cdot \frac{10^n - 1}{10^{n/q} - 1}$ ①

设 p 是 n 对应的素数,由定理2,得 $p \mid 10^n - 1, p \nmid 10^{n/q} - 1$,所以 $p \mid \frac{10^n - 1}{10^{n/q} - 1}$.因为素数3对应的正整数 $n = 1$,所以 $p \neq 3$.

设 $p(p \neq 3)$ 是 $\frac{10^n - 1}{10^{n/q} - 1}$ 的任一素因子,得

$$\left(10^{n/q} - 1, \frac{10^n - 1}{10^{n/q} - 1}\right) = \left(10^{n/q} - 1, 10^{(q-1)\cdot n/q} + \cdots + 10^{n/q} + 1\right) = \left(10^{n/q} - 1, q\right) \quad ②$$

当 $q = 3$ 时,$\left(10^{n/q} - 1, \frac{10^n - 1}{10^{n/q} - 1}\right) = 3$ ③

当 $q \neq 3, \alpha = 1$ 时,$\left(10^{n/q} - 1, \frac{10^n - 1}{10^{n/q} - 1}\right) = (9, q) = 1$ ④

当 $q \neq 3, \alpha \geqslant 2$ 时,由 $q \mid 10^{q-1} - 1$(Fermat 小定理),得 $q \mid 10^{q^{\alpha-1}-1} - 1$,即 $q \mid 10^{n/q-1} - 1, q \mid 10^{n/q} - 10$,可得 $q \nmid 10^{n/q} - 1$,所以

$$\left(10^{n/q} - 1, \frac{10^n - 1}{10^{n/q} - 1}\right) = \left(10^{n/q} - 1, q\right) = 1 \quad ⑤$$

由②,③,④,⑤,得 $p \nmid 10^{n/q} - 1$.由①,②得 $p \mid 10^n - 1$,所以由定理2,得 p 是 n 对应的素数.

(2) 只需证明 $\frac{10^n - 1}{10^{n/q} - 1}$ 有除3以外的素因子.

$\dfrac{10^n-1}{10^{n/q}-1}=10^{(q-1)\cdot n/q}+\cdots+10^{n/q}+1$ 的各位数字之和是 q.

当 $q=3$ 时，$9\nmid\dfrac{10^n-1}{10^{n/q}-1}$，所以 $\dfrac{10^n-1}{10^{n/q}-1}$ 有除3以外的素因子；当 $q\neq 3$ 时，$3\nmid\dfrac{10^n-1}{10^{n/q}-1}$，所以 $\dfrac{10^n-1}{10^{n/q}-1}$ 也有除3以外的素因子.

定理4 若 $n=2^\alpha q^\beta$（q 是奇素数，$\alpha,\beta\in\mathbf{N}^*$），则

(1) n 对应的素数是 $\dfrac{10^{n/2}+1}{10^{n/2q}+1}$ 的全部素因子；

(2) $\Delta(n)\geqslant 1$.

证明 (1) 设 p 是 n 对应的素数，由定理2，得

$$p\mid 10^n-1,p\nmid 10^{n/2}-1,p\nmid 10^{n/q}-1$$

所以 $p\mid 10^{n/q}-1,p\nmid 10^{n/2q}+1$.

所以 $p\mid\dfrac{10^{n/2}+1}{10^{n/2q}+1}$，即 p 是 $\dfrac{10^{n/2}+1}{10^{n/2q}+1}$ 的素因子.

若 p 是 $\dfrac{10^{n/2}+1}{10^{n/2q}+1}$ 的素因子，得 $p\mid 10^{n/2}+1$

所以
$$p\mid 10^n-1,p\nmid 10^{n/2}-1$$

因为 $\left(\dfrac{10^{n/2}+1}{10^{n/2q}+1},10^{n/2q}+1\right)=(10^{(q-1)\cdot n/2q}+\cdots+10^{n/2q}+1,10^{n/2q}+1)=(1,10^{n/2q}+1)=1$

又因为 $p\mid\dfrac{10^{n/2}+1}{10^{n/2q}+1}$，所以 $p\nmid 10^{n/2q}+1$

因为 $p\nmid 10^{n/2}-1$，所以 $p\nmid 10^{n/2q}-1$

所以 $p\nmid 10^{n/q}-1$，由定理2，得 p 是 n 对应的素数.

(2) 显然成立.

定理5 设 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$（$q_i$ 是互不相同的素数，$\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,k$），$[10^{n/q_1}-1,\cdots,10^{n/q_k}-1]=a$.

(1) 若 p 是 n 对应的素数，则 $p\left|\dfrac{10^n-1}{a}\right.$；

(2) 若 p 是 $\dfrac{10^n-1}{a}$ 的素因子，且 $p\nmid a$，则 p 是 n 对应的素数；

(3) 若(2)中的 p 存在，则 $\Delta(n)\geqslant 1$.

证明 (1) 由定理2，得

$$p\mid 10^n-1,p\nmid 10^{n/q_i}-1\quad(i=1,\cdots,k)$$

所以 $p\left|\dfrac{10^n-1}{a}\cdot a\right.,p\nmid a$.

可证$\frac{10^n-1}{a}$是整数(10^n-1是$10^{n/q_i}-1(i=1,\cdots,k)$)的倍数,所以是它们的公倍数,也是它们的最小公倍数的倍数),所以$p\left|\frac{10^n-1}{a}\right.$.

(2) 因为$p\left|\frac{10^n-1}{a}\right.$,所以$p\mid 10^n-1$.

因为$p\nmid a$,所以$p\nmid 10^{n/q_i}-1(i=1,\cdots,k)$.

由定理1知,(2)成立.

(3) 是显然的.

定理6 设$2n=2^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$($q_i$是互不相同的奇素数,$\alpha,\alpha_i\in\mathbf{N}^*$,$i=1,\cdots,k$),$[10^{n/q_1}+1,\cdots,10^{n/q_k}+1]=b$

(1) 若p是$2n$对应的素数,则$p\left|\frac{10^n+1}{b}\right.$;

(2) 若p是$\frac{10^n+1}{b}$的素因子,且$p\nmid b$,则p是$2n$对应的素数;

(3) 若(2)中的p存在,则$\Delta(2n)\geqslant 1$.

证明 (1) 由定理2,得

$$p\mid 10^{2n}-1,p\nmid 10^n-1,p\nmid 10^{2n/q_i}-1(i=1,\cdots,k)$$

所以$p\mid 10^n+1,p\nmid 10^{n/q_i}-1,p\nmid 10^{n/q_i}+1(i=1,\cdots,k)$

所以$p\mid 10^n+1,p\nmid b$,得$p\left|\frac{10^n+1}{b}\right.$.

(2) 因为$p\mid 10^n+1$,所以$p\nmid 10^n-1$,所以$p\nmid 10^{n/q_i}-1(i=1,\cdots,k)$,又$p\nmid 10^{n/q_i}+1$(因为$p\nmid b$),所以$p\nmid 10^{2n/q_i}-1$.

由$p\left|\frac{10^n+1}{b}\right.$,得$p\mid 10^{2n}-1$.

由定理2知,p是$2n$对应的素数.

(3) 是显然的.

定理5(3)及定理6(3)给出了文献[1]问题的解答思路.

参考文献

[1] 宋八全.素数的判别与分类[J].数学通讯,1995(5):37-38.

Fibonacci 数的一条整除性质

1 缘起

第 29 届 IMO 备选题 45 是由爱尔兰提供的:

设 $g(n)$ 定义如下:$g(1)=0, g(2)=1, g(n+2)=g(n)+g(n+1)+1(n \geqslant 1)$.证明:若 n 为大于 5 的素数,则 $n \mid g(n)(g(n)+1)$.

1989 年第 6 期《数学通讯》第 37 ~ 38 页给出了该题的解答.由此解答,可得以下几个结论,我们写成引理.

引理 1 $f(n)=g(n)+1=F_{n+1}$,其中 F_n 叫做 Fibonacci 数,定义为:$F_1=F_2=1, F_{n+2}=F_n+F_{n+1}(n \in \mathbf{Z})$(通常的定义是 $n \in \mathbf{N}^*$ 的情形),有 $F_{-n}=(-1)^{n+1}F_n(n \in \mathbf{Z})$(见文献[1]).

引理 2 奇素数 $n \neq 5$ 时,$n \mid 2^nF_{n+1}-(5^{\frac{n-1}{2}}+1)$.

(因为原解答中得到:奇素数 $n>5$ 时,$2^nf(n) \equiv 5^{\frac{n-1}{2}}+1 \pmod n$,而 $n=3$ 时可直接验证成立.)

可把上述备选题改述为 Fibonacci 数 F_n 的一条整除性质:

引理 3 奇素数 $n \neq 5$ 时,$n \mid F_{n+1}(F_{n+1}-1)$.

从而可得 $n \mid F_{n+1}$,或 $n \mid F_{n+1}-1$,它们分别在何时成立呢?本文将作些研究.

2 Fibonacci 数的一条整除性质

定理 1 素数 n 的个位数字是 2,3,或 7 时,$n \mid F_k+F_{n+k+1}(k \in \mathbf{Z})$.

完成定理 1 的证明,还需几条引理.

引理 4 (1) 当 $2^\alpha \| x^2-5$ 时(指 $2^\alpha \mid x^2-5$,且 $2^{\alpha+1} \nmid x^2-5, \alpha \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N}^*$),$\alpha=0$ 或 2;

(2) 当 $5^\beta \| x^2-5$ 时,$\beta=0$ 或 1.

证明 (1) 当 $2 \mid x$ 时,$\alpha=0$.

当 $2 \nmid x$ 时,设 $x=2y-1(y \in \mathbf{N}^*)$,$x^2-5=4[y(y-1)-1]$,有 $\alpha=2$.

(2) 当 $5 \nmid x$ 时,$\beta=0$;当 $5 \mid x$ 时,$\beta=1$.

引理 5 若素数 n 的个位数字是 3 或 7,$x \in \mathbf{N}^*$,则 $n \nmid x^2-5$.

证明 可设奇素数 $n=5m \pm 2(m \in \mathbf{N}^*)$,设 $\{p_u\}_{u \geqslant 1}$ 是一列所有从小到大的 $5m \pm 2$ 形奇素数,我们对 u 用数学归纳法证明:当 $x \in \mathbf{N}^*$ 时,$p_u \nmid x^2-5$.

$p_1 = 3$,容易验证 $u = 1$ 时成立.

假设 $u < k$ 时成立:当 $x \in \mathbf{N}^*$ 时,$p_i \nmid x^2 - 5(i = 1,\cdots,k-1)$ ①

下证当 $x \in \mathbf{N}^*$ 时,$p_k \nmid x^2 - 5$.

若存在 $x \in \mathbf{N}^*$,使 $p_k \mid x^2 - 5$,则存在 $x = 0,1,\cdots$,或$\frac{p_k - 1}{2}$,使 $p_k \mid x^2 - 5$ ②

由 $p_k \mid x^2 - 5$,得 $x^2 - 5 > 0$(即 $x \neq 0,1,2$) ③

此时 $x^2 - 5 < p_k^2$,$\frac{x^2-5}{p_k} < p_k$(由 ② 知 $\frac{x^2-5}{p_k} \in \mathbf{N}^*$),所以 $p_i \nmid \frac{x^2-5}{p_k}(i \geqslant k)$,又由 ① 有 $p_i \nmid \frac{x^2-5}{p_k}(i \in \mathbf{N}^*)$ ④

所有的素数为 2,5,$5m \pm 1$,或 $5m \pm 2$ 形,又由引理 4,及 ③,④,可设

$\frac{x^2-5}{p_k} = 2^\alpha 5^\beta \prod_{i=1}^{l}(5m_i \pm 1)$(其中 $\alpha = 0$ 或 2,$\beta = 0$ 或 1,$l \in \mathbf{N}^*$,$m_i \in \mathbf{N}$) $= 5^\beta \prod_{i=1}^{l+1}(5m_i \pm 1)(5m_{l+1} \pm 1 = 1$ 或 $4)$.

(1) 当 $\beta = 0$ 时,$\frac{x^2-5}{p_k}$ 是 $5m \pm 1$ 数,由 p_k 是 $5m \pm 2$ 形数,得 $x^2 - 5 = 5m \pm 2$ 形数,$5 \mid x^2 \pm 2$,x^2 的个位数字是 2,3,7 或 8,这不可能!

(2) 当 $\beta = 1$ 时,有 $5 \mid x$,设 $x = 5y$,得$\frac{x^2-5}{5p_k} = \frac{5y^2-1}{p_k} = \prod_{i=1}^{l+1}(5m_i \pm 1)$ 是 $5m \pm 1$ 形数,所以 $5y^2 - 1$ 是 $5m \pm 2$ 形数,这不可能!

所以 $u = k$ 时成立.引理 5 成立.

引理 6 素数 n 的个位数字是 3 或 7 时,$n \mid 5^{\frac{n-1}{2}} + 1$.

证明 由引理 5 知,5 为模 n 的二次非剩余,所以 $n \mid 5^{\frac{n-1}{2}} + 1$(参见初等数论中的有关定义、定理,比如文献[2]).

引理 7 若 n 是奇素数,$k \in \mathbf{Z}$,则

(1) 当 $n \mid 5^{\frac{p-1}{2}} - 1$ 时,$n \mid F_k - F_{n+k-1}$;

(2) 当 $n \mid 5^{\frac{p-1}{2}} + 1$ 时,$n \mid F_k + F_{n+k+1}$.

引理 7 即注释① 定理 1 的特例.

定理 1 的证明 当素数 n 的个位数字是 2,即 $n = 2$ 时,可以验证此时结论成立.

---

① 甘志国.二阶递归数列的一条同余性质 // 傅海伦.中国教育优秀论文集.天津:天津社会科学院出版社,1998.

当素数 n 的个位数字是 3 或 7 时，由引理 6,7(2) 知，此时结论也成立.

定理 1 中 $k=0$ 时的情形，即

推论 素数 n 的个位数字是 2,3 或 7 时，$n \mid F_{n+1}$.

推论给出了引理 3 的一种具体情形，对于剩下的情形，笔者提出

猜测 素数 n 的个位数字是 1 或 9 时，$n \mid F_{n+1}-1$.

3 猜测的研究

定理 2 素数 n 的个位数字是 1 或 9 时，以下六个命题等价：

(1) $n \mid F_{n+1}-1$（即猜测成立）；

(2) $n \nmid F_{n+1}$；

(3) 存在 $x \in \mathbf{N}^*$，使 $n \mid x^2-5$；

(4) $n \mid 5^{\frac{n-1}{2}}-1$；

(5) $n \nmid 5^{\frac{n-1}{2}}+1$；

(6) $n \mid F_k - F_{n+k-1} (k \in \mathbf{Z})$.

证明 只证(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1)；(4)⇔(5)；(1)⇔(6).

(1)⇒(2)(引理 3)⇒(3)(反证法：假设当 $x \in \mathbf{N}^*$ 时，$n \nmid x^2-5$，则 5 为模 n 的二次非剩余，所以 $n \mid 5^{\frac{n-1}{2}}+1$[2]，由引理 2，得 $n \mid F_{n+1}$，这与(2)矛盾！)⇒(4)(5 为模 n 的二次剩余，所以(4)成立[2])⇒(1)(由引理 2，得 $n \mid 2^nF_{n+1}-2$，又 $n \mid 2^n-2$，所以(1)成立).

由 Fermat 小定理，得奇素数 $n \mid (5^{\frac{n-1}{2}}+1)(5^{\frac{n-1}{2}}-1)$，又 $(5^{\frac{n-1}{2}}+1, 5^{\frac{n-1}{2}}-1)=2$，从而可得(4)⇔(5).

若(1)成立，得(4)成立，由引理 7(1)，得(6)成立.

在(6)中取 $k=2$ 或 $n+1$，即得(1)，所以(1)⇔(6).

定理 2 说明：要证明猜测成立，可证(1)～(5)之一；若猜测成立，则(6)成立，这是同定理 1 的一条关于 Fibonacci 数的整除性质，这也说明解决猜测的意义重大.

$n=5$ 的情形，有以下结论(读者可用数学归纳法证明)：

定理 3 $5 \mid F_k + 2F_{k-5} (k \in \mathbf{Z})$.

参考文献

[1] 陈计. 广义斐波那契数列简介. 数学通讯，1994(12)：24-25.

[2] 现代工程数学手册编委会. 现代工程数学手册(Ⅲ)[M]. 武汉：华中工学院出版社，1988.

$\{R_k(a^n)\}$ 的一个周期

本文用 $R_k(M)$ 表示正整数 M 的末 k 位数，如

$$R_2(2^{10}) = R_2(1\,024) = 24, R_3(2^{10}) = 24$$

显然，$R_k(M_1) = R_k(M_2)$ 的充要条件是 $10^k \mid M_1 - M_2$.

定理 设 $a,k,l,n \in \mathbf{N}^*$，则

1) $R_1(a^{4l+n}) = R_1(a^n)$;

2) $R_2(a^{20l+n}) = R_2(a^n)(n \geqslant 2)$;

3) $R_k(a^{l\cdot 10^{k-1}+n}) = R_k(a^n)(n \geqslant k \geqslant 3)$.

证明 设 φ 是 Euler 函数[1]，则 $\varphi(2^k) = 2^{k-1}, \varphi(5^k) = 4\cdot 5^{k-1}$. 由 Euler 定理[1]，得

当 $(2,a) = 1$ 时，$2^k \mid a^{2^{k-1}} - 1$,

所以对于任意的 a，$2^k \mid a^k(a^{2^{k-1}} - 1)$,

所以当 $n \geqslant k$ 时，$2^k \mid a^n(a^{l[2^{k-1},4\cdot 5^{k-1}]} - 1)$.

当 $(5,a) = 1$ 时，$5^k \mid a^{4\cdot 5^{k-1}} - 1$,

所以对于任意的 a，$5^k \mid a^k(a^{4\cdot 5^{k-1}} - 1)$,

所以当 $n \geqslant k$ 时，$5^k \mid a^n(a^{l[2^{k-1},4\cdot 5^{k-1}]} - 1)$.

所以 $10^k \mid a^n(a^{l[2^{k-1},4\cdot 5^{k-1}]} - 1)$.

(1) 当 $k = 1$ 时，得 $10 \mid a^n(a^{4l} - 1)$，$10 \mid a^{4l+n} - a^n$，所以 $R_1(a^{4l+n}) = R_1(a^n)$.

(2) 当 $k = 2$ 时，得 $10^2 \mid a^{20l+n} - a^n$，所以 $R_2(a^{20l+n}) = R_2(a^n)$.

(3) 当 $k \geqslant 3$ 时，得 $10^k \mid a^{l\cdot 10^{k-1}+n} - a^n$，所以 $R_k(a^{l\cdot 10^{k-1}+n}) = R_k(a^n)$.

参考文献

[1] 魏万迪. 整数入门[M]. 成都:四川教育出版社,1988.

$\{R_t(n^m)\}$ 的周期性

文献[1]用 $R_t(M)$ 表示正整数 t 除正整数 M 的非负最小余数，本文研究数列 $\{R_t(n^m)\}$ 的周期性.

显然，以下结论成立：

设 $A,B\in\mathbf{N}^*$，$A\equiv B(\bmod\ t)$，则 $R_t(A)=R_t(B)$.

定理 1 设 t 的标准分解式为 $t=\prod\limits_{i=1}^{h}p_i^{\alpha_i}$（$p_i$ 是互不相同的素数，$\alpha_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1,\cdots,h$），$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant h}\{\alpha_i\}=\alpha$，$s=\prod\limits_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，$k,l\in\mathbf{N}$，$m\geqslant\alpha$，则

$$R_t((n+tk)^{m+sl})=R_t(n^m)$$

证明 由 Euler 定理[2]，得

当 $p_i\nmid n$ 时，$p_i^{\alpha_i}\mid n^{p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}-1$；

当 $p_i\mid n$ 时，$p_i^{\alpha_i}\mid n^{\alpha}$.

所以 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$p_i^{\alpha_i}\mid n^{\alpha}(n^{p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}-1)$.

得 $p_i^{\alpha_i}\mid n^{\alpha}(n^s-1)$，$p_i^{\alpha_i}\mid n^m(n^{sl}-1)$，$\prod\limits_{i=1}^{h}p_i^{\alpha_i}\mid n^m(n^{sl}-1)$，即 $t\mid n^{m+sl}-n^m$，得 $t\mid(n+tk)^{m+sl}-n^m$.

即
$$(n+tk)^{m+sl}\equiv n^m(\bmod\ t)$$

所以
$$R_t((n+tk)^{m+sl})=R_t(n^m).$$

由定理 1，得

定理 2 （以下各字线的意义同定理 1）

(1) 数列 $\{a_n=R_t(n^m)\}$ 是以 t 为一个周期的周期数列；

(2) 数列 $\{b_m=R_t(n^m)\}_{m\geqslant\alpha}$ 是以 s 为一个周期的周期数列.

参考文献

[1] 甘志国.余数的另外意义[J].数学通讯，1995(7):23.

[2] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社，1988.

关于 $\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)个0}1$ 及 $\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)个0}2$ 的 K 变换

关于 K 变换的定义及其有关概念,读者可参见文献[1].为了书写方便,本文把 $\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)个0}1$ 写成 $0_{n-1}1$,其余的类推.

定理 1　若 $t\in\mathbf{N}^*$,$n\geqslant 6\cdot2^t+2$,则 $0_{n-1}1$ 经过 $4+t$ 步 k 变换,得 $98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}09_{n-6\cdot2^t-2}8_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$.

证明　$0_{n-1}1\to09_{n-1}\to89_{n-2}1\to809_{n-4}82\to97109_{n-8}8821\to98872109_{n-14}8872111\to\cdots\to98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}09_{n-6\cdot2^t-2}8_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$.

定理 2　(1) 当 $t\geqslant3$ 时,$0_{6\cdot2^t+1}1$ 经过 $11+t$ 步 k 变换得到三个点的黑洞;

(2) 当 $t\geqslant2$ 时,$0_{6\cdot2^t+2}1$ 经过 $11+t$ 步 k 变换得到三个点的黑洞;

(3) 当 $t\geqslant3$ 时,$0_{6\cdot2^t+3}1$ 经过 $14+t$ 步 k 变换得到三个点的黑洞;

(4) 当 $t\geqslant3$ 时,$3\leqslant r\leqslant2^{t-1}$ 时,$0_{6\cdot2^t+r+1}1$ 经过 $8+t$ 步 k 变换得到三个点的黑洞.

证明　设 $n=6\cdot2^t+r+2$,$r\in\mathbf{N}$,$t\in\mathbf{N}^*$,由定理 1,得

$0_{6\cdot2^t+r+1}1$ 经过 $4+t$ 步 k 变换,得 $98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}09_r8_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$.

又由以下证明,可知定理 2 成立.

(1)$98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}08_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$

$\to97_{2^{t+1}}5_{2^t-1}4_{2^t+1}2_{2^{t+1}}1$

$\to85_{2^{t+1}}1_{2^t-2}0998_{2^t-1}4_{2^{t+1}}2$

$\to987_{2^t-3}6441_{2^{t+1}-3}0998_{2^{t+1}-2}5532_{2^t-3}11$

$\to9887_{2^{t+1}-3}665_{2^t-5}431997654_{2^t-5}332_{2^{t+1}}-3111$

$\to888765_{2^{t+1}-4}443221_{2^t-7}0998_{2^t-6}776554_{2^{t+1}-4}32112$

$\to987_{2^t-6}666544221_{2^{t+1}-5}0998_{2^{t+1}-4}775543332_{2^t-6}11$

$\to9887_{2^{t+1}-5}665_{2^t-6}443220998776554_{2^t-6}332_{2^{t+1}-5}111$

$\to9897665_{2^{t+1}-5}443221_{2^t-7}0998_{2^t-6}776554_{2^{t+1}-5}332111$

$\to9887_{2^t-6}665443221_{2^{t+1}-6}0998_{2^{t+1}-5}776554332_{2^t-6}111$

$\to9887_{2^{t+1}-5}665_{2^t-6}443220998776554_{2^t-6}332_{2^{t+1}-5}111$

$\to\cdots$

(2)$98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}098_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^t-1}1_{2^t+1}$

$\to 987_{2^{t+1}-1}65_{2^t-2}494_{2^t-1}32_{2^{t+1}-1}11$

$\to 8865_{2^{t+1}-2}421_{2^t-3}098_{2^t-2}754_{2^{t+1}-2}312$

$\to 97_{2^t-2}66421_{2^{t+1}-3}098_{2^{t+1}-2}75332_{2^t-2}1$

$\to 987_{2^{t+1}-3}65_{2^t-2}43197654_{2^t-2}32_{2^{t+1}-3}11$

$\to 8875_{2^{t+1}-3}4321_{2^t-3}098_{2^t-2}7654_{2^{t+1}-3}212$

$\to 97_{2^t-2}665421_{2^{t+1}-4}098_{2^{t+1}-3}754332_{2^t-2}1$

$\to 987_{2^{t+1}-4}65_{2^t-2}43209876 54_{2^t-2}32_{2^{t+1}-4}11$

$\to 98765_{2^{t+1}-4}4321_{2^t-3}098_{2^t-2}7654_{2^{t+1}-4}3211$

$\to 987_{2^t-2}654321_{2^{t+1}-5}098_{2^{t+1}-4}765432_{2^t-2}11$

$\to 987_{2^{t+1}-4}65_{2^t-2}4320987654_{2^t-2}32_{2^{t+1}-4}11$

$\to \cdots$

(3)$98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}0998_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$

$\to 9887_{2^{t+1}-2}665_{2^t-3}4994_{2^t-2}332_{2^{t+1}-2}111$

$\to 888665_{2^{t+1}-4}44221_{2^t-4}08_{2^t-3}77554_{2^{t+1}-4}33112$

$\to 87_{2^t-2}655331_{2^{t+1}-3}08_{2^{t+1}-2}664432_{2^t-1}$

$\to 87_{2^{t+1}-3}65_{2^t-2}33310886664_{2^t-2}32_{2^{t+1}-2}$

$\to 8765_{2^{t+1}-3}3_41_{2^t-3}08_{2^t-2}6_44_{2^{t+1}-3}322$

$\to 87_{2^t-3}653_51_{2^{t+1}-4}08_{2^{t+1}-3}6_5432_{2^t-2}$

$\to 87_{2^{t+1}-4}65_{2^t-3}3_6086_64_{2^t-3}32_{2^{t+1}-3}$

$\to 865_{2^{t+1}-4}3_71_{2^t-4}08_{2^t-3}6_74_{2^{t+1}-4}32$

$\to 87_{2^t-4}63_81_{2^{t+1}-5}08_{2^{t+1}-4}6_832_{2^t-3}$

$\to 87_{2^{t+1}-5}65_{2^t-4}3_826_94_{2^t-4}32_{2^{t+1}-4}$

$\to 65_{2^{t+1}-5}43_91_{2^t-5}08_{2^t-4}6_954_{2^{t+1}-4}$

$\to 87_{2^t-5}3_921_{2^{t+1}-5}08_{2^{t+1}-4}76_92_{2^t-4}$

$\to 87_{2^{t+1}-5}65_{2^t-4}3_826_94_{2^t-4}32_{2^{t+1}-4}$

$\to \cdots$

(4)$98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}09_r8_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$

$\to 98_r7_{2^{t+1}-r}6_r5_{2^t-r-1}49_r4_{2^t-r}3_r2_{2^{t+1}-r}1_{r+1}$

$\to 8_{r+1}6_r5_{2^{t+1}-2r}4_r2_r1_{2^t-2r}09_{r-2}8_{2^t-2r+1}7_r5_r4_{2^{t+1}-2r}3_r1_r2$

$\to 98_{r-3}7_{2^t-2r+3}6_{r-1}554_{r-2}332_{r-2}1_{2^{t+1}-2r+1}09_{r-2}8_{2^{t+1}-2r+2}7_{r-2}665_{r-2}443_{r-1}$
$2_{2^t-2r+3}1_{r-2}$

$\to 98_{r-2}7_{2^{t+1}-2r+1}6_{r-2}5_{2^t-2r+3}4_{r-2}3332_{r-2}109_{r-2}887_{r-2}6665_{r-2}4_{2^t-2r+3}$
$3_{r-2}2_{2^{t+1}-2r+1}1_{r-1}$

$\to 98_{r-2}776_{r-2}5_{2^{t+1}-2r+1}4_{r-2}3332_{r-2}1_{2^t-2r+2}09_{r-2}8_{2^t-2r+3}7_{r-2}6665_{r-2}$

$4_{2^{t+1}-2r+1}3_{r-2}221_{r-1}$

$\rightarrow 98_{r-2}7_{2^t-2r+3}6_{r-2}554_{r-2}3332_{r-2}1_{2^{t+1}-2r}09_{r-2}8_{2^{t+1}-2r+1}7_{r-2}6665_{r-2}443_{r-2}$
$2_{2^t-2r+3}1_{r-1}$

$\rightarrow 98_{r-2}7_{2^{t+1}-2r+1}6_{r-2}5_{2^t-2r+3}4_{r-2}3332_{r-2}109_{r-2}887_{r-2}6665_{r-2}4_{2^t-2r+3}3_{r-2}$
$2_{2^{t+1}-2r+1}1_{r-1}$

$\rightarrow \cdots$

定理3 (1) 当$2^{t-1} < r < \dfrac{2^{t+1}}{3}$时,$0_{6\cdot 2^t+r+1}1$经过$8+t$步$k$变换,得到三个点的黑洞;

(2) 当$\dfrac{2^{t+1}}{3} < r \leqslant \dfrac{3}{4}\cdot 2^t$,且$r \leqslant 2^t-2$时$0_{6\cdot 2^t+r+1}1$经过$8+t$步$k$变换,得到三个点的黑洞;

(3) $\dfrac{3}{4}\cdot 2^t < r \leqslant \dfrac{5}{6}\cdot 2^t$,且$r \leqslant 2^t-2$时,$0_{6\cdot 2^t+r+1}1$经过$11+t$步$k$变换,得到三个点的黑洞.

证明 $0_{6\cdot 2^t+r+1}1$经过$4+t$步k变换,得$98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}09_r8_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$.

(1) 由$2^{t-1} < r < \dfrac{2^{t+1}}{3}$,得$r < 2^t < 2^{t+1}$,$2^{t+1}-3r \geqslant 1$.

$98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}09_r8_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$

$\rightarrow 98_r7_{2^{t+1}-r}6_r5_{2^t-r-1}49_r4_{2^t-r}3_r2_{2^{t+1}-r}1_{r+1}$

$\rightarrow 8_{r+1}6_r5_{2^{t+1}-2r}4_r2_{2^t-r+1}1_{2r-2^t-2}09_{2^{t+1}-3r}8_{2r-2^t-1}7_{2^t-r+1}5_r4_{2^{t+1}-2r}3_r1_r2$

$\rightarrow 98_{2^{t+1}-3r-1}7_{6r-3\cdot 2^t-1}6_{2^{t+1}-3r+1}5_{2r-2^t+1}4_{2^{t+1}-3r}3_{4r-2^{t+1}}2_{2^{t+1}-3r}1_{2r-1}09_{2^{t+1}-3r}8_{2r}$
$7_{2^{t+1}-3r}6_{4r-2^{t+1}}5_{2^{t+1}-3r}4_{2r-2^t+1}3_{2^{t+1}-3r+1}2_{6r-3\cdot 2^t-1}1_{2^{t+1}-3r}$

$\rightarrow 98_{2^{t+1}-3r}7_{2r-1}6_{2^{t+1}-3r}5_{6r-3\cdot 2^t-1}4_{2^{t+1}-3r}3_{4r-2^{t+1}+1}2_{2^{t+1}-3r}1_{2r-2^t}09_{2^{t+1}-3r}8_{2r-2^t+1}$
$7_{2^{t+1}-3r}6_{4r-2^{t+1}+1}5_{2^{t+1}-3r}4_{6r-3\cdot 2^t-1}3_{2^{t+1}-3r}2_{2r-1}1_{2^{t+1}-3r+1}$

$\rightarrow 98_{2^{t+1}-3r}7_{2r-2^t+1}6_{2^{t+1}-3r}5_{2r-1}4_{2^{t+1}-3r}3_{4r-2^{t+1}+1}2_{2^{t+1}-3r}1_{6r-3\cdot 2^t-2}09_{2^{t+1}-3r}8_{6r-3\cdot 2^t-1}$
$7_{2^{t+1}-3r}6_{4r-2^{t+1}+1}5_{2^{t+1}-3r}4_{2r-1}3_{2^{t+1}-3r}2_{2r-2^t+1}1_{2^{t+1}-3r+1}$

$\rightarrow 98_{2^{t+1}-3r}7_{6r-3\cdot 2^t-1}6_{2^{t+1}-3r}5_{2r-2^t+1}4_{2^{t+1}-3r}3_{4r-2^{t+1}+1}2_{2^{t+1}-3r}1_{2r-2}09_{2^{t+1}-3r}8_{2r-1}$
$7_{2^{t+1}-3r}6_{4r-2^{t+1}+1}5_{2^{t+1}-3r}4_{2r-2^t+1}3_{2^{t+1}-3r}2_{6r-3\cdot 2^t-1}1_{2^{t+1}-3r+1}$

$\rightarrow 98_{2^{t+1}-3r}7_{2r-1}6_{2^{t+1}-3r}5_{6r-3\cdot 2^t-1}4_{2^{t+1}-3r}3_{4r-2^{t+1}+1}2_{2^{t+1}-3r}1_{2r-2^t}09_{2^{t+1}-3r}8_{2r-2^t+1}$
$7_{2^{t+1}-3r}6_{4r-2^{t+1}+1}5_{2^{t+1}-3r}4_{6r-3\cdot 2^t-1}3_{2^{t+1}-3r}2_{2r-1}1_{2^{t+1}-3r+1}$

$\rightarrow \cdots$

(2) 由$\dfrac{2^{t+1}}{3} < r \leqslant \dfrac{3}{4}\cdot 2^t$,且$r \leqslant 2^t-2$,得$3r-2^{t+1} \geqslant 1$,$3\cdot 2^t-4r \geqslant 0$.

$98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}09_r8_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$

$\to 98_r7_{2^{t+1}-r}6_r5_{2^t-r-1}49_r4_{2^t-r}3_r2_{2^{t+1}-r}1_{r+1}$

$\to 8_{r+1}6_r5_{2^{t+1}-2r}4_r2_{2^t-r+1}1_{2^t-r-2}09_{3r-2^{t+1}}8_{2^t-r-1}7_{2^t-r+1}5_r4_{2^{t+1}-2r}3_r1_r2$

$\to 98_{3r-2^{t+1}-1}7_{3\cdot 2^t-3r-1}6_{3r-2^{t+1}+1}5_{3\cdot 2^t-4r+1}4_{3r-2^{t+1}}3_{2^{t+1}-2r}2_{3r-2^{t+1}}1_{4\cdot 2^t-4r-1}09_{3r-2^{t+1}}$
$8_{4\cdot 2^t-4r}7_{3r-2^{t+1}}6_{2^{t+1}-2r}5_{3r-2^{t+1}}4_{3\cdot 2^t-4r+1}3_{3r-2^{t+1}+1}2_{3\cdot 2^t-3r-1}1_{3r-2^{t+1}}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}}7_{4\cdot 2^t-4r-1}6_{3r-2^{t+1}}5_{3\cdot 2^t-3r-1}4_{3r-2^{t+1}}3_{2^{t+1}-2r+1}2_{3r-2^{t+1}}1_{3\cdot 2^t-4r}09_{3r-2^{t+1}}$
$8_{3\cdot 2^t-4r+1}7_{3r-2^{t+1}}6_{2^{t+1}-2r+1}5_{3r-2^{t+1}}4_{3\cdot 2^t-3r-1}3_{3r-2^{t+1}}2_{4\cdot 2^t-4r-1}1_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}}7_{3\cdot 2^t-4r+1}6_{3r-2^{t+1}}5_{4\cdot 2^t-4r-1}4_{3r-2^{t+1}}3_{2^{t+1}-2r+1}2_{3r-2^{t+1}}1_{3\cdot 2^t-3r-2}09_{3r-2^{t+1}}$
$8_{3\cdot 2^t-3r-1}7_{3r-2^{t+1}}6_{2^{t+1}-2r+1}5_{3r-2^{t+1}}4_{4\cdot 2^t-4r-1}3_{3r-2^{t+1}}2_{3\cdot 2^t-4r+1}1_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}}7_{3\cdot 2^t-3r-1}6_{3r-2^{t+1}}5_{3\cdot 2^t-4r+1}4_{3r-2^{t+1}}3_{2^{t+1}-2r+1}2_{3r-2^{t+1}}1_{4\cdot 2^t-4r-2}09_{3r-2^{t+1}}$
$8_{4\cdot 2^t-4r-1}7_{3r-2^{t+1}}6_{2^{t+1}-2r+1}5_{3r-2^{t+1}}4_{3\cdot 2^t-4r+1}3_{3r-2^{t+1}}2_{3\cdot 2^t-3r-1}1_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}}7_{4\cdot 2^t-4r-1}6_{3r-2^{t+1}}5_{3\cdot 2^t-3r-1}4_{3r-2^{t+1}}3_{2^{t+1}-2r+1}2_{3r-2^{t+1}}1_{3\cdot 2^t-4r}09_{3r-2^{t+1}}$
$8_{3\cdot 2^t-4r+1}7_{3r-2^{t+1}}6_{2^{t+1}-2r+1}5_{3r-2^{t+1}}4_{3\cdot 2^t-3r-1}3_{3r-2^{t+1}}2_{4\cdot 2^t-4r-1}1_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to \cdots$

(3) 由 $\frac{3}{4}\cdot 2^t < r \leqslant \frac{5}{6}\cdot 2^t$，且 $r \leqslant 2^t-2$，得 $3r-2^{t+1} \geqslant 1$，$4r-3\cdot 2^t \geqslant 2$，$5\cdot 2^t-6r \geqslant 0$.

$98_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t-1}09_r8_{2^t}7_{2^{t-1}}2_{2^{t-1}}1_{2^t+1}$

$\to 98_r7_{2^{t+1}-r}6_r5_{2^t-r-1}49_r4_{2^t-r}3_r2_{2^{t+1}-r}1_{r+1}$

$\to 8_{r+1}6_r5_{2^{t+1}-2r}4_r2_{2^t-r+1}1_{2^t-r-2}09_{3r-2^{t+1}}8_{2^t-r-1}7_{2^t-r+1}5_r4_{2^{t+1}-2r}3_r1_r2$

$\to 98_{3r-2^{t+1}-1}7_{3\cdot 2^t-3r-1}6_{2^t-r+2}5_{4r-3\cdot 2^t-1}4_{2^t-r+1}3_{2^{t+1}-2r}2_{3r-2^{t+1}}1_{4\cdot 2^t-4r-1}09_{3r-2^{t+1}}$
$8_{4\cdot 2^t-4r}7_{3r-2^{t+1}}6_{2^{t+1}-2r}5_{2^t-r+1}4_{4r-3\cdot 2^t-1}3_{2^t-r+2}2_{3\cdot 2^t-3r-1}1_{3r-2^{t+1}}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}}7_{4\cdot 2^t-4r-1}6_{3r-2^{t+1}}5_{3\cdot 2^t-3r-1}4_{3r-2^{t+1}}3_{5\cdot 2^t-6r+2}2_{3r-2^{t+1}-1}19_{3r-2^{t+1}}$
$7_{3r-2^{t+1}}6_{5\cdot 2^t-6r+2}5_{3r-2^{t+1}}4_{3\cdot 2^t-3r-1}3_{3r-2^{t+1}}2_{4\cdot 2^t-4r-1}1_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to 8_{3r-2^{t+1}+1}76_{3r-2^{t+1}-1}5_{4\cdot 2^t-4r-1}4_{3r-2^{t+1}}3_{5\cdot 2^t-6r+2}2_{3r-2^{t+1}}1_{3\cdot 2^t-3r-2}09_{3r-2^{t+1}}$
$8_{3\cdot 2^t-3r-1}7_{3r-2^{t+1}}6_{5\cdot 2^t-6r+2}5_{3r-2^{t+1}}4_{4\cdot 2^t-4r-1}3_{3r-2^{t+1}-1}21_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}-1}7_{3\cdot 2^t-3r}6_{3r-2^{t+1}}54_{3r-2^{t+1}}3_{5\cdot 2^t-6r+1}2_{3r-2^{t+1}}1_{4\cdot 2^t-4r-2}09_{3r-2^{t+1}}8_{4\cdot 2^t-4r-1}$
$7_{3r-2^{t+1}}6_{5\cdot 2^t-6r+1}5_{3r-2^{t+1}}43_{3r-2^{t+1}}2_{3\cdot 2^t-3r}1_{3r-2^{t+1}}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}}7_{4\cdot 2^t-4r-2}6_{3r-2^{t+1}}5_{3\cdot 2^t-3r}4_{3r-2^{t+1}}3_{5\cdot 2^t-6r+1}2_{3r-2^{t+1}}09_{3r-2^{t+1}}$
$87_{3r-2^{t+1}}6_{5\cdot 2^t-6r+1}5_{3r-2^{t+1}}4_{3\cdot 2^t-3r}3_{3r-2^{t+1}}2_{4\cdot 2^t-4r-2}1_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}}76_{3r-2^{t+1}}5_{4\cdot 2^t-4r-2}4_{3r-2^{t+1}}3_{5\cdot 2^t-6r+1}2_{3r-2^{t+1}}1_{3\cdot 2^t-3r-1}09_{3r-2^{t+1}}8_{3\cdot 2^t-3r}$
$7_{3r-2^{t+1}}6_{5\cdot 2^t-6r+1}5_{3r-2^{t+1}}4_{4\cdot 2^t-4r-2}3_{3r-2^{t+1}}21_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}}7_{3\cdot 2^t-3r}6_{3r-2^{t+1}}54_{3r-2^{t+1}}3_{5\cdot 2^t-6r+1}2_{3r-2^{t+1}}1_{4\cdot 2^t-4r-3}09_{3r-2^{t+1}}8_{4\cdot 2^t-4r-2}$
$7_{3r-2^{t+1}}6_{5\cdot 2^t-6r+1}5_{3r-2^{t+1}}43_{3r-2^{t+1}}2_{3\cdot 2^t-3r}1_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to 98_{3r-2^{t+1}}7_{4\cdot 2^t-4r-2}6_{3r-2^{t+1}}5_{3\cdot 2^t-3r}4_{3r-2^{t+1}}3_{5\cdot 2^t-6r+1}2_{3r-2^{t+1}}09_{3r-2^{t+1}}87_{3r-2^{t+1}}$

$6_{5\cdot 2^t-6r+1}5_{3r-2^{t+1}}4_{3\cdot 2^t-3r}3_{3r-2^{t+1}}2_{4\cdot 2^t-4r-2}1_{3r-2^{t+1}+1}$

$\to \cdots$

由定理 3 的证明来看,要想找到 $0_{6\cdot 2^t+r+1}1$ 经过多少步 k 变换才得到黑洞,似乎可以无限进行下去.定理 3 中的 r 是向 2^t 趋近的.还有 $r=2^t-1, 2^t\leqslant r\leqslant 6\cdot 2^t-1$ 的情形,均不知 k 变换的规律.

定理 4 当 $n\geqslant 4$ 时,$k^3(0_{n-1}1)=k^2(0_{n-1}2)$.

证明 $0_{n-1}2\to 19_{n-2}8\to 809_{n-4}82$,所以 $k^2(0_{n-1}2)=809_{n-4}82$.

由定理 1 的证明知,$k^3(0_{n-1}1)=809_{n-4}82$.

所以 $k^3(0_{n-1}1)=k^2(0_{n-1}2)$.

由定理 4 知,弄清了 $0_{n-1}1$ 的 k 变换,就弄清了 $0_{n-1}2$ 的 k 变换.

定理 5 若 $t\in \mathbf{N}^*, n\geqslant 15\cdot 2^{t+1}+2$,则 $0_{n-1}3$ 经过 $5+t$ 步 k 变换,得 $98_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{2^{t+1}}3_{2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t-1}09_{n-15\cdot 2^{t+1}-2}8_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{2^{t+1}}3_{2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t+1}$.

证明 $0_{n-1}3\to 29_{n-2}7\to 719_{n-4}73\to 86219_{n-8}7732\to 877632209_{n-16}87763222\to 97_566332_4109_{n-32}887_466332_51\to 9887_96_43_42_9109_{n-62}887_96_43_42_9111\to\cdots\to 98_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{2^{t+1}}3_{2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t-1}09_{n-15\cdot 2^{t+1}-2}8_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{2^{t+1}}3_{2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t+1}$.

定理 6 $0_{15\cdot 2^{t+1}+1}3$ 经过 $9+t$ 步 k 变换,得到三个点的黑洞.

证明 由定理 5 得,$0_{15\cdot 2^{t+1}+1}3$ 经过 $5+t$ 步 k 变换,得

$98_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{2^{t+1}}3_{2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t-1}08_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{2^{t+1}}3_{2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t+1}$.

再由下面的证明可知定理 6 成立.

$98_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{2^{t+1}}3_{2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t-1}08_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{2^{t+1}}3_{2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t+1}$

$\to 97_{2^{t+1}}5_{9\cdot 2^t}3_{2^{t+2}-1}26_{2^{t+2}}4_{9\cdot 2^t}2_{2^{t+1}}1$

$\to 85_{2^{t+1}}43_{2^{t+2}-1}1_{9\cdot 2^t-1}08_{9\cdot 2^t}6_{2^{t+2}-1}54_{2^{t+1}}2$

$\to 87_{9\cdot 2^t-1}63_{2^{t+2}-1}1_{2^{t+1}}08_{2^{t+1}+1}6_{2^{t+2}-1}32_{9\cdot 2^t}$

$\to 87_{2^{t+1}}65_{9\cdot 2^t-1}3_{2^{t+2}-1}26_{2^{t+2}}4_{9\cdot 2^t-1}32_{2^{t+1}+1}$

$\to 65_{2^{t+1}}43_{2^{t+2}}1_{9\cdot 2^t-2}08_{9\cdot 2^t-1}6_{2^{t+2}}54_{2^{t+1}+1}$

$\to 87_{9\cdot 2^t-2}3_{2^{t+2}}21_{2^{t+1}}08_{2^{t+1}+1}76_{2^{t+2}}2_{9\cdot 2^t-1}$

$\to 87_{2^{t+1}}65_{9\cdot 2^t-1}3_{2^{t+2}-1}26_{2^{t+2}}4_{9\cdot 2^t-1}32_{2^{t+1}+1}$

$\to \cdots$

定理 7 若 $t\in \mathbf{N}^*, n\geqslant 63\cdot 2^{t+1}+2$,则 $0_{n-1}4$ 经过 $7+t$ 步 k 变换,得 $98_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{9\cdot 2^{t+1}}5_{2^{t+3}}4_{2^{t+3}}3_{9\cdot 2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t-1}09_{n-63\cdot 2^{t+1}-2}8_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{9\cdot 2^{t+1}}5_{2^{t+3}}4_{2^{t+3}}3_{9\cdot 2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t+1}$.

证明 $0_{n-1}4\to 39_{n-2}6\to 629_{n-4}64\to 75329_{n-8}6643\to 766543319_{n-16}76654333\to 86_555443_4219_{n-32}776_455443_52\to 8776_95_44_43_92209_{n-64}8776_95_44_43_9222\to$

$$97_{5}6_{18}5_{8}4_{8}3_{18}2_{4}109_{n-128}887_{4}6_{18}5_{8}4_{8}3_{18}2_{5}1 \rightarrow 9987_{9}6_{36}5_{16}4_{16}3_{36}2_{9}109_{n-254}887_{9}6_{36}5_{16}4_{16}3_{36}2_{9}111 \rightarrow \cdots \rightarrow 98_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{9\cdot 2^{t+1}}5_{2^{t+3}}4_{2^{t+3}}3_{9\cdot 2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t-1}09_{n-63\cdot 2^{t+1}-2}8_{2^t}7_{9\cdot 2^{t-1}}6_{9\cdot 2^{t+1}}5_{2^{t+3}}4_{2^{t+3}}3_{9\cdot 2^{t+1}}2_{9\cdot 2^{t-1}}1_{2^t+1}.$$

参考文献

[1] 李鸿祥,张芝兰.数学黑洞问题的图论表示.数学通讯,1995(7):17-20.

$0_n1_n2_{n(3)}$ 的 $K_{3,3n}$ 变换的部分结论

$0_n1_n2_{n(3)}$ 指三进制下的 $3n(n\in\mathbf{N}^*)$ 位数码，头 n 位数码全是0，中间 n 位数码全是1，末 n 位数码全是2. $K_{3,3n}$ 变换的意义见本书中“k 变换的合理定义及 $p=2$ 时 whc 12 的解决”部分，即在三进制下对 $3n$ 位数码的重排求差运算（用最大的 $3n$ 位数码减去最小的 $3n$ 位数码，并把所得的差也写成 $3n$ 位数码）. 本文给出 $0_n1_n2_{n(3)}$ 形数的 $K_{3,3n}$ 变换的部分结论.

约定，下文中的数码均为三进制数，将“$K_{3,3n}$”简记为“K_3”.

定理1 $0_n1_n2_{n(3)}(m,n\in\mathbf{N}^*,n-2^{m+1}+2\in\mathbf{N})$ 经过 $m+1$ 步 K_3 变换，得到 $2_{n-1}1_{2^m-1}02_{n-2^{m+1}+2}1_{2^m}0_{n-2}1$.

（可对 m 用数学归纳法证明）.

在定理1中可选尽可能大的 m，使 $n-2^{m+1}+2$ 为最小的自然数，即为 $0,1,2,\cdots$，或 $2^{m+1}-1$.

定理2 $2_{2^{m+1}-3}1_{2^m-1}01_{2^m}0_{2^{m+1}-4}1(m\in\mathbf{N}^*)$ 经过 $l+1(l,2^{m+1}-2^{l+1}+2\in\mathbf{N}^*)$ 步 K_3 变换，得到 $2_{2^{m+1}-4}1_{2^l-1}02_{2^{m+1}-2^{l+1}+2}1_{2^l}0_{2^{m+1}-5}1$.

（可对 l 用数学归纳法证明）.

定理3 $2_{2^{m+1}-4}1_{2^m-1}0221_{2^m}0_{2^{m+1}-5}$ 经过两步 K_3 变换得到 $2_{2^{m+1}-4}102_{2^{m+1}-2}|10_{2^{m+1}-5}|$.

由定理1,2,3，得

定理4 $0_{2^{m+1}-2}1_{2^{m+1}-2}2_{2^{m+1}-2}$ 经过 $m+3$ 步 K_3 变换开始进入周长为 m 的黑洞.

定理5 $2_{2^{m+1}-2}1_{2^m-1}021_{2^m}0_{2^{m+1}-3}1$ 经过 $l+1(l\in\mathbf{N})$ 步 K_3 变换，得到 $2_{2^{m+1}-2}1_{2^l-1}02_{2^{m+1}-2^{l+1}+1}1_{2^l}0_{2^{m+1}-3}1$.

定理6 $2_{2^{m+1}-2}1_{2^m-1}021_{2^m}0_{2^{m+1}-3}1$ 经过一步 K_3 变换得到 $2_{2^{m+1}-2}02_{2^{m+1}-1}|0_{2^{m+1}-3}|$.

由定理1,5,6，得

定理7 $0_{2^{m+1}-1}1_{2^{m+1}-1}2_{2^{m+1}-1}$ 经过 $m+2$ 步 K_3 变换开始进入周长为 $m+1$ 的黑洞.

定理8 $2_{2^{m+1}-1}1_{2^m-1}0221_{2^m}0_{2^{m+1}-2}1$ 经过 $l(l\in\mathbf{N}^*)$ 步 K_3 变换得到 $2_{2^{m+1}-1}1_{2^l-1}02_{2^{m+1}-2^{l+1}+2}1_{2^l}0_{2^{m+1}-2}1$.

定理 9 $2_{2^{m+1}-1}1_{2^m-1}0221_{2^m}0_{2^{m+1}-2}$ 经过 m 步 K_3 变换得到 $2_{2^{m+1}-1}1_{2^m-1}0221_{2^m}0_{2^{m+1}-2}1$.

定理 10 $0_{2^{m+1}}1_{2^{m+1}}2_{2^{m+1}}$ 经过两步 K_3 变换开始进入周长为 m 的黑洞.

定理 11 $2_{2^{m+1}}1_{2^m-1}02_31_{2^m}0_{2^{m+1}-1}1$ 经过 $l(l \in \mathbf{N}^*)$ 步 K_3 变换得到 $2_{2^{m+1}}1_{3\cdot 2^{l-1}-1}02_{2^{m+1}-3\cdot 2^l+3}1_{3\cdot 2^{l-1}}0_{2^{m+1}-1}1$.

由定理 11 再研究 $0_{2^{m+1}+1}1_{2^{m+1}+1}2_{2^{m+1}+1}$ 的 k_3 变换是困难的.

笔者认为,当 $p \geqslant 3$ 时,彻底解决 $k_{p,n}$ 变换黑洞是不可能的.

广义平方 m 重连整数

定义 1 记 $A_k=\{\overline{a_1\cdots a_k}\mid a_i\in\{0,1,\cdots,9\}(i=1,\cdots,k)\}$ 其中 $\overline{a_1\cdots a_k}=\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot 10^{k-i}$，数 $\overline{a_1\cdots a_k}$ 的位数等于自然数 $\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot 10^{k-i}$ 的位数. 又记集合 $A_k^*=\{x\mid x\in A_k 且 x\neq\underbrace{\overline{0\cdots 0}}_{k个}\}$.

定义 2 设 $\alpha_k\in A_k^*$，$m\geqslant 2$，形如 $\underbrace{\overline{\alpha_k,\cdots,\alpha_k}}_{m个\alpha_k}=\alpha_k\cdot[10^{(m-1)k}+\cdots+10^k+1]=\alpha_k\cdot\dfrac{10^{mk}-1}{10^k-1}$ 的数叫做广义 mk 位 m 重连整数，广义二重连整数简称广义连整数. 是完全平方数的广义 m 重连整数叫做广义平方 m 重连整数，是完全平方数的广义连整数叫做广义平方连整数.

容易知道，广义 mk 位 m 重连整数的位数应是 $(m-1)k+1\sim(m-1)k+k$. 可以把注释①定义的 m 重连整数叫做狭义 m 重连整数. 若一个数是狭义 m 重连整数，就一定是广义 m 重连整数，但反之不一定成立. 如 200 312 003 120 031 是狭义 15 位三重连整数，也是广义 15 位三重连整数；003 120 031 200 312 = 3 120 031 200 312 是广义 15 位三重连整数，却不是狭义三重连整数，其位数是 13.

约定，本文中未注明的字母均表示正整数，用 $L'_{2,m,k}$ 表示所有的广义 mk 位平方 m 重连整数组成的集合，$L'_{2,2,k}$ 表示所有的广义 $2k$ 位平方连整数组成的集合，词语“m 重连整数”中隐含着 $m\geqslant 2$.

参见注释①的结论可得以下关于广平方 m 重连整数的结论(证明均可在注释①的相应结论中找到).

定理 1 存在广义 mk 位平方 m 重连整数的充要条件是 $\dfrac{10^{mk}-1}{10^k-1}$ 有大于 $10^{(m-2)k}$ 的平方因子.

推论 1 存在广义 $2k$ 位平方连整数的充要条件是 10^k+1 有大于 1 的平方因子.

① 甘志国. 平方 m 重连整数 // 傅海伦. 中国教育优秀论文集. 天津：天津社会科学院出版社，1998.

定理 2 设$\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}$的最大平方因子是 $p^2(p^2>10^{(m-2)k})$,则

$$L'_{2,m,k}=\left\{\left(\frac{r}{p}\cdot\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}\right)^2\middle|\ \frac{r}{p}<10^{-\frac{1}{2}(m-2)k}\right\}$$

推论 2 设 10^k+1 的最大平方因子为 $p^2(p^2>1)$,则

$$L'_{2,2,k}=\left\{\left[\frac{r}{p}(10^k+1)\right]^2\middle|\ p>r\right\}.$$

定理 3 若 $p\mid 10^k+1,p>r,s'_{p,r,n}=\frac{r}{p}[10^{kp(2n-1)}+1]$,则$(s'_{p,r,n})^2$是广义 $2kp(2n-1)$ 位平方连整数,且 $s'_{p,r,n}$ 的位数是$[\frac{1}{2}kp(2n-1)]+1\sim kp(2n-1)$.

定理 4 若 $p\mid 10^k+1,p>r,\frac{r}{p}$化成小数的第一个循环节是$a_1\cdots a_{2k}$,记 $q_n=\frac{1}{2}[(2n-1)p-1]$,则定理 3 中的 $s'_{p,r,n}=\overline{a_1\cdots a_{2k}\cdots a_1\cdots a_{2k}a_1\cdots a_k}$(把 $a_1\cdots a_{2k}$ 的 $2k$ 个数字连续重复写 q_n 遍后又接着写 $a_1\cdots a_k$ 的 k 个数字) + 1.

猜想 由本文定理 3 不能得到所有的广义平方连整数.

定理 5 设 p^2 是 10^k+1 的最大平方因子,且 $p>r,t$ 是满足$p^2\mid 10^t+1$ 的最小正整数,$k=t(2k_1-1),\frac{r^2}{p^2}$化成小数的第一个循环节是 $a_1\cdots a_{2t}$,则 $2k$ 位平方连整数$\left[\frac{r}{p}(10^k+1)\right]^2$ 的前 k 位数 $=\overline{a_1\cdots a_{2t}\cdots a_1\cdots a_{2t}a_1\cdots a_t}$(把 $a_1\cdots a_{2t}$ 的 $2t$ 个数字连续重复写(k_1-1)遍后又接着写 $a_1\cdots a_t$ 的t 个数字) + 1.

例 求出所有的广义 22 位平方连整数.

解 因为 $10^{11}+1$ 的最大平方因子是 11^2,所以由推论 2,得

$$L'_{2,2,11}=\{[\frac{r}{11}(10^{11}+1)]^2\mid r=1,2,\cdots,10\}$$

再由定理 4,5 可得,全部广义 22 位平方连整数包括以下 10 个数:

$[\frac{1}{11}(10^{11}+1)]^2=9\ 090\ 909\ 091^2=82\ 644\ 628\ 100\ 826\ 446\ 281$

$[\frac{2}{11}(10^{11}+1)]^2=18\ 181\ 818\ 182^2=330\ 578\ 512\ 403\ 305\ 785\ 124$

$[\frac{3}{11}(10^{11}+1)]^2=27\ 272\ 727\ 273^2=743\ 801\ 652\ 907\ 438\ 016\ 529$

$[\frac{4}{11}(10^{11}+1)]^2=36\ 363\ 636\ 364^2=1\ 322\ 314\ 049\ 613\ 223\ 140\ 496$

$[\frac{5}{11}(10^{11}+1)]^2=45\ 454\ 545\ 455^2=2\ 066\ 115\ 702\ 520\ 661\ 157\ 025$

$$[\frac{6}{11}(10^{11}+1)]^2 = 54\ 545\ 454\ 546^2 = 2\ 975\ 206\ 611\ 629\ 752\ 066\ 116$$

$$[\frac{7}{11}(10^{11}+1)]^2 = 63\ 636\ 363\ 637^2 = 4\ 049\ 586\ 776\ 940\ 495\ 867\ 769$$

$$[\frac{8}{11}(10^{11}+1)]^2 = 72\ 727\ 272\ 728^2 = 5\ 289\ 256\ 198\ 452\ 892\ 561\ 984$$

$$[\frac{9}{11}(10^{11}+1)]^2 = 81\ 818\ 181\ 819^2 = 6\ 694\ 214\ 876\ 166\ 942\ 148\ 761$$

$$[\frac{10}{11}(10^{11}+1)]^2 = 90\ 909\ 090\ 910^2 = 8\ 264\ 462\ 810\ 082\ 644\ 628\ 100$$

其中后 7 个还是狭义 22 位平方连整数.

由推论 1 可以验证不存在广义 $2k(k=1,2,\cdots,10)$ 位平方连整数,所以最小的广义平方连整数是$[\frac{1}{11}(10^{11}+1)]^2$.

2q 进制平方 m 重连整数

1 定义

定义 1 记 $A_{k,p}=\{\overline{a_1\cdots a_k}_{(p)}\mid a_i\in\{0,1,\cdots,p-1\}(i=1,\cdots,k)\}$(其中 $p\in\mathbf{N}^*,p\geqslant 2$),$\overline{a_1\cdots a_k}_{(p)}=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\cdot p^{k-i}$,数 $\overline{a_1\cdots a_k}_{(p)}$ 在 p 进制下的位数等于自然数 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\cdot p^{k-i}$ 在 p 进制下的位数. 又记 $A_{k,p}^*=\{x\mid x\in A_{k,p}$,且 $x\neq\overline{\underbrace{0\cdots 0}_{k个}}_{(p)}\}=\{x\mid x\in A_{k,p}$,且 $x\neq 0\}$.

定义 2 记 $\alpha_k\in A_{k,p}^*,m\geqslant 2$,形如 $\overline{\underbrace{\alpha_k,\cdots,\alpha_k}_{m个\alpha_k}}_{(p)}=\alpha_k\cdot[p^{(m-1)k}+\cdots+p^k+1]=\alpha_k\cdot\dfrac{p^{mk}-1}{p^k-1}$ 的数叫做 p 进制广义 mk 位 m 重连整数,当且仅当 $p^{k-1}\leqslant\alpha_k<p^k$ 时,p 进制广义 mk 位 m 重连整数也叫做 p 进制狭义 mk 位 m 重连整数. 狭义 mk 位 m 重连整数简称 mk 位 m 重连整数,二重连整数简称连整数. 是完全平方数的 p 进制广义(狭义) m 重连整数叫做 p 进制广义(狭义)平方 m 重连整数.

易知 p 进制广义 mk 位 m 重连整数在 p 进制下的位数是 $(m-1)k+1\sim(m-1)k+k$,p 进制狭义 mk 位 m 重连整数在 p 进制下的位数是 mk.

约定:本文中未注明的字母均表示正整数.

注意 “m 重连整数”中隐含着 $m\geqslant 2$,“p 进制”中隐含着 $p\geqslant 2$.

定义 3 记 $L_{p,2,m,k}=\{p$ 进制狭义 mk 位平方 m 重连整数$\}$,$L'_{p,2,m,k}=\{p$ 进制广义 mk 位平方 m 重连整数$\}$.

本文参见注释① 给出关于 $L_{2q,2,m,k}$ 及 $L'_{2q,2,m,k}$ 的有关结论,未证明的结论均同注释 ① 中相应结论的证明(尚未给出关于奇数进制广义(狭义)平方 m 重连整数的有关结论).

2 引理

引理 1 $\dfrac{(2q)^{mk}-1}{(2q)^k-1}(m\geqslant 2)$ 是完全平方数 $\Leftrightarrow q=1,m=2,k=3$.

① 甘志国. 平方 m 重连整数 // 傅海伦. 中国教育优秀论文集. 天津:天津社会科学院出版社,1998.

证明 只证 $\Rightarrow$:

由注释①的引理1,2知 $m \neq 2$ 时成立.再证 $m = 2$ 时成立,即证 $(2q)^k + 1 = y^2 \Leftrightarrow q = 1, k = y = 3$,而这是我国数学家柯召于1962年已证的结论[1].

引理2 若 $p \mid u^k + 1, 2 \nmid p$,则 $p^2 \mid u^{kp(2n-1)} + 1$.

引理3 $(u^a - 1, u^b - 1) = u^{(a,b)} - 1$.

引理4 若 $\alpha, \beta \in \mathbf{N}, 2^\alpha \parallel a, 2^\alpha \parallel b$,则

(1) 当 $\alpha = \beta$ 时,$((2u)^a + 1, (2u)^b + 1) = (2u)^{(a,b)} + 1$;

(2) 当 $\alpha \neq \beta$ 时,$((2u)^a + 1, (2u)^b + 1) = 1$.

引理5 若存在 $k \in \mathbf{Z}$,使 $p \mid (2q)^k + 1$,且 $\frac{r}{p} < 1$,则

(1) 存在最小的 $t \in \mathbf{N}^*$,使 $p \mid (2q)^t + 1$;

(2) 在 $2q$ 进制下,$\frac{r}{p}$ 能化成纯循环小数;

(3) 在 $2q$ 进制下,$\frac{r}{p}$ 的循环节长度是偶数 $2t$;

(4) $k = t(2k_1 - 1)$.

定理6 若 $p \mid (2q)^k + 1, \frac{r}{p} < 1$,在 $2q$ 进制下 $\frac{r}{p}$ 化成小数的第一个循环节是 $a_1 \cdots a_{2k}$,则

(1) $a_i + a_{k+i} = 2q - 1 (i = 1, \cdots, k)$;

(2) $\frac{r}{p} = \frac{\overline{a_1 \cdots a_{2k}}_{(2q)}}{(2q)^{2k} - 1} = \frac{\overline{a_1 \cdots a_k}_{(2q)} + 1}{(2q)^k + 1}$

3 $2q$ 进制狭义平方 m 重连整数

定理1 当 $q \geqslant 3$ 时,存在 $2q$ 进制狭义平方 m 重连整数 $\Leftrightarrow \frac{(2q)^{mk} - 1}{(2q)^k - 1}$ 有大于 $(2q)^{(m-2)k}$ 的平方因子.

(当 $q = 1, 2$ 时,尚未得到简明的充要条件.)

推论1 当 $q \geqslant 3$ 时,存在 $2q$ 进制狭次平方连整数 $\Leftrightarrow (2q)^k + 1$ 有大于1的平方因子.

定理2 设 $\frac{(2q)^{mk} - 1}{(2q)^k - 1}$ 的最大平方因子是 $p^2(p^2 > (2q)^{(m-2)k})$,则

当 $q = 1, m = 2, k = 3$ 时,$L_{2q,2,m,k} = \{100100_{(2)}\} = \{36\}$;否则 $L_{2q,2,m,k} = \{[\frac{r}{p} \cdot \frac{(2q)^{mk} - 1}{(2q)^k - 1}]^2 \mid (2q)^{-(m-2)k-1} < (\frac{r}{p})^2 < (2q)^{-(m-2)k}\}$.

推论2 设 $(2q)^k + 1$ 的最大平方因子是 $p^2(p^2 > 1)$,则

当 $q = 1, k = 3$ 时,$L_{2q,2,2,k} = \{100100_{(2)}\}$;否则 $l_{2q,2,2,k} = \{(\frac{r}{q}[(2q)^k +$

$1])^2 \mid \frac{1}{\sqrt{2q}} < \frac{r}{p} < 1\}$.

4 $2q$ 进制狭义平方连整数与循环小数的联系

定理 3 若 $p \mid (2q)^k + 1, \frac{1}{\sqrt{2q}} < \frac{r}{p} < 1, s_{2q,p,r,n} = \frac{r}{p}[(2q)^{kp(2n-1)} + 1]$，则 $(s_{2q,p,r,n})^2$ 是 $2q$ 进制狭义 $2kp(2n-1)$ 位平方连整数，$s_{2q,p,r,n}$ 是 $2q$ 进制下的 $kp(2n-1)$ 位数.

定理 4 若 $p \mid (2q)^k + 1, \frac{1}{\sqrt{2q}} < \frac{r}{p} < 1$，在 $2q$ 进制下 $\frac{r}{p}$ 化成小数后的第一个循环节是 $a_1 \cdots a_{2k}$，记 $q_n = \frac{1}{2}[(2n-1)p-1]$，则定理 3 中的 $s_{2q,p,r,n} = \overline{a_1 \cdots a_{2k} \cdots a_1 \cdots a_{2k} a_1 \cdots a_k}_{(2q)}$（把 $a_1 \cdots a_{2k}$ 的 $2k$ 个数字连续重复写 q_n 遍后接着写 $a_1 \cdots a_k$ 的 k 个数字）$+1$.

定理 5 （参见引理 5，推论 2）设 p^2 是 $(2q)^k + 1$ 的最大平方因子，且 $\frac{1}{2q} < \frac{r^2}{p^2} < 1$，$t$ 是满足 $p^2 \mid (2q)^t + 1$ 的最小正整数，$k = t(2k_1 - 1)$，$\frac{r^2}{p^2}$ 在 $2q$ 进制下的第一个循环节是 $a_1 \cdots a_{2t}$，则 $2q$ 进制狭义 $2k$ 位平方连整数 $(\frac{r}{p}[(2q)^k + 1])^2$ 的前 k 位数 $= \overline{a_1 \cdots a_{2t} \cdots a_1 \cdots a_{2t} a_1 \cdots a_t}_{(2q)}$（把 $a_1 \cdots a_{2t}$ 的 $2t$ 个数字连续重复写 $k_1 - 1$ 遍后又接着写 $a_1 \cdots a_t$ 的 t 个数字）$+1$.

例 1 求 $L_{6,2,2,7}$.

解 因为 $6^7 + 1 = 7^2 \cdot 29 \cdot 197$，29 与 197 均为素数，所以 $6^7 + 1$ 的最大平方因子是 49.

再由推论 2，得

$$L_{6,2,2,7} = \{[\frac{r}{7}(6^7+1)]^2 \mid \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{r}{7} < 1\} = \{[\frac{r}{7}(6^7+1)]^2 \mid r = 3,4,5,6\}.$$

因为 $\frac{3}{7} = 0,\dot{2}\dot{3}_{(6)}$，所以由定理 4（这时 $p = 7, q = r = 3, k = n = 1, q_1 = 3$）得

$$s_{6,7,3,1} = \frac{3}{7}(6^7 + 1) = 2323233_{(6)}$$

因为 $(\frac{3}{7})^2 = 0.\dot{1}034012452154\dot{3}_{(6)}$，所以由定理 5（这时 $p = 7, q = r = 3, k = 7, t = 7, k_1 = 1$），得

$$[\frac{3}{7}(6^7 + 1)]^2 = 10340131034013_{(6)},$$

即$[\frac{3}{7}(6^7+1)]^2=[2323233_{(6)}]^2=10340131034013_{(6)}$

同理,可得

$[\frac{4}{7}(6^7+1)]^2=[3232324_{(6)}]^2=15431041543104_{(6)}$

$[\frac{5}{7}(6^7+1)]^2=[4141415_{(6)}]^2=30211213021121_{(6)}$

$[\frac{6}{7}(6^7+1)]^2=[5050510_{(6)}]^2=42241004224100_{(6)}$

5 2q 进制广义平方 m 重连整数

定理 1′ 当 $q\geqslant 3$ 时,存在 $2q$ 进制广义平方 m 重连整数 $\Leftrightarrow \frac{(2q)^{mk}-1}{(2q)^k-1}$ 有大于 $(2q)^{(m-2)k}$ 的平方因子.

(当 $q=1,2$ 时,尚未得到简明的充要条件.)

推论 1′ 当 $q\geqslant 3$ 时,存在 $2q$ 进制广义平方连整数 $\Leftrightarrow(2q)^k+1$ 有大于 1 的平方因子.

定理 2′ 设 $\frac{(2q)^{mk}-1}{(2q)^k-1}$ 的最大平方因子是 $p^2(p^2>(2q)^{(m-2)k})$,则

当 $q=1,m=2,k=3$ 时,$L'_{2q,2,m,k}=\{001001_{(2)},100100_{(2)}\}=\{9,36\}$;否则 $L'_{2q,2,m,k}=\{[\frac{r}{p}\cdot\frac{(2q)^{mk}-1}{(2q)^k-1}]^2\mid(\frac{r}{p})^2<(2q)^{-(m-2)k}\}$.

推论 2′ 设 $(2q)^k+1$ 的最大平方因子是 $p^2(p^2>1)$,则

当 $q=1,k=3$ 时,$L'_{2q,2,2,k}=\{9,36\}$;否则 $l'_{2q,2,2,k}=\{(\frac{r}{p}[(2q)^k+1])^2\mid p>r\}$.

6 2q 进制广义平方连整数与循环小数的联系

定理 3′ 若 $p\mid(2q)^k+1,p>r,s'_{2q,p,r,n}=\frac{r}{p}[(2q)^{kp(2n-1)}+1]$,则 $(s'_{2q,p,r,n})^2$ 是 $2q$ 进制广义 $2kp(2n-1)$ 位平方连整数,$s'_{2q,p,r,n}$ 是 $2q$ 进制下的 $[\frac{1}{2}kp(2n-1)]+1\sim kp(2n-1)$ 位数.

定理 4′ 若 $p\mid(2q)^k+1,p>r$ 在 $2q$ 进制下 $\frac{r}{p}$ 的第一个循环节是 $a_1\cdots a_{2k}$,记 $q_n=\frac{1}{2}[(2n-1)p-1]$,则定理 3′ 中的 $s'_{2q,p,r,n}=\overline{a_1\cdots a_{2k}\cdots a_1\cdots a_{2k}a_1\cdots a_{k(2q)}}$(把 $a_1\cdots a_{2k}$ 的 $2k$ 个数字连续重复写 q_n 遍后又接着写 $a_1\cdots a_k$ 的 k 个数字)+1.

定理 5′ (参见引理 5,推论 2′)设 p^2 是 $(2q)^k+1$ 的最大平方因子,且 $p>$

r,t 是满足 $p^2 \mid (2q)^t + 1$ 的最小正整数,$k = t(2k_1 - 1)$,在 $2q$ 进制下$\frac{r^2}{p^2}$的第一个循环节是 $a_1 \cdots a_{2t}$,则 $2q$ 进制广义 $2k$ 位平方连整数$(\frac{r}{p}[(2q)^k + 1])^2$ 的前 k 位数 $= \overline{a_1 \cdots a_{2t} \cdots a_1 \cdots a_{2t} a_1 \cdots a_t}_{(2q)}$(把 $a_1 \cdots a_{2t}$ 的 $2t$ 个数字连续重复写 $k_1 - 1$ 遍后又接着写 $a_1 \cdots a_t$ 的 k 个数字) $+ 1$.

例 2 求 $L'_{6,2,2,7}$.

解 由推论 2′,得

$$L'_{6,2,2,7} = \{[\frac{r}{p}(6^7 + 1)]^2 \mid r = 1,2,\cdots,6\}$$

可得 $L'_{6,2,2,7}$ 包括以下六个数(后四个数见 $L_{6,2,2,7}$,前两个数见下面):

$[\frac{1}{7}(6^7 + 1)]^2 = [505051_{(6)}]^2 = 422410042241_{(6)}$

$[\frac{2}{7}(6^7 + 1)]^2 = [1414142_{(6)}]^2 = 2534440253444_{(6)}$

参考文献

[1] 张文忠.整数中的明珠[M].重庆:西南师范大学出版社,1992.

"一条小定理"的推广

文献[1]是八年前的一个研究成果,即证明了

猜想 若 $a,b\in\mathbf{N}^*$,$2\nmid a$,$2\mid b$,$(a,b)=1$(指 a,b 互素),则 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$(a^n+b^n,a^{n+1}+b^{n+1})=1$.

本文将推广该结论.

引理 若 $m,n\in\mathbf{N}^*$,$(m,n)=1$,则存在 $k,l\in\mathbf{N}^*$ 使

$$km-ln=1 \qquad ①$$

证明 由文献[2]第58页引理1知,存在 $k',l'\in\mathbf{Z}$ 使 $k'm-l'n=1$,所以

$$(k'+nt)m-(l'+mt)n=1(t\in\mathbf{N}^*)$$

当 t 足够大时,$k'+nt,l'+mt\in\mathbf{N}^*$.选 $k=k'+nt$,$l=l'+mt$,得引理成立.

定理1 若 $a,b\in\mathbf{Z}$,$(a,b)=1$,$2\nmid a+b$;$m,n\in\mathbf{N}^*$,$(m,n)=1$,$2\nmid m+n$,则$(a^m+b^m,a^n+b^n)=1$.

证明 由引理知,结论①在这里成立.

由 $2\nmid m+n$ 知可不妨设 $2\mid m$,$2\nmid n$.又由①得 $2\nmid l$.

若存在素数 $p\mid(a^m+b^m,a^n+b^n)$ ②

得 $p\mid a^{ln}+b^{ln}$,即 $p\mid a^{km-1}+b^{km-1}$,$p\mid(a^m)^k+ab^{km-1}$,$p\mid(-b^m)^k+ab^{km-1}$.

若 $p\mid b$,由②得 $p\mid a$,与$(a,b)=1$矛盾.所以 $p\nmid b$,得 $p\mid(-1)^kb+a$,$p\mid a^2-b^2$.再由 $2\mid m$,得 $p\mid a^m-b^m$.又 $p\mid a^m+b^m$,得 $p\mid 2b^m$,$p\mid 2$,$p=2$.由 $2\nmid a+b$ 及②知 $p\neq 2$,前后矛盾.说明②不成立,得定理1成立.

推论1 若 $a,b\in\mathbf{Z}$,$(a,b)=1$,$2\nmid a+b$;$m,n\in\mathbf{N}^*$,$2(m,n)\nmid m+n$,则$(a^m+b^m,a^n+b^n)=1$.

证明 设$(m,n)=d$,得 $m=m'd$,$n=n'd$,$(m',n')=1$,$2\nmid m'+n'$,$d,m',n'\in\mathbf{N}^*$.

$(a^m+b^m,a^n+b^n)=((a^d)^{m'}+(b^d)^{m'},(a^d)^{n'}+(b^d)^{n'})=1$(用定理1).

定理2 若 $a,b\in\mathbf{Z}$,$(a,b)=1$,$2\mid a+b$;$m,n\in\mathbf{N}^*$,$(m,n)=1$,$2\nmid m+n$,则$(a^m+b^m,a^n+b^n)=2$.

证明 同定理1的证明,得

奇素数 $p \nmid (a^m + b^m, a^n + b^n)$.

得 $2 \nmid a, 2 \nmid b$,还可设 $a + b = 2u(u \in \mathbf{Z})$.可不妨设 $2 \mid m, 2 \nmid n$.

$$a^m + b^m = b^m + (b - 2u)^m = 2b^m - \frac{m}{2} \cdot 2^2 ub^{m-1} + C_m^2 (2u)^2 b^{m-2} - \cdots + (2u)^m$$

所以 $2 \mid a^m + b^m$,但 $2^2 \nmid a^m + b^m$.

又 $2 \mid a^n + b^n$,所以$(a^m + b^m, a^n + b^n) = 2$.

推论 2 若 $a, b \in \mathbf{Z}, (a,b) = 1, 2 \nmid a + b; m, n \in \mathbf{N}^*, 2(m,n) \nmid m + n$,则$(a^m + b^m, a^n + b^n) = 2$.

定理 3 若 $a, b \in \mathbf{Z}, (a,b) = 1; m, n \in \mathbf{N}^*, (m,n) = 1, 2 \mid m + n$,则$(a^m + b^m, a^n + b^n) = |a + b|$.

证明 得 $2 \nmid m, 2 \nmid n$.仍有 ① 成立.由 ① 得 $2 \nmid k + l$.

(1) 当 $2 \nmid k, 2 \mid l$ 时:

设 p 是素数,$\alpha \in \mathbf{N}$,若 $p^\alpha \mid (a^m + b^m, a^n + b^n)$,得 $p^\alpha \mid a^{km} + b^{km}$,即 $p^\alpha \mid a^{ln+1} + b^{ln+1}, p^\alpha \mid a(-b^n)^l + b^{ln+1}$.

可证 $p \nmid b$,所以 $p^\alpha \mid a + b$.

又 $a + b \mid (a^m + b^m, a^n + b^n)$,所以此时定理 3 成立.

(2) 当 $2 \mid k, 2 \nmid l$ 时:

设 p 是素数,$\alpha \in \mathbf{N}$,若 $p^\alpha \mid (a^m + b^m, a^n + b^n)$,得

$p^\alpha \mid a^{ln} + b^{ln}, p^\alpha \mid a^{km-1} + b^{km-1}, p^\alpha \mid a^{km} + ab^{km-1}, p^\alpha \mid (-b^m)^k + ab^{km-1}$, $p^\alpha \mid a + b$,此时也得定理 3 成立.

推论 3 若 $a, b \in \mathbf{Z}, (a,b) = 1; m, n \in \mathbf{N}^*, 2(m,n) \mid m + n$,则$(a^m + b^m, a^n + b^n) = |a + b|$.

定理 4 若 $a, b \in \mathbf{Z}, (a,b) = 1; m, n \in \mathbf{N}^*, (m,n) = 1$,则$(a^m - b^m, a^n - b^n) = |a - b|$.

证明 设 p 是素数,$\alpha \in \mathbf{N}$,若 $p^\alpha \mid (a^m - b^m, a^n - b^n)$,得 $p^\alpha \mid a^{km} - b^{km}$.由 ① 得 $p^\alpha \mid a^{ln+1} - b^{ln+1}, p^\alpha \mid a(b^n)^l - b^{ln+1}$.可证 $p \nmid b$,所以 $p^\alpha \mid a - b$.得定理 4 成立.

推论 4 若 $a, b \in \mathbf{Z}, (a,b) = 1; m, n \in \mathbf{N}^*$,则$(a^m - b^m, a^n - b^n) = |a^{(m,n)} - b^{(m,n)}|$.

参考文献

[1] 王世强.一条小定理[J].数学通报,2007(7):26.

[2] 陈景润.初等数论(Ⅰ)[M].北京:科学出版社,1978.

研究 Fibonacci 三角形猜想的一种方法

1 引言、引理

通常用 F_n 表示第 n 个 Fibonacci 数，即 $F_0=0, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 2)$. $\{F_n\}_{n\geqslant 2}$ 是严格递增的数列，这里列出 $\{F_n\}$(的前 50 项)：

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,610,987, 1 597, 2 584, 4 181, 6 765,10 946,17 711,28 657,46 368,75 025,121 393,196 418,317 811,514 229, 832 040,1 346 269,2 178 309,3 524 578,5 702 887,9 227 465,14 930 352, 24 157 817,39 088 169,63 245 986,102 334 155,165 580 141,267 914 296, 433 494 437, 701 408 733, 1 134 903 170, 1 836 311 903, 2 971 215 073, 4 807 526 976,7 778 742 049,… ①

关于 $\{F_n\}$，还有以下性质：

引理 1 (1)$2\mid F_n\Leftrightarrow n=3m$;

(2)$2\parallel F_n\Leftrightarrow n=6l+3$;

(3)$8\parallel F_n\Leftrightarrow n=6l$.

(其中 $m,l\in\mathbf{N}$.)(由文献[1]的引理 2,8 可得)

引理 2 $\left\{\dfrac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right\}$是以 w 为下界的严格递减数列，$\left\{\dfrac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right\}$是以 w 为上界的严格递增数列. 其中 $n\in\mathbf{N}^*$, $w=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.(见文献[2]的第 78 页)

(由此可证$\dfrac{F_n}{F_{n+1}}<\dfrac{10}{13}(n\geqslant 2)$)

引理 3 (1)$3\mid F_n\Leftrightarrow 4\mid n$;

(2)$5\mid F_n\Leftrightarrow 5\mid n$;

(3)$7\mid F_n\Leftrightarrow 8\mid n$.(见文献[2]第 75 页)

边长与面积均为整数的三角形叫做 Heron 三角形.

引理 4 等腰 Heroon 三角形底边上的高为整数.(即文献[1]引理 1)

边长为 Fibonacci 数的 Heron 三角形叫做 Fibonacci 三角形. 文献[3]提出：

Fibonacci 三角形猜想 当 $1\leqslant k<n$ 时，不存在以(F_{n-k},F_n,F_n)为边长的 Fibonacci 三角形.

综合文献[1]及文献[3]～[7]可得，上述猜想在以下五种情形成立：

(1)$n \leqslant 25$;

(2)$k = 1,2,3$;

(3)$3 \nmid n - k$;

(4)$n \geqslant 2k + 4$;

(5)$n - k = 3,6,9$.

可见,要完全解决上述猜想是困难的.本文受文献[7]的启发,给出研究此猜想的一种方法.

由引理4,1,可得

引理5 当 $1 \leqslant k < n$ 时,若存在以(F_{n-k}, F_n, F_n)为边长的 Fibonacci 三角形,则 $n = 3m + k(m \in \mathbf{N}^*)$,且存在 $h \in \mathbf{N}^*$,使得$(\frac{1}{2}F_{3m})^2 = F_{3m+k}^2 - h^2$($h$ 是这个等腰三角形底边上的高).

又由引理1可得,要证明 Fibonacci 三角形猜想,就是要证明以下两种情形:

Fibonacci 三角形猜想的第一种情形 当 $l \in \mathbf{N}$ 时,不存在 $k, h \in \mathbf{N}^*$,使得

$$(\frac{1}{2}F_{6l+3})^2 = F_{6l+3+k}^2 - h^2$$

Fibonacci 三角形猜想的第二种情形 当 $l \in \mathbf{N}^*$ 时,不存在 $k, h \in \mathbf{N}^*$,使得

$$(\frac{1}{2}F_{6l})^2 = F_{6l+k}^2 - h^2$$

由文献[8]或文献[9],可得

引理6 关于 x, y 的不定方程

$$n^2 = x^2 - y^2 (n\text{ 是已知的任意正整数}) \qquad ②$$

有以下结论成立:

(1)②有正整数解的充要条件是 $n \geqslant 3$;

(2)当 $2 \nmid n$ 且 $n \geqslant 3$ 时,②有正整数解,且全部正整数解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\frac{n^2}{b} + b) \\ y = \frac{1}{2}(\frac{n^2}{b} - b) \end{cases}$$

其中 $b \in \mathbf{N}^*, b \mid n^2, b < n$,此时解的组数为 $\sigma_0(n^2)$;

(3)当 $2 \mid n$ 且 $n \geqslant 4$ 时,②有正整数解,且全部正整数解为

$$\begin{cases} x = (\frac{n}{2})^2/b + b \\ y = (\frac{n}{2})^2/b - b \end{cases}$$

其中 $b\in\mathbf{N}^*,b\mid(\frac{n}{2})^2,b<\frac{n}{2}$,此时解的组数为 $\sigma_0((\frac{n}{2})^2)$.

(其中 $\sigma_0(n^2)$ 表示 n^2 的全部小于 n 的正约数个数,设 $n^2=\prod_{i=1}^{k}p_i^{2\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,k$),则 $\sigma_0(n^2)=\frac{1}{2}[\prod_{i=1}^{k}(2\alpha_i+1)-1]$.)

用以上引理 6 可以给出研究 Fibonacci 三角形猜想两种情形的一种方法.

2 用引理 6(2) 研究第一种情形

定理 1 当 $l=0,1,2,3,4$ 时,Fibonacci 三角形猜想的第一种情形成立.

证明 因为$\frac{1}{2}F_3=1$,所以由引理 6(1) 知 $l=0$ 时成立.

当 $l=1$ 时,$\frac{1}{2}F_{6l+3}=17$.假设存在 $k,h\in\mathbf{N}^*$,使得 $17^2=F_{9+k}^2-h^2$,由引理 6(2) 得,$F_{9+k}=145(b=1)$,由 ① 知这不可能!所以 $l=1$ 时成立.

当 $l=2$ 时,$\frac{1}{2}F_{6l+3}=305=5\times 61$,假设存在 $k,h\in\mathbf{N}^*$,使得 $305^2=F_{15+k}^2-h^2$.

由引理 6(2) 得,$F_{15+k}=46\ 513,9\ 305,1\ 873,793(b=1,5,25,61)$

由 ① 知这不可能!所以 $l=2$ 时成立.

当 $l=3$ 时,$\frac{1}{2}F_{6l+3}=5\ 473=13\cdot 421$,假设存在 $k,h\in\mathbf{N}^*$,使得 $5\ 473^2=F_{21+k}^2-h^2$.

由引理 6(2) 得,$F_{21+k}=14\ 976\ 865,1\ 152\ 073,88\ 705,35\ 785(b=1,13,169,421)$.

由 ① 知这不可能!所以 $l=3$ 时成立.

当 $l=4$ 时,$\frac{1}{2}F_{6l+3}=98\ 209=17\cdot 53\cdot 109$,假设存在 $k,h\in\mathbf{N}^*$,使得 $98\ 209^2=F_{27+k}^2-h^2$.

由引理 6(2) 得,$F_{27+k}=4\ 822\ 503\ 841,283\ 676\ 705,90\ 990\ 665,44\ 243\ 209,16\ 687\ 009,5\ 352\ 841,3\ 603\ 965,1\ 718\ 209,434\ 265,411\ 841,322\ 505,168\ 841,124\ 865(b=1,17,53,109,289,901,1\ 853,2\ 809,5\ 777,11\ 881,15\ 317,31\ 501,47\ 753)$.

由 ① 知这不可能!所以 $l=4$ 时成立.

定理 1 成立.

猜想 1 当 $n\geqslant 4$ 时,$(\frac{1}{2}F_n)^2\neq 2F_m-1$.

定理 2 若猜想 1 成立,又$\frac{1}{2}F_{6l+3}$ 为素数(当然为奇素数,笔者猜测:有无

穷多个正整数 l,使$\frac{1}{2}F_{6l+3}$为素数),则此时 Fibonacci三角形猜想的第一种情形成立.

证明 假设此时 Fibonacci 三角形猜想的第一种情形不成立,则存在 $k,h\in\mathbf{N}^*$,使得

$$(\frac{1}{2}F_{6l+3})^2 = F_{6l+3+k}^2 - h^2$$

由$\frac{1}{2}F_{6l+3}$为奇素数(得 $l\in\mathbf{N}^*$)及引理 6(2) 得

$$F_{6l+3+k} = \frac{1}{2}[(\frac{1}{2}F_{6l+3})^2 + 1](b = 1)$$

$$(\frac{1}{2}F_{6l+3})^2 = 2F_{6l+3+k} - 1$$

这与猜想 1 矛盾!所以定理 2 成立.

猜想 2 (1) $\frac{1}{20}F_n^2 \neq 2F_m - 5$;

(2) $\frac{1}{100}F_n^2 \neq 2F_m - 25$.

定理 3 若猜想 1,2 均成立,又$\frac{1}{2}F_{6l+3} = 5p$(由引理 3 知,此时 $l = 5t + 2(t\in\mathbf{N})$),且 $3\nmid F_{6l+3}$),p 为奇素数,则此时 Fibonacci 三角形猜想的第一种情形成立.

证明 假设此时 Fibonacci 三角形猜想的第一种情形不成立,则存在 $k,h\in\mathbf{N}^*$,使得

$$(\frac{1}{2}F_{6l+3})^2 = F_{6l+3+k}^2 - h^2$$

由$\frac{1}{2}F_{6l+3} = 5p$,p 为奇素数(有 $6l + 3 = 6(5t + 2) + 3 \geqslant 15$,$5p = \frac{1}{2}F_{6l+3} \geqslant \frac{1}{2}F_{15} = 305$,所以 $p > 5$),及引理 6(2) 得

$$F_{6l+3+k} = \frac{1}{2}[(\frac{1}{2}F_{6l+3})^2 + 1],\frac{1}{2}(\frac{1}{20}F_{6l+3}^2 + 5),\frac{1}{2}(\frac{1}{100}F_{6l+3}^2 + 25),$$

$$\frac{13}{10}F_{6l+3}(b = 1,5,25,p)$$

因为猜想 1,2 均成立,所以

$$F_{6l+3+k} = \frac{13}{10}F_{6l+3},\frac{F_{6l+3}}{F_{6l+3+k}} = \frac{10}{13},\text{所以}\frac{F_{6l+3}}{F_{6l+4}} \geqslant \frac{10}{13}$$

这与引理 2 矛盾!所以定理 3 成立.

3 用引理 6(3) 研究第二种情形

定理 4 当 $l = 1,2,3$ 时,Fibonacci 三角形猜想的第二种情形成立.

证明 当 $l = 1$ 时,$\frac{1}{2}F_{6l} = 4$.假设存在 $k,h \in \mathbf{N}^*$,使得

$$4^2 = F_{6+k}^2 - h^2$$

由引理 6(3) 得,$F_{6+k} = 5(b = 1)$.

由 ① 知这不可能!所以 $l = 1$ 时成立.

当 $l = 2$ 时,$\frac{1}{2}F_{6l} = 72$.假设存在 $k,h \in \mathbf{N}^*$,使得 $72^2 = F_{12+k}^2 - h^2$.由引理 6(3) 得

$F_{12+k} = 1\ 297,650,435,328,222,170,153,120,97,90,78,75(b = 1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,27)$

由 ① 知不可能!所以 $l = 2$ 时成立.

当 $l = 3$ 时,$\frac{1}{2}F_{6l} = 1\ 292 = 2^2 \cdot 17 \cdot 19$,假设存在 $k,h \in \mathbf{N}^*$,使得 $1\ 292^2 = F_{18+k}^2 - h^2$.由引理 6(3) 得

$F_{18+k} = 417\ 317, 208\ 660, 104\ 333, 24\ 565, 21\ 983, 12\ 308, 11\ 020, 6\ 205, 5\ 567, 1\ 733, 1\ 615, 1\ 517, 1\ 300(b = 1,2,4,17,19,34,38,68,76,289,323,361,578)$

由 ① 知这不可能!所以 $l = 3$ 时成立.

定理 4 成立.

当 $l = 4$ 时,$\frac{1}{2}F_{6l} = 23\ 184$,若存在 $k,h \in \mathbf{N}^*$,使得

$$23\ 184^2 = F_{24+k}^2 - h^2$$

因为 $\sigma_0((\frac{23\ 184}{2})^2) = \sigma_0(2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 23^2) = \frac{1}{2}(7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 - 1) = 157$

所以由引理 6(3) 可得 F_{24+k} 的 157 个值,因而仅用笔算证明 $l = 4$ 时,Fibonacci 三角形猜想的第二种情形成立是不容易的.

猜想 3 当 $n = 12t + 6(t \in \mathbf{N})$ 时,有

(1) $F_n^2 \neq 16(F_m - 1)$;

(2) $F_n^2 \neq 32(F_m - 2)$;

(3) $F_n^2 \neq 64(F_m - 4)$.

定理 5 若猜想 3 成立,又 $F_{6l} = 8p$(可以证明 $2^3 \parallel F_{12t+6}(t \in \mathbf{N})$),$p$ 是奇素数,则此时 Fibonacci 三角形猜想的第二种情形成立.

证明 假设此时 Fibonacci 三角形猜想的第二种情形不成立,则存在 k,

$h \in \mathbf{N}^*$,使得

$$(\frac{1}{2}F_{6l})^2 = F_{6l+k}^2 - h^2$$

因为 $F_{6l} = 8p$,p 为奇素数(有 $6l = 12t + 6 \geqslant 6$,所以 $p > 2$),所以由引理6(3)得

$$F_{12t+6+k} = \frac{1}{16}F_{12t+6}^2 + 1, \frac{1}{32}F_{12t+6}^2 + 2, \frac{1}{64}F_{12t+6}^2 + 4, \frac{5}{8}F_{12t+6} (b = 1,2,4,p)$$

显然 $F_{12t+6+k} > \frac{5}{8}F_{12t+6}$,又由猜想 3 成立,知定理 5 成立.

可以运用计算机及本文介绍的方法研究 Fibonacci 三角形猜想的两种情形(当然不能完全解决该猜想),欢迎有兴趣的读者及计算机爱好者去研究.本文的定理 1,4 证明了 $n - k = 3,6,9,12,15,18,21,27$ 时,Fibonacci 三角形猜想成立.

参考文献

[1] 袁明豪.关于 Fibonacci 三角形的一个结果[J].数学通讯,1994(11):17-19.

[2] 揭方琢.菲波那契数列[J].华中师范大学学报(自然科学版,数学史专辑),1987(3):72-85.

[3] 陈计.斐波那契三角形[J].数学通讯,1994(5):封三 - 封四.

[4] 江明.关于斐波那契三角形猜想的二个结论[J].数学通讯,1995(5):23.

[5] 张善立.有关斐波那契三角形猜想的部分证明[J].数学通讯,1995(8):21-22.

[6] 纪锋.关于斐波那契三角形猜想的又一结果[J].数学通讯,1996(5):32.

[7] 袁明豪.关于 Fibonacci 三角形的另一结果[J].数学通讯,1997(6):29-31.

[8] 甘志国.任意自然数的全部平方差分拆及其组数[J].数学通讯,1996(11):29-31.

[9] 甘志国.自然数的互素平方差分拆[J].中学数学月刊,1997(11):15-16.

用等距平行线把平行四边形涂成阴影的线段条数及总长度

文献[1]研究了用等距平行线把平面封闭图形涂成阴影(涂的方式见文献[1]的约定)的线段条数及总长度的问题,但该文留下的问题较多,可供读者去钻研.(文献[1]的图1有印刷错误,读者可由文献[1]的第二段文字得到正确图形;文献[1]第27页左栏倒数第三行中的"α"应改为"φ".)

本文解决平行四边形的情形.

先把文献[1]的定义重新写出:

定义[1] $g(x)=\begin{cases}x-1 & (x\in\mathbf{Z})\\ [x] & (x\in \complement_{\mathbf{R}}Z)\end{cases}$,其中$[a]$表示不大于$a(a\in\mathbf{R})$的最大整数(本文还记$\{a\}=a-[a]$).

定理1 用与$\square ABCD(AD=a,AB=b,a$边水平放置)的a边成α角($0\leqslant\alpha\leqslant\beta$,如图1,图2,$\alpha$指阴影线向上的方向与$a$边向右或向左的方向之间的夹角)的一组间距为$h$的平行线把这个平行四边形涂成阴影所需阴影线的条数为$n=g(\frac{a\sin\alpha+b\sin(A+\alpha)}{h})$(注意$A+B=\pi$),阴影线的总长度$l$为:

(1)当$0<\alpha<B$时,

$$l=\frac{h\sin A}{2\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(n^2-n-(n-\frac{a\sin\alpha}{h})^2-(n-\frac{b\sin(A+\alpha)}{h})^2+[\frac{a\sin\alpha}{h}]+[\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}]+\{\frac{a\sin\alpha}{h}\}^2+\{\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\}^2\right)$$

(2)当$\alpha=0$时,$l=an$;

(3)当$\alpha=B$时,$l\doteq bn$.

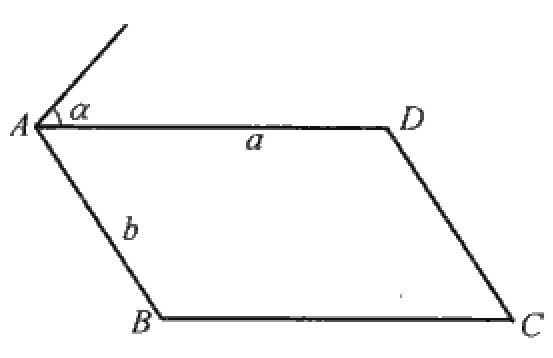


图1

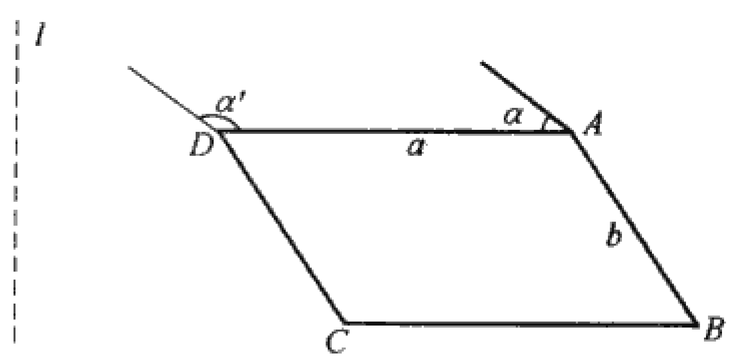


图2

证明 把图 2 沿直线 l 向左翻折即得图 1 的情形，所以下面只证图 1 的情形.

当 $A=\frac{\pi}{2}$ 时，由文献[1]的定理 2 知关于阴影线条数的结论成立；关于阴影线总长度的结论，读者可由以下证法自证.

当 $\alpha=0,B$ 时，易证关于阴影线条线的结论也成立；关于阴影线总长度的结论读者极易证出.

下面证明图 1 中 $A\neq\frac{\pi}{2}$ 且 $\alpha\neq 0$，B 的情形.

Ⅰ. 当 $A<\frac{\pi}{2},\alpha\neq 0,B$ 时.

此时又包含以下三种情形：

（Ⅰ）又 $\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时（如图 3）.

过点 C 作 EF 与阴影线平行，EF 交 AB 于 E，交 AD 于 F.

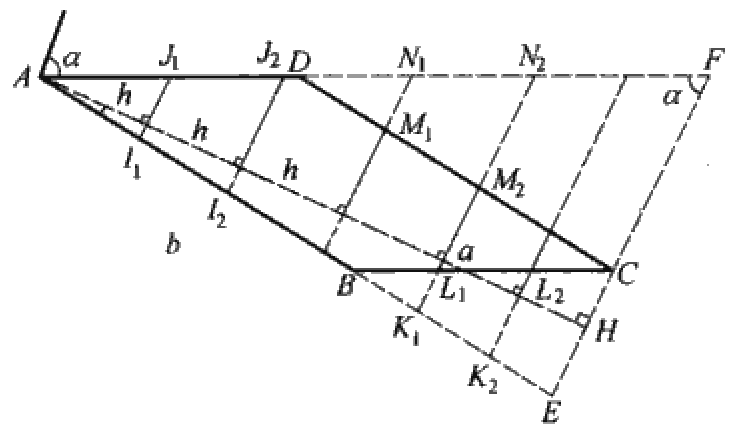


图 3

在 $\triangle BCE$ 中，有 $\frac{a}{\sin(\pi-A-\alpha)}=\frac{BE}{\sin\alpha}$，所以

$$AE=b+\frac{a\sin\alpha}{\sin(A+\alpha)}$$

作 $AH\perp EF$，H 为垂足，因为

$$\angle 1=A+\alpha-\frac{\pi}{2}$$

所以
$$AI_1=\frac{h}{\cos\angle 1}=\frac{h}{\sin(A+\alpha)},AJ_1=\frac{h}{\sin\alpha}$$

所以，此时所画阴影线的条数为

$$n=g\left(\frac{AE}{AI_1}\right)=g\left(\frac{a\sin\alpha+b\sin(A+\alpha)}{h}\right)$$

下面来计算图 3 中 $\square ABCD$ 中阴影线的总长度 l. 显然 $l=\triangle AEF$ 中阴影线的总长度 $l_0-\triangle BCE$ 中阴影线的总长度 $l_1-\triangle DCF$ 中阴影线的总长度 l_2.

因为 $\frac{AI_1}{\sin\alpha}=\frac{I_1J_1}{\sin A}$，所以 $I_1J_1=\frac{h\sin A}{\sin\alpha\sin(A+\alpha)}$，又 $I_2J_2=2I_1J_1,I_3J_3=3I_1J_1,\cdots$，

所以
$$l_0=I_1J_1(1+2+\cdots+n)=\frac{h\sin A}{2\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\cdot n(n+1)$$

因为
$$BK_1=\frac{h}{\sin(A+\alpha)}\left(1-\left\{\frac{b}{\frac{h}{\sin(A+\alpha)}}\right\}\right)$$

所以 $$K_1L_1 = \frac{h\sin A}{\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(1-\left\{\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right\}\right)$$

因为 $$BK_2 = \frac{h}{\sin(A+\alpha)}\left(2-\left\{\frac{b}{\frac{h}{\sin(A+\alpha)}}\right\}\right)$$

所以 $$K_2L_2 = \frac{h\sin A}{\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(2-\left\{\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right\}\right)$$

…

又 $\triangle BEC$ 中阴影线的条数为

$$n_1 = n-\left[\frac{b}{\frac{h}{\sin(A+\alpha)}}\right] = n-\left[\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right]$$

所以

$$l_1 = \frac{h\sin A}{\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(1+2+\cdots+n_1-n_1\left\{\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right\}\right) = \frac{h\sin A}{2\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(\left(n-\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right)^2+n-\left[\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right]-\left\{\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right\}^2\right)$$

因为 $$DN_1 = \frac{h}{\sin\alpha}\left(1-\left\{\frac{a}{\frac{h}{\sin\alpha}}\right\}\right)$$

所以 $$M_1N_1 = \frac{h\sin A}{\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(1-\left\{\frac{a\sin\alpha}{h}\right\}\right)$$

因为 $$DN_2 = \frac{h}{\sin\alpha}\left(1-\left\{\frac{a}{\frac{h}{\sin\alpha}}\right\}\right)$$

所以 $$M_2N_2 = \frac{h\sin A}{\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(2-\left\{\frac{a\sin\alpha}{h}\right\}\right)$$

…

又 $\triangle DCF$ 中阴影线的条数为

$$n_2 = n-\left[\frac{a}{\frac{h}{\sin\alpha}}\right] = n-\left[\frac{a\sin\alpha}{h}\right]$$

所以

$$l_2 = \frac{h\sin A}{\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(1+2+\cdots+n_2-n_2\left\{\frac{a\sin\alpha}{h}\right\}\right) = \frac{h\sin A}{2\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(\left(n-\frac{a\sin\alpha}{h}\right)^2+n-\left[\frac{a\sin\alpha}{h}\right]-\left\{\frac{a\sin\alpha}{h}\right\}^2\right)$$

所以

$$l = \frac{h\sin A}{2\sin\alpha\sin(A+\alpha)}\left(n^2 - n - \left(n - \frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right)^2 - \left(n - \frac{a\sin\alpha}{h}\right)^2 + \left[\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right] + \left[\frac{a\sin\alpha}{h}\right] + \left\{\frac{b\sin(A+\alpha)}{h}\right\}^2 + \left\{\frac{a\sin\alpha}{h}\right\}^2\right)$$

(Ⅱ)又 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时(如图 4).

(Ⅲ)又 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时(如图 5).

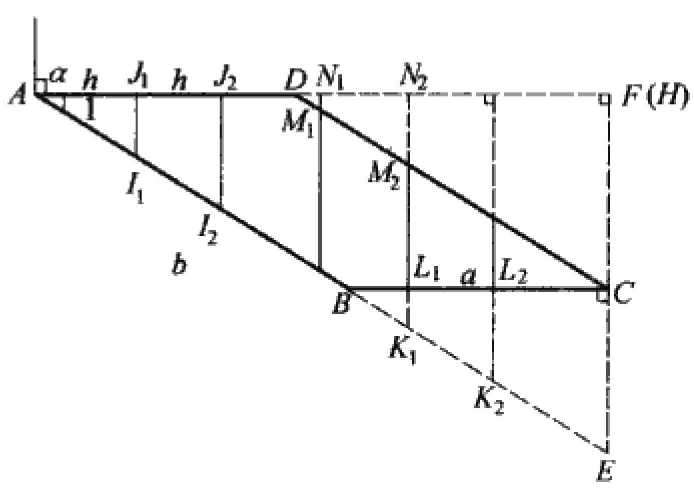


图 4

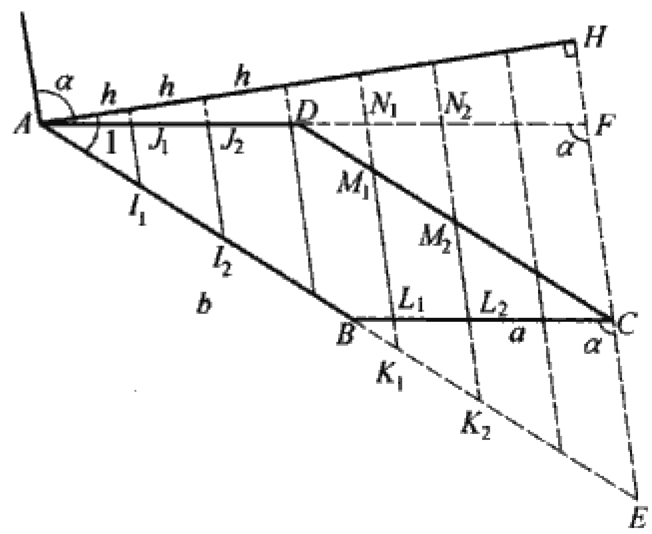


图 5

Ⅱ. 当 $A > \frac{\pi}{2}, \alpha \neq 0, B$ 时(如图 6).

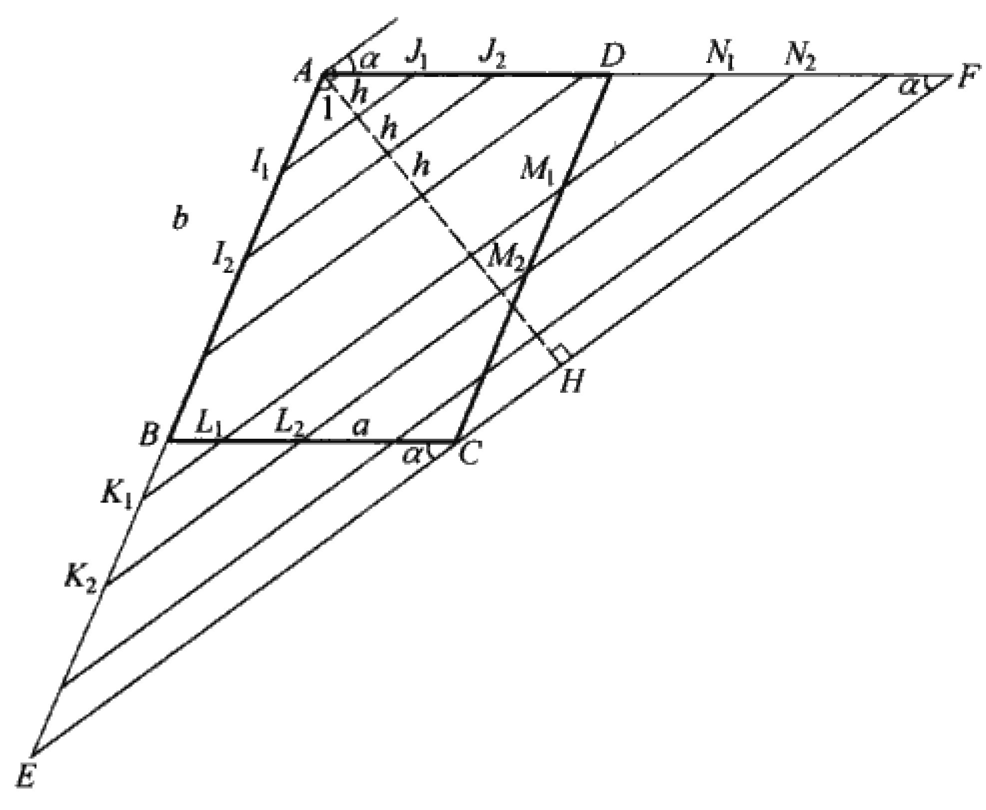


图 6

(Ⅰ)的证明也适合于(Ⅱ),(Ⅲ),Ⅱ 这后三种情形.

综上所述,定理 1 成立.

推论 用与矩形(其一组邻边长为 a,b,a 边水平放置)的 a 边成α 角(α 指阴影线向上的方向与 a 边向右或向左的方向之间的夹角,且 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$)的一组间距为 h 的平行线把这个矩形涂成阴影所需阴影线的条数为 $n=g(\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{h})$,阴影线的总长度 l 为:

(1) 当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时

$$l=\frac{h}{\sin 2\alpha}\left(n^2-n-\left(n-\frac{a\sin\alpha}{h}\right)^2-\left(n-\frac{b\cos\alpha}{h}\right)^2+\left[\frac{a\sin\alpha}{h}\right]+\left[\frac{b\cos\alpha}{h}\right]+\left\{\frac{a\sin\alpha}{h}\right\}^2+\left\{\frac{b\cos\alpha}{h}\right\}^2\right)$$

(2) 当 $\alpha=0$ 时,$l=an=ag(\frac{b}{h})$;

(3) 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时,$l=bn=bg(\frac{a}{h})$.

读者还可考虑以下问题.

问题 当 $\alpha\to0^+$,$\alpha\to B^-$ 时,定理1(推论)(1)中 l 的极限是否分别为(2)中的 an,bn?

定理 2 把图 1 中的 $\square ABCD$ 涂成阴影时:

(1)若$\angle CAD\leqslant\frac{\pi}{2}$,则当阴影线与对角线 AC 垂直时所画阴影线条数最多,最多的条数为 $g(\frac{1}{h}\sqrt{a^2+2ab\cos A+b^2})$;若$\angle CAD>\frac{\pi}{2}$,则当阴影线与 a 边(可证 $a<b$)平行时,所画阴影线条数最多,最多的条数为 $g(\frac{b}{h}\sin A)$.

(2) 当阴影线与平行四边形的较长边平行时所画阴影线条数最少,最少的条数为 $g(\frac{c}{h}\sin A)$(c 是平行四边形的较短边长).

证明 $a\sin\alpha+b\sin(A+\alpha)=(a+b\cos A)\sin\alpha+b\sin A\cos\alpha=$

$$\sqrt{a^2+2ab\cos A+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a+b\cos A}{\sqrt{a^2+2ab\cos A+b^2}}$,$\sin\varphi=\dfrac{b\sin A}{\sqrt{a^2+2ab\cos A+b^2}}$

因为 $0<A<\pi$,所以

$$\cot\varphi=\frac{a+b\cos A}{b\sin A},0<\varphi<\pi$$

再由图 7 ~ 10 的四种情形均可证得 $\varphi=\angle CAD$.

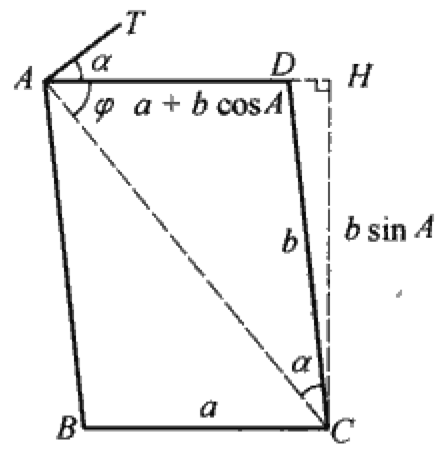


图 7

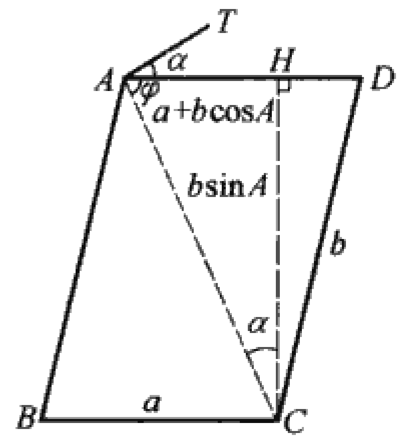


图 8

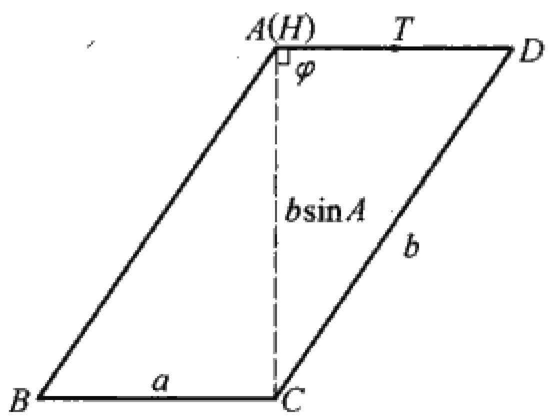


图 9

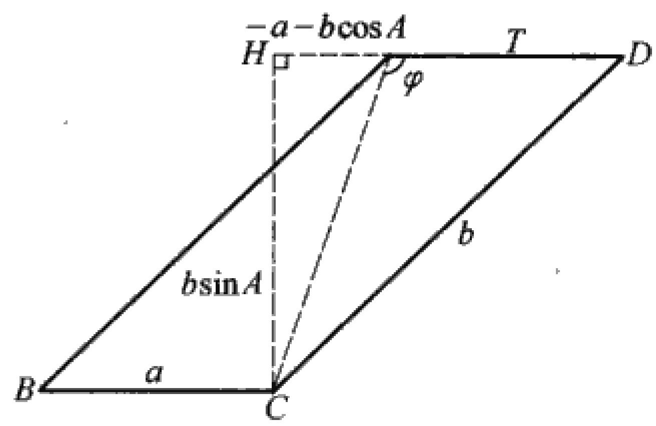


图 10

由定理 1 得,所涂阴影线的条数为

$$n = g\left(\frac{1}{h}\sqrt{a^2 + 2ab\cos A + b^2}\sin(\alpha + \angle CAD)\right)$$

又 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi - A$,$g(x)$ 是 R 上的不减函数,再结合图 7 ~ 10 可证得定理 2 成立.

注 因为 $g(x)$ 不是严格的递增函数,所以不能把定理 2 中的“当”改为“当且仅当”.

当定理 2 中的平行四边形为矩形时,即得文献[1]的定理 3.

参考文献

[1] 甘志国.用等距平行线把平面封闭图形涂成阴影的线段条数及总长度[J].数学通讯,2003(5):26-27.

应区分完全平方式与完全平方数

《数学通报》1991 年 11 月号"问题解答" 的第一道题是:

试求正整数 n,使 $2^{1988}+2^{1991}+2^n$ 是完全平方数.

该刊 1991 年第 12 期给出的解答是:

解 令 $x=2^{994}$,则 $2^{1988}=x^2,2^{1991}=2^{997}x$

$$2^{1988}+2^{1991}+2^n=x^2+2^{997}x+2^n$$

据二次三项式为完全平方式的条件知,其判别式 $\Delta=0$,即

$$(2^{997})^2-4\cdot1\cdot2^n=0,2^n=2^{1992},n=1992$$

从而有 $2^{1988}+2^{1991}+2^{1992}=2^{1986}(2^2+2^5+2^6)=2^{1986}\cdot100=$

$$(2^{993}\cdot)10^2$$

上述解答的结果是正确的(可证本题有唯一解 $n=1992$),但解法不对.

错误的原因是把"完全平方式" 与"完全平方数" 这两个概念混为一谈了.

一般的,应有以下定义:

一个式子若能等于某个整式的平方,则这个式子就叫做完全平方式(见初中教材《代数》第二册(1993 年人民教育出版社) 第 17 页);

一个数若能等于某个有理数的平方,则这个数就叫做完全平方数(见言川编《中学数学手册》(1983 年山西人民出版社) 第 83 页).

由此定义可以看出,两者绝不可混淆.

在上述解答中,题意只要求 $x=2^{994},n\in\mathbf{N}^*$ 时,$x^2+2^{997}x+2^n$ 是完全平方数,并未要求是完全平方式.所以对于上述解答,应提出质疑,本题还有别的答案吗?下面给出本题的完整解答.

解 (1) 若 $n\geqslant1988$,得 $2^{1988}(1+2^3+2^{n-1988})$ 是完全平方数.

所以可设 $$2^{n-1988}+9=x^2(x\in\mathbf{N},x>3)$$

得 $$(x+3)(x-3)=2^{n-1988}$$

可设 $x-3=2^i,x+3=2^{n-1988-i}$,其中 $i,n-1988-i\in\mathbf{N}$

得 $$2^{n-1988-i}-2^i=6,2^i(2^{n-1988-2i}-1)=6$$

得 $$n-1998-2i\geqslant1,2^i=2,2^{n-1988-2i}-1=3$$

所以 $n=1992$,此时 $2^{1988}+2^{1991}+2^n=(2^{994}\cdot5)^2$.

(2) 若 $n<1988$,得 $2^n(9\cdot2^{1988-n}+1)$ 是完全平方数.

① 若 $2 \mid n$，得 $9 \cdot 2^{1988-n} + 1 = y^2 (y \in \mathbf{N}^*)$，由 $y \in \mathbf{N}^*$ 得 y 为奇数，$y > 1$，且

$$\frac{y+1}{2} \cdot \frac{y-1}{2} = (3 \cdot 2^{993-\frac{n}{2}})^2$$

由 y 为奇数，得 $(y+1, y-1) = 2$，$(\frac{y+1}{2}, \frac{y-1}{2}) = 1$，所以 $\frac{y+1}{2} = a^2$，$\frac{y-1}{2} = b^2 (a, b \in \mathbf{N}^*)$，得 $b^2 + 1 = a^2$. 由勾股数组知这不可能！即此时 $2^{1988} + 2^{1991} + 2^n$ 不为完全平方数.

② 若 $2 \nmid n$，得 $9 \cdot 2^{1988-n} + 1 = 2z^2 (z \in \mathbf{N}^*)$，所以 $2 \nmid 9 \cdot 2^{1988-n}$，$n = 1988$，与 $n < 1988$ 矛盾！说明此时 $2^{1988} + 2^{1991} + 2^n$ 也不为完全平方数.

综上所述，当且仅当 $n = 1992$ 时，$2^{1988} + 2^{1991} + 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 是完全平方数.

关于本文的一般情形，读者还可参见注释①.

① 甘志国. 浅探 $2^a \pm 2^b \pm 2^c$ 为完全平方数的条件 // 傅海伦. 中国教育优秀论文集. 天津：天津社会科学院出版社，1998.

素数与二元平方和数的整除性

1 问题及变形

本文研究素数 p 与二元平方和数 mx^2+ny^2(m,n 是已知的整数,$m\in\mathbf{N}^*$,$n\neq 0,p\nmid m,p\nmid n$)的整除性:对于哪些素数 p,存在互素的 x,y,使 $p\mid mx^2+ny^2$?对于哪些素数 p,不存在互素的 x,y,使 $p\mid mx^2+ny^2$?

定理 1 若 $(p,m)=(p,n)=1$,则

(1) $\forall(x_1,y_1)=1$ 有 $p\nmid mx_1^2+ny_1^2\Leftrightarrow\forall(x_2,y_2)=1$ 有 $p\nmid x_2^2+mny_2^2$;

(2) $\exists(x_1,y_1)=1$ 使 $p\mid mx_1^2+ny_1^2\Leftrightarrow\exists(x_2,y_2)=1$ 有 $p\mid x_2^2+mny_2^2$.

证明 (1)与(2)互为逆否命题,所以只证(2).

$\Rightarrow$ 由 $p\mid mx_1^2+ny_1^2$,得 $p\mid(mx_1)^2+mny_1^2$.设 $(mx_1,y_1)=(m,y_1)=d$,$mx_1=dx,y_1=dy,(x,y)=1$.由 $(p,m)=1$,得 $(p,d)=1$.$p\mid d^2(x^2+mny^2)$,$p\mid x^2+mny^2$,即 $\exists(x_2,y_2)=1$ 使 $p\mid x_2^2+mny_2^2$.

$\Leftarrow$ 同理可证.

由定理 1 知,讨论素数 p 与二元平方和数 mx^2+ny^2 的整除性,只需看 $m=1$ 的情形.具体地说,包括:

问题 1 p 是奇素数,$n\in\mathbf{N}^*$,对于哪些 p,$\exists(x,y)=1$,使 $p\mid x^2+ny^2$?

问题 2 p 是奇素数,$n\in\mathbf{N}^*$,$n\geqslant 2$,对于哪些 p,$\exists(x,y)=1$,使 $p\mid x^2-ny^2$?

下文中未注明的字母均表示整数.

2 整除性的判定

定理 2 设 p 是素数,$(p,m)=(p,n)=1$,则

(1) $\forall(x,y)=1$ 有 $p\nmid mx^2+ny^2\Leftrightarrow\forall z$ 有 $p\nmid mz^2+n$;

(2) $\exists(x,y)=1$ 使 $p\mid mx^2+ny^2\Leftrightarrow\exists z$ 使 $p\mid mz^2+n$.

证明 只证(2)的 $\Rightarrow$:

由 $p\mid mx^2+ny^2$,得 $(p,y)=1$.

所以存在 u,v,使 $yu+pv=x$,$p\mid x-yu$,$p\mid mx^2-my^2u^2$.

又 $p\mid mx^2+ny^2$,所以 $p\mid mu^2+n$,即 $\exists z$ 使 $p\mid mz^2+n$.

定理 3 设 $\{p_k\}$ 是一列从小到大的奇素数(不一定包括全部奇素数),

$(p_k, m) = (p_k, n) = 1, r = 1,2,\cdots,\frac{p_k-1}{2}$ 时，有

(1) $p_1 \nmid mr^2 + n$;

(2) 若 $p_k \mid mr^2 + n$，可得 $mr^2 + n = p_k p_l Q$（p_l 是 $\{p_k\}$ 中的项），$l < k$.

则当 $(x, y) = 1$ 时，$p_k \nmid mx^2 + ny^2$.

证明 由定理 2，只需证 $\forall z$ 有 $p_k \nmid mz^2 + n$.

可设 $z = p_k t \pm r', r' = 0,1,2,\cdots,\frac{p_k-1}{2}$. 要证 $p_k \nmid mz^2 + n$，只需证 $p_k \nmid mr'^2 + n$. 由 $(p_k, n) = 1$ 知 $r' = 0$ 时成立. 所以只证 $r' = r$ 时成立即可：$p_k \nmid mr^2 + n$. 以下对 k 用数学归纳法来证：

由 (1) 知 $k = 1$ 时成立.

假设小于 k 时成立. 若 k 时不成立，得 $p_k \mid mr^2 + n$，由 (2) 得 $mr^2 + n = p_k p_l Q, l < k$，由"假设小于 k 时成立"，得 $p_l \nmid mr^2 + n$，前后矛盾！所以 k 时成立. 定理 3 获证.

推论 1 设 $\{p_k\}$ 是一列从小到大的奇素数，$n \in \mathbf{N}^*$，$(p_k, n) = (x, y) = 1$，$r = 1,2,\cdots,\frac{p_k-1}{2}$ 时，有

(1) $p_1 \nmid r^2 + n$，且小于 $\sqrt{\frac{4}{3}n}$ 的素数 p_k 均有 $p_k \nmid r^2 + n$;

(2) 若 $p_k \mid r^2 + n$，可得 $r^2 + n = p_k p_l Q$，

则

$$p_k \nmid x^2 + ny^2$$

证明 只证 (2) 中的 $l < k$ 即可.

由 (1) 可得 (2) 中的 $p_k \geqslant \sqrt{\frac{4}{3}n}$，所以 $(\frac{p_k}{2})^2 + n \leqslant p_k^2$，又 $r < \frac{p_k}{2}$，所以

$$p_k p_l Q = r^2 + n < (\frac{p_k}{2})^2 + n \leqslant p_k^2$$

（因为 $Q \neq 0$，所以 $Q \geqslant 1$），$p_l < p_k, l < k$.

推论 2 设 $\{p_k\}$ 是一列从小到大的奇素数，$n \in \mathbf{N}^*$，$n \neq r^2$，$(p_k, n) = (x, y) = 1, r = 1,2,\cdots,\frac{p_k-1}{2}$ 时，有

(1) $p_1 \nmid r^2 - n$，且小于 $\sqrt{n}$ 的素数 p_k 均有 $p_k \nmid r^2 - n$;

(2) $p_k \mid r^2 - n$ 时可得 $r^2 - n = p_k p_l Q$，

则 $p_1 \nmid x^2 - ny^2$.

证明 只证 (2) 中的 $l < k$.

由 (1) 可得，(2) 中的 $p_k \geqslant \sqrt{n}, n - p_k^2 \leqslant 0$，又 $r^2 > 0$，所以 $r^2 > n - p_k^2$，

$-p_k^2<r^2-n$,又 $r^2<(\frac{p_k}{2})^2$,得 $r^2-n<p_k^2$,所以 $-p_k^2<r^2-n<p_k^2$,即 $|r^2-n|<p_k^2$,$p_kp_l\mid Q\mid<p_k^2$.又 $Q\neq 0$,所以 $|Q|\geqslant 1$,得 $p_l<p_k$,$l<k$.

下面再把推论 1,2 变得更适用些.

参见文献[1]第 169 ~ 176 页,得

当 $m>2$时,$\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm[\frac{m}{2}]$中与 m 互素的数的全体,记为 $T=\{\pm t_1,\pm t_2,\cdots,\pm t_{k_0}\}$(注意,这里 $t_1,\cdots,t_{k_0}$ 可正可负),其中 $k_0=\frac{1}{2}\varphi(m)$,$\varphi(m)$ 为 T 的基数,叫做 Euler 函数,有 $2\mid\varphi(m)$,$4\mid\varphi(4m)$,T 叫做模 m 的绝对最小缩系.对于 T 还有 $t_i\neq 0$,$|t_i|<\frac{m}{2}$,$\forall i\neq j$ 有 $|t_i|\neq|t_j|$,$t_i\not\equiv t_j\pmod m$.所有的素数均可表示为 $mt\pm t_1,\cdots$,或 $mt\pm t_{k_0}$ 的形式.

引理 设 $m>2$,模 m 的绝对最小缩系为$T=\{\pm t_i\mid i=1,2,\cdots,k_0;k_0=\frac{1}{2}\varphi(m)\}$,记 $S\subset T$,$S=\{S_1,\cdots,S_{k_0}\}$,S 满足条件

$$\forall S_i,S_j\in S \text{ 有 } S_i\cdot S_j\equiv S_{i_1}\pmod m,S_{i_1}\in S \quad ①$$

则 S 满足以下条件

$$\forall k \text{ 个数 } S_{i_1},\cdots,S_{i_k}\in S,\text{有 } S_{i_1}\cdots S_{i_k}\equiv S_r\pmod m,S_r\in S \quad ②$$

$\forall S_k\in S$,若 T 中的三个数 $S_{k_1},S_{k_2},S_{k'}$ 满足

$$S_{k_1}S_k\equiv S_{k'},S_{k_2}S_k\equiv S_{k'}\pmod m,\text{则 } S_{k_1}=S_{k_2} \quad ③$$

$\forall S_{k_1},S_{k_2}\in S$,均 $\exists$ 唯一的

$$S_k\in S,\text{使 } S_{k_1}S_k\equiv S_{k_2}\pmod m \quad ④$$

证明 用①$k-1$次可得②.

可得 $S_k(S_{k_1}-S_{k_2})\equiv 0\pmod m$,$S_{k_1}\equiv S_{k_2}\pmod m$,$S_{k_1}=S_{k_2}$,即③成立.

由①得,$\forall S_{k'}\in S$,有 $S_1S_{k'}\equiv S_{i_1},\cdots,S_{k_0}S_{k'}\equiv S_{i_{k_0}}\pmod m$,又由③知 $i_1,\cdots,i_{k_0}$ 是 $1,\cdots,k_0$ 的一个排列,从而 $\forall S_{k_1},S_{k_2}\in S$,$\exists S_k\in S$,使 $S_{k_1}S_k\equiv S_{k_2}\pmod m$,再由③知 S_k 是唯一的.

对于问题 1,有以下适用的

定理 4 设 $n_0,n\in\mathbf{N}^*$,$n_0n>2$,模 n_0n 的绝对最小缩系

$$T=\{\pm t_i\mid i=1,\cdots,k_0(k_0=\frac{1}{2}\varphi(n_0n))\}$$

$$S\subset T,S=\{S_i\mid i=1,\cdots,k_0\}$$

且 $\forall S_i,S_j\in S$,有 $S_i+S_j\neq 0$,S 满足①.$\{p_k\}$ 是一列所有从小到大的形如

$n_0nl - s_i$ 的素数,$(p_k,n) = (x,y) = 1, r = 1,2,\cdots,\frac{p_k - 1}{2}$ 时,有

(1)$p_1 \nmid r^2 + n$,且小于$\sqrt{\frac{4}{3}n}$ 的素数 p_k 均有 $p_k \nmid r^2 + n$;

(2)$r^2 + n = l(n_0nl_1 + S_j)$,$l = 1$ 或只含 n_0n 的素因数,$S_j \in S$,

则
$$p_k \nmid x^2 + ny^2$$

证明 由推论 1,只证

若 $p_k \mid r^2 + n$,可得 $r^2 + n = p_kp_lQ$.

显然$(s_i,n_0n) = 1$,所以$(p_k,n_0n) = 1,(p_k,l) = 1$.

若 $p_k \mid r^2 + n$,得 $p_k \mid n_0nl_1 + s_j$,设 $n_0nl_1 + s_j = p_kQ'$.假设 Q' 没有 $n_0nl - s_i$ 形素因数,则 Q' 为 $n_0nl + s_i$ 形素数的乘积,即

$$n_0nl_1 + s_j = (n_0nl - s_{i_0})(n_0nl_1 + s_1)^{\alpha_1}\cdots(n_0nl_{k_0} + s_{k_0})^{\alpha_{k_0}}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{k_0} \in \mathbf{N}$,但不会全为 0,$p_k = n_0nl - s_{i_0}$.

所以
$$n_0nl_1 + s_j = n_0nl_2 - s_{i_0}s_1^{\alpha_1}\cdots s_{k_0}^{\alpha_{k_0}}$$

得
$$s_j \equiv - s_{i_0}s_1^{\alpha_1}\cdots s_{k_0}^{\alpha_{k_0}} (\mathrm{mod}\ n_0n)$$

又由 ② 可得 $s_j \equiv - s_{j_0}(\mathrm{mod}\ n_0n)$,$s_{j_0} \in S$,$- s_{j_0} \in T$.所以 $s_j = - s_{j_0}$,$s_j + s_{j_0} = 0$,这与题设矛盾!所以 $Q' = p_lQ$,$r^2 + n = p_kp_lQ$.

推论 3 定理 4 中 $n_0 = 1$ 的情形.(适用于 n 为 $4m - 1(m \in \mathbf{N}^*)$ 形数的情形,在(2) 中可设 $r = nl' \pm r'(r' = 0,1,\cdots,\frac{n-1}{2})$ 进行验证.)

推论 4 定理 4 中 $n_0 = 4$ 的情形.(适用于 n 为任意数,在(2) 中可设 $r = 2nt' \pm r'(r' = 0,1,\cdots,n)$ 进行验证.)

对于问题 2,也有适用的

定理 5 设 $n_0,n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 2, n \neq r^2, 4 \mid \varphi(n_0n)$,模 n_0n 的绝对最小缩系 $T = \{\pm t_i \mid i = 1,\cdots,k_0(k_0 = \frac{1}{2}\varphi(n_0n))\}$,$S \subset T$,$S = \{\pm s_i \mid i = 1,\cdots,k_1(k_1 = \frac{1}{2}k_0)\}$,$S$ 满足条件 ①,$R = \complement_T S = \{\pm r_i \mid i = 1,\cdots,k_1\}$.$\{p_k\}$ 是一列所有从小到大的形如 $n_0nl \pm r_i$ 形素数,$(p_k,n) = (x,y) = 1, r = 1,2,\cdots,\frac{p_k - 1}{2}$ 时,有

(1)$p_1 \nmid r^2 - n$,且小于$\sqrt{n}$ 的素数 p_k 均有 $p_k \nmid r^2 - n$;

(2)$r^2 - n = l(n_0nl_1 \pm s_j)$,$l = 1$ 或只含 n_0n 的素因数,$s_j \in S$,

则
$$p_k \nmid x^2 - ny^2$$

证明 由推论 2,只证

若 $p_k \mid r^2 - n$,可得 $r^2 - n = p_k p_l Q$.

若 $p_k \mid r^2 - n$,同定理4的证明,有 $p_k \mid n_0 n l_1 \pm s_j$,设 $n_0 n l_1 \pm s_j = p_k Q'$.假设 Q' 没有 $n_0 n l \pm r_i$ 形素因数,则 Q' 为 $n_0 n l \pm s_i$ 形素数的积,即

$$n_0 n l_1 \pm s_j = (n_0 n \pm r_{i_0})(n_0 n l_1 + s_1)^{\alpha_1}(n_0 n l_2 - s_1)^{\alpha_2}\cdots(n_0 n l_{k_0} - s_{k_1})^{\alpha_{k_0}}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{k_0} \in \mathbf{N}$,但不会全为0,$p_k = n_0 n l \pm r_{i_0}$.

所以

$$n_0 n l_1 \pm s_j = n_0 n l_2 \pm r_{i_0} s_1^{\alpha_1}(-s_1)^{\alpha_2}\cdots(-s_{k_1})^{\alpha_{k_0}}(+,-\text{号无序})$$

所以 $$\pm s_j \equiv r_{i_0} s_1^{\alpha_1}(-s_1)^{\alpha_2}\cdots(-s_{k_1})^{\alpha_{k_0}} \pmod{n_0 n}$$

又由 ② 可得 $\pm s_j \equiv s_{j_1} r_{i_0} \pmod{n_0 n}$,$s_{j_1} \in S$

又由 ③ 得,$\exists s_{j_2} \in S$,使 $s_{j_1} s_{j_2} = \pm s_j$(+,-号与上行一致),得 $r_{i_0} = s_{j_2}$,这不可能!所以假设错误,得 $r^2 - n = p_k p_l Q$.

推论5 定理5中 $n_0 = 1$ 的情形.(适用于 n 为 $4m+1(m \in \mathbf{N}^*)$ 形数的情形,在(2)中可设 $r = nl' \pm r'(r' = 0,1,\cdots,\frac{n-1}{2})$ 进行验证.)

推论6 定理5中 $n_0 = 4$ 的情形.(适用于 n 为任意数,在(2)中可设 $r = 2nl' \pm r'(r' = 0,1,\cdots,n)$ 进行验证.)

3 整除性举例及可表性猜测

推论3～6是解决问题1,2的有效方法,还可证得

定理6 若 p 是素数,$n,a \in \mathbf{N}^*$,$(p,na^2) = 1$,则

(1) $\forall (x,y) = 1$ 有 $p \nmid x^2 \pm ny^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) = 1$ 有 $p \nmid x^2 \pm na^2y^2$;

(2) $\exists (x,y) = 1$ 使 $p \mid x^2 \pm ny^2 \Leftrightarrow \exists (x,y) = 1$ 有 $p \mid x^2 \pm na^2y^2$.

证明 只证(2).

$\Rightarrow$ 可得 $(p,y) = 1, p \mid (ax)^2 \pm na^2y^2$.

设 $(ax,y) = d$,有 $(p,d) = 1$,$(\frac{ax}{d},\frac{y}{d}) = 1$,$p \mid (\frac{ax}{d})^2 \pm na^2(\frac{y}{d})^2$

$\Leftarrow$ 得 $p \mid x^2 \pm n(ay)^2$.设 $(x,ay) = (x,a) = d$,有 $(p,d) = 1$,所以 $\exists (x_1,y_1) = 1$,使 $p \mid x_1^2 \pm ny_1^2$.

由定理6知,研究系数 p 与二元平方和数 $mx^2 + ny^2$ 的整除性,只需研究问题1,2中 n 无大于1的平方因子的情形.

下面给出了问题1,2的一些结论(读者可用推论3～6给予验证),并给出了可表性的若干猜测.

3.1 奇素数 p 与 $x^2 + ny^2$ 的整除性

约定:以下不整除时均包括条件 $(p,n) = (x,y) = 1$.

结论 1 若 p 是 $4l-1$ 形素数,则 $p \nmid x^2+y^2$;$4l+1$ 形素数能唯一的表示成 a^2+b^2.

结论 2 若 p 是 $8l-s(s=1,3)$ 形素数,则 $p \nmid x^2+2y^2$.

猜测 2 $8l+s(s=1,3)$ 形素数能唯一的表示成 a^2+2b^2.

结论 3 若 p 是 $3l-1$ 形素数,则 $p \nmid x^2+3y^2$.

猜测 3 $3l+1$ 形素数能唯一的表示成 a^2+3b^2.

结论 4 若 p 是 $20l-s(s=1,3,7,9)$ 形素数,则 $p \nmid x^2+5y^2$.

猜测 4 $20l+1,20l+9$ 形素数能唯一的表示成 a^2+5b^2;$20l+3,20l+7$ 形素数的 2 倍,3 倍均能唯一的表示成 a^2+5b^2.

结论 5 若 p 是 $24l-s(s=1,5,7,11)$ 形素数,则 $p \nmid x^2+6y^2$.

猜测 5 $24l+1,24l+7$ 形素数能唯一的表示成 a^2+6b^2;$24l+5,24l+11$ 形素数的 2 倍,3 倍均能唯一的表示成 a^2+6b^2,而 5 倍有两种这样的表示.

结论 6 若 p 是 $7l-s(s=1,2,-3)$ 形素数,则 $p \nmid x^2+7y^2$.

猜测 6 $7l+s(s=1,2,-3)$ 形素数及其 8 倍均能唯一的表示成 a^2+7b^2.

结论 7 若 p 是 $40l-s(s=1,-3,7,9,11,13,-17,19)$ 形素数,则 $p \nmid x^2+10y^2$.

猜测 7 $40l+s_1(s_1=1,9,11,19)$ 形素数均能唯一的表示成 a^2+10b^2;$40l+s_2(s_2=-3,7,13,-17)$ 形素数的 2 倍,5 倍均能唯一的表示成 a^2+10b^2,而 7 倍有两种这样的表示.

结论 8 若 p 是 $11l-s(s=1,-2,3,4,5)$ 形素数,则 $p \nmid x^2+11y^2$.

猜测 8 $11l+s$(s 同上)形素数的 4 倍能唯一的表示成 a^2+11b^2;其 12 倍,20 倍均有两种这样的表示.

结论 9 若 p 是 $52l-s(s=1,-3,-5,7,9,11,15,17,19,-21,-23,25)$ 形素数,则 $p \nmid x^2+13y^2$.

猜测 9 $52l+s_1(s_1=1,-3,9,17,-23,25)$ 形素数能唯一的表示成 a^2+13b^2;$52l+s_2(s_2=-5,7,11,15,19,-21)$ 形素数的 2 倍能唯一的表示成 a^2+13b^2,其 7 倍,11 倍均有两种这样的表示.

结论 10 若 p 是 $56l-s(s=1,3,5,9,-11,13,15,-17,19,23,25,27)$ 形素数,则 $p \nmid x^2+14y^2$.

结论 11 若 p 是 $15l-s(s=1,2,4,-7)$ 形素数,则 $p \nmid x^2+15y^2$.

3.2 奇素数 p 与 x^2-ny^2 的整除性

结论 1′ 若 p 是 $8l\pm3$ 形素数,则 $p \nmid x^2-2y^2$.

猜测 1′ $8l\pm1$ 形素数能唯一的表示成 a^2-2b^2,也能唯一的表示成 $2a^2-b^2$.

结论 2′ 若 p 是 $12l\pm5$ 形素数,则 $p\nmid x^2-3y^2$.

猜测 2′ $12l-1$ 形素数能唯一的表示成 $3a^2-b^2$,其2倍能唯一的表示成 a^2-3b^2;$12l+1$ 形素数能唯一的表示成 a^2-3b^2,其2倍能唯一的表示成 $3a^2-b^2$.

结论 3′ 若 p 是 $5l\pm2$ 形素数,则 $p\nmid x^2-5y^2$.

猜测 3′ $5l\pm1$ 形素数能唯一的表示成 a^2-5b^2,也能唯一的表示成 $5a^2-b^2$.

结论 4′ 若 p 是 $24l\pm r(r=7,11)$ 形素数,则 $p\nmid x^2-6y^2$.

结论 5′ 若 p 是 $28l\pm r(r=5,11,13)$ 形素数,则 $p\nmid x^2-7y^2$.

猜测 5′ $28l+s(s=1,-3,9)$ 形素数及其2倍均能唯一的表示成 a^2-7b^2,其3倍能唯一的表示成 $7a^2-b^2$;$28l-s(s=1,-3,9)$ 形素数及其2倍均能唯一的表示成 $7a^2-b^2$,其3倍能唯一的表示成 a^2-7b^2.

结论 6′ 若 p 是 $40l\pm r(r=7,11,17,19)$ 形素数,则 $p\nmid x^2-10y^2$.

结论 7′ 若 p 是 $44l\pm r(r=3,13,15,17,21)$ 形素数,则 $p\nmid x^2-11y^2$.

猜测 7′ $44l-s(s=1,5,-7,9,19)$ 形素数及其5倍均能唯一的表示成 $11a^2-b^2$,其2倍,7倍均能唯一的表示成 a^2-11b^2;$44l+s$(s 同前)形素数及其5倍均能唯一的表示成 a^2-11b^2,其2倍,7倍均能表示成 $11a^2-b^2$.

参考文献

[1] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.

不定方程



推广的安道什猜想的全相等的解

安道什猜想 没有大于 1 的奇数 x, y, z，使 $x^x \cdot y^y = z^z$.

推广的安道什猜想 没有大于 1 的奇数 $x_i(i = 1,2,\cdots,k; k \geqslant 2), z$，使 $\prod\limits_{i=1}^{k} x_i^{x_i} = z^z$.

注释① 早已否定了推广的安道什猜想，文献[1] 证明了推广的安道什猜想中的不定方程

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{x_i} = z^z (k \geqslant 2, x_i(i = 1,2,\cdots,k; k \geqslant 2) \text{ 及 } z \text{ 均是大于 1 的奇数}) \quad ①$$

在 k 为大于 2 的偶数时，① 有全相等的解（“全相等”是指 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$，下同），并问：k 为哪些奇数时，① 有全相等的解？

本文先求出不定方程

$$(x_1^{x_1})^k = z^z (k \geqslant 2, k \in N, x_1, z \text{ 均是大于 1 的整数}) \quad ②$$

的全部解（从而可以求出推广的安道什猜想中方程的全相等的解）.

因为 x_1, z 均是大于 1 的整数，所以可设 $x_1 = \prod\limits_{i=1}^{l} p_i^{\alpha_i}(l \in \mathbf{N}^*, p_i(i = 1,2,\cdots,l)$ 是互不相同的素数，$\alpha_i \in \mathbf{N}), z = \prod\limits_{i=1}^{l} p_i^{\gamma_i}(\gamma_i \in \mathbf{N})$，得

$$\prod_{i=1}^{l} p_i^{k\alpha_i \prod_{i=1}^{l} p_i^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^{l} p_i^{\gamma_i \prod_{i=1}^{l} p_i^{\gamma_i}}$$

所以

$$k\alpha_i \prod_{i=1}^{l} p_i^{\alpha_i} = \gamma_i \prod_{i=1}^{l} p_i^{\gamma_i} (i = 1,\cdots,l)$$

$$k = \frac{\gamma_i}{\alpha_i} \prod_{i=1}^{l} p_i^{\gamma_i - \alpha_i}$$

得

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{\gamma_l}{\alpha_l}$$

因为 $k \geqslant 2$，所以 $x_1 < z$.

又设 $\frac{\gamma_i}{\alpha_i} = \frac{\gamma}{\alpha}(\gamma, \alpha) = 1, \gamma, \alpha \in \mathbf{N}, \gamma_i = \gamma d_i, \alpha_i = \alpha d_i, d_i \in \mathbf{N}^*$. 由 $x_1 < z$，

① 陶鹏. 安道什猜想的推广的反例. 数学通讯，1988(1).

得 $\alpha < \gamma$,设 $\beta = \gamma - \alpha$,得 $\beta \in \mathbf{N}^*$.又设 $\prod_{i=1}^{l} p_i^{d_i} = a$,得 $a \in \mathbf{N}^*, a > 1$.

有　　$x_1 = \prod_{i=1}^{l} p_i^{\alpha_i} = (\prod_{i=1}^{l} p_i^{d_i})^{\alpha} = a^{\alpha}, z = \prod_{i=1}^{l} p_i^{\gamma_i} = a^{\alpha+\beta}$

$$k = \frac{\gamma_i}{\alpha_i}\prod_{i=1}^{l} p_i^{\gamma_i - \alpha_i} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha}\cdot a^{\beta}$$

因为 $k \in \mathbf{N}, (\alpha,\beta) = 1$,所以 $\alpha \mid a^{\beta}$.

从而,得

定理 1　不定方程②的全部解是 $x_1 = a^{\alpha}, z = a^{\alpha+\beta}, k = \frac{\beta+\alpha}{\alpha}\cdot a^{\beta}$.其中 $a,\alpha,\beta \in \mathbf{N}^*, a > 1, (\alpha,\beta) = 1, \alpha \mid a^{\beta}$.

定理 1′　不定方程②的全部解是

$$x_1 = (\prod_{i=1}^{l} p_i^{d_i})^{\prod_{i=1}^{l} p_i^{e_i}}, z = (\prod_{i=1}^{l} p_i^{d_i})^{\beta + \prod_{i=1}^{l} p_i^{e_i}}, k = (\prod_{i=1}^{l} p_i^{d_i})^{\beta} + \beta\prod_{i=1}^{l} p_i^{\beta d_i - e_i}$$

其中 $l \in \mathbf{N}^*, d_i, \beta \in \mathbf{N}, p_i(i = 1,\cdots,l)$ 是互不相同的素数,$e_i \in \mathbf{Z}, e_i \leqslant \beta d_i$,$(\prod_{i=1}^{l} p_i^{e_i}, \beta) = 1$.

在定理 1′ 中,选 $e_i = \beta d_i (i = 1,\cdots,l)$,得

推论 2　$x_1 = a^{a^{\beta}}, z = a^{\beta + a^{\beta}}, k = \beta + a^{\beta} (a,\beta \in \mathbf{N}, a > 1)$ 是②的解.

我们再来研究不定方程

$$(x_1^{x_1})^k = z^z (k \geqslant 2, k, z \in \mathbf{N}, x_1 \text{ 是大于 1 的奇数}) \qquad ③$$

在推论 2 中令 $\beta = 1$,得

推论 3　$x_1 = (k-1)^{k-1}, z = (k-1)^k$($k$ 是大于 2 的偶数)是③的解.

由推论 3 知,k 是大于 2 的偶数时,③均有解.而 $k = 2$ 时,③没有解(若有解,则可得 z 是偶数,而 x_1 是奇数,应得 z 是奇数).

关于文献[2]提出的问题:

对于哪些奇数 k,③有解?

本文只能给出一些初步解答.

推论 4　(1)若 k 是奇数,则当且仅当 $k = \frac{\beta+\alpha}{\alpha}\cdot a^{\beta} (a,\alpha,\beta \in \mathbf{N}^*, a > 1, 2 \nmid a, 2 \mid \beta, (\alpha,\beta) = 1, \alpha \mid a^{\beta})$ 时③有解,且解为:$x_1 = a^{\alpha}, z = a^{\alpha+\beta}$.($k$ 为已知的常数时,③的解为有限组)

(2)当奇数 $k = a^{2\beta_0} + 2\beta_0 (a,\beta_0 \in \mathbf{N}^*, a > 1, 2 \nmid a)$ 时,③有解:$x_1 = a^{a^{2\beta_0}}$,$z = a^{2\beta_0 + a^{2\beta_0}}$.

推论 5　若 k 是小于 100 的奇素数,则当且仅当 $k = 11, 83$ 时③有解,且

$k=11$ 时,$x_1=3^9$;$z=3^{11}$;$k=83$ 时,$x_1=9^{81}$,$z=9^{83}$.

证明 用定理1来证.因为 $k=\frac{\beta+\alpha}{\alpha}\cdot a^{\beta}$ 是奇素数,所以 $\alpha+\beta=k$,$\frac{a^{\beta}}{\alpha}=1$,得 $a^{\beta}+\beta=k$.

因为 k 是奇素数,a 是奇数,所以 $2\mid\beta$.可证 $\beta=2,4$(若 $\beta\geqslant 6$,得 $a^{\beta}+\beta\geqslant 3^6+6>100$).

若 $\beta=2$,可得 $a=3$,$\alpha=a^{\beta}=9$,$k=11$;或 $a=9$,$\alpha=81$,$k=83$.

$\beta=4$ 时无解.

由定理1,还可证得

推论6 若 k 是小于30的奇数,则当且仅当 $k=11,15,27$ 时③有解,且 $k=11$ 时,$x_1=3^9$,$z=3^{11}$;$k=15$ 时,$x_1=3^3$,$z=3^5$;$k=27$ 时,($x_1=3$,$z=27$)或($x_1=5^{25}$,$z=5^{27}$).

另外,文献[2]在叙述安道什猜想及其推广时,应把"正奇数"改为"大于1的正奇数",文献[2]第25页右栏第13行中第一处"p_1"应改为"r_1".

定理2 当奇数 $k=a^a$(奇数 $a>1$)时,③有解:$x_1=a$,$z=a^a$.

参考文献

[1] 陶鹏.安道什猜想的推广奇数解问题的几个新结论[J].数学通讯,1999(3):25-26.

安道什猜想的类似的推广的全相等正整数解

文献[1]提出了

安道什猜想的类似的推广

方程
$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{x_i} = z^z (k \geqslant 2) \quad ①$$
没有正整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_k, z)$.

文献[1]还把方程①满足$x_1 = x_2 = \cdots = x_k$的正整数解叫做全相等的正整数解,要研究这种解,即要求出下面不定方程的正整数解:
$$k \cdot \alpha^\alpha = z^z (k \geqslant 2) \quad ②$$

文献[1]的定理3解决了$\alpha \mid z$的情形,本文将解决一般情形(从而解决了文献[1]提出的问题):

若(k, α, z)是方程②的正整数解:

又设$(\alpha, z) = d$,得$\alpha = \alpha_1 d, z = z_1 d, (\alpha_1, z_1) = 1$,此时方程②即
$$k \cdot (\alpha_1 d)^{\alpha_1 d} = (z_1 d)^{z_1 d}$$
$$k \cdot \alpha_1^{\alpha_1 d} = z_1^{z_1 d} \cdot d^{(z_1 - \alpha_1) d}$$

由文献[1]的推论,得$z > \alpha$,所以$z_1 > \alpha_1$.

又$(\alpha_1, z_1) = 1$,所以$\alpha_1^{\alpha_1 d} \mid d^{(z_1 - \alpha_1) d}$,即$\alpha_1^{\alpha_1} \mid d^{z_1 - \alpha_1}$.

从而,可得

定理 设$(\alpha, z) = d, \alpha = \alpha_1 d, z = z_1 d, (\alpha_1, z_1) = 1$则方程②有正整数解的充要条件是$z_1 > \alpha_1$且$\alpha_1^{\alpha_1} \mid d^{z_1 - \alpha_1}$,并且②有正整数解时的全部正整数解为$k = (z_1^{z_1} \cdot \frac{d^{z_1 - \alpha_1}}{\alpha_1^{\alpha_1}})^d, \alpha = \alpha_1 d, z = z_1 d, (\alpha_1, z_1) = 1$.

在定理中令$d = \alpha$,得$\alpha_1 = 1$,又令$z_1 = m$,便得文献[1]的定理3.

由定理还可得到文献[1]列出的方程②的解$(k, \alpha, z) = (3^{12}, 8, 12)$, $(2^{10} \cdot 3^{36}, 4, 18)$, $(2^8 \cdot 3^{24}, 16, 24)$, $(2^{72} \cdot 3^6, 9, 24)$.

推论 方程②满足$(\alpha, z) = 1$的全部正整数解为$\alpha = 1, k = z^z$.

参考文献

[1] 刘元宗.安道什猜想的类似及其推广[J].中学数学,2001(3):39-40.

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的正整数解的组数

例 1 (1) 把 6 个相同的球放入 3 个不同的盒中且无空盒,有多少种放法?

(2) 把 16 个相同的球放入 3 个不同的盒 a,b,c 中,这三个盒中的球分别不少于 3 个,9 个,1 个,有多少种放法?

(3) 把 6 个相同的球放入 3 个不同的盒中,放球数不限,有多少种放法?

解 (1) 用隔板法.从并排的 6 个球之间的 5 个空隙中选出 2 个各插入一个隔板有 $C_5^2=10$ 种方法,所以所求答案为 10.

(2) 先把盒 a,b,c 中分别放 2 个,8 个,0 个球,用去了 10 个球,剩下 6 个球.再用(1) 的放法即达到要求,所以所求答案为 10.

(3) 先把 3 个盒中各放 -1 个球,用去了 -3 个球,剩下 9 个球.再把这 9 个相同的球放入这 3 个不同的盒中且无空盒即达到要求,所以所求答案为 $C_8^2=28$.(读罢以下例 2(4) 的解法后,这种解法就不足为怪了.)

例 2 求以下不定方程解的组数:

(1) $x_1+x_2+x_3=6(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{N}^*)$

(2) $x_1+x_2+x_3=16(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{N}^*$ 且 $x_1\geqslant 3,x_2\geqslant 9)$;

(3) $x_1+x_2+x_3=6(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{N})$

(4) $x_1+x_2+x_3=6(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{Z}$ 且 $x_1\geqslant 5,x_2\geqslant -6,x_3\geqslant 1)$;

(5) $x_1+x_2+x_3=6(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{Z}$ 且 $x_1\leqslant 5,x_2\leqslant -7,x_3\leqslant 11)$.

解 设例 3 中三个盒放的球数分别为 x_1,x_2,x_3,则例 1 的 3 个问题分别是例 2(1),(2),(3),所以他们的答案分别是:(1)10;(2)10;(3)28.

(4) 可用(3) 的方法求解,而下面的变换解法也具有一般性:

设 $x_1=x'_1+4,x_2=x'_2-7,x_3=x'_3$,得

$$x'_1+x'_2+x'_3=9(x'_1,x'_2,x'_3\in\mathbf{N}^*)$$

其解的组数为 $C_8^2=28$,即为所求.

(5) 设 $x_1=-x'_1+6,x_2=-x'_2-6,x_3=-x'_3+12$,得

$$x'_1+x'_2+x'_3=6(x'_1,x'_2,x'_3\in\mathbf{N}^*)$$

其解的组数为 $C_5^2=10$,即为所求.

定理 (1) 把 m 个相同的球放入 $n(n\leqslant m)$ 个不同的盒中且无空盒的放法数为 C_{m-1}^{n-1};

(2) 把 m 个相同的球放入 n 个不同的盒中，放球数不限的放法数为 C_{m+n-1}^{n-1}；

(3) 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m(m\in\mathbf{N})$ 的正整数解的组数为 C_{m-1}^{n-1}（当 $m<n$ 时约定该数为 0，下同）；

(4) 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m(m\in\mathbf{N})$ 的自然数解的组数为 C_{m+n-1}^{n-1}；

(5) 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m(x_i\geqslant a_i,m,x_i,a_i\in\mathbf{Z},i=1,2,\cdots,n)$ 解的组数为 $C_{m+n-1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}^{n-1}$；

(6) 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m(x_i\leqslant a_i,m,x_i,a_i\in\mathbf{Z},i=1,2,\cdots,n)$ 解的组数为 $C_{a_1+a_2+\cdots+a_n+n-m-1}^{n-1}$.

方程 $x^2-3y^2=-1$ 没有整数解的简短证明

首先约定，本文中没有注明的字母均表示整数，方程无解也指没有整数解，方程有解也指有整数解；本文中的 m 未注明时均表示 m 取正整数.

1 方程 $x^2-3y^2=-1$ 无解的简短证明

美国新数学丛书之一《连分数》(C.D.Olds 著，张顺燕译，北京大学出版社，1985) 第 153-154 页用较长的篇幅证明了佩尔方程 $x^2-3y^2=-1$ 无解，下面再给出一个初一学生也能看得懂的简短证明：

当 $x=3n,3n\pm1$ 时，$x^2=9n^2,9n^2\pm6n+1$，所以 $3\nmid x^2+1$，因而方程 $x^2+1=3y^2$ 即 $x^2-3y^2=-1$ 无解.

2 一般结论

定理 1 若 p 是 $4m-1$ 形素数，$p\mid x_1^2+x_2^2$，则 $p\mid(x_1,x_2)$.

证明 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$ 是一列所有从小到大的 $4m-1$ 形素数，即 3,7,11,17,$\cdots$.

下面用数学归纳法证明：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，若 $p_n\mid x_1^2+x_2^2$，则 $p_n\mid(x_1,x_2)$.

(1) 当 $n=1$ 时，$p_1=3$，设 $x_i=3m_i\pm r_i(r_i=0,1;i=1,2)$. 由 $p_1\mid x_1^2+x_2^2$，得 $r_i=0$，即 $p_1\mid x_1,p_1\mid x_2$，所以 $p_1\mid(x_1,x_2)$.

(2) 假设 $n<k$ 时要证结论成立，下证 $n=k$ 时也成立.

因为 $n=k$ 时 $p_k\mid x_1^2+x_2^2$. 可设 $x_i=p_km_i\pm r_i(r_i=0,1,2,\cdots,\frac{p_k-1}{2};i=1,2)$，得 $p_k\mid r_1^2+r_2^2$.

假设 $r_i(i=1,2)$ 中至少有一个不为 0，得 r_i 均不为 0.

设 $(r_1,r_2)=d$，得 $r_i=da_i(i=1,2;d,a_i\in\mathbf{N}^*;(a_1,a_2)=1)$ 得 $d\leqslant r_i<p_k$. 由 p_k 为素数知 $(d,p_k)=1$，又由 $p_k\mid r_1^2+r_2^2$ 即 $p_k\mid d^2(a_1^2+a_2^2)$，得 $p_k\mid a_1^2+a_2^2$.

且 $$a_1^2+a_2^2=\frac{r_1^2+r_2^2}{d^2}\leqslant r_1^2+r_2^2<(\frac{p_k}{2})^2+(\frac{p_k}{2})^2=p_k\cdot\frac{p_k}{2} \quad ①$$

由 $(a_1,a_2)=1$ 知 $a_1^2+a_2^2$ 是 $4m+1$(当 $2\nmid a_1+a_2$ 时) 或 $2(4m+1)$(当

$2 \mid a_1 + a_2$ 时)形数,所以 $a_1^2 + a_2^2$ 有一个 $4m-1$ 形素因数 p_k 时,必还有 $4m-1$ 形素因数 p_l,又由 ① 可得 $p_l < p_k, l < k$.

由"假设 $n < k$ 时要证结论成立"得 $p_l \mid (a_1, a_2)$,这与 $(a_1, a_2) = 1$ 矛盾!所以"假设 $r_i (i=1,2)$ 中至少有一个不为0"错误,即 $r_i = 0, p_k \mid x_i (i=1,2)$, $p_k \mid (x_1, x_2)$,得"$n = k$ 时也成立".定理1成立.

推论1 若 p 是 $4m-1$ 形素数,$p \nmid a$,则方程 $x^2 + y^2 = paz^2$ 有唯一解 $(x, y, z) = (0,0,0)$.

证明 当 $z = 0$ 时推论1成立.

当 $z \neq 0$ 时,可设 $z = p^{\alpha} z' (\alpha \in \mathbf{N}, p \nmid z')$.

假设方程 $x^2 + y^2 = paz^2 = p^{2\alpha+1} az'^2$ 有 x, y 不均为0的解,又设 $(x, y) = d (d \in \mathbf{N}^*, x = dx_1, y = dy_1, (x_1, y_1) = 1)$,得 $p \mid x_1^2 + y_1^2$.又由定理1得 $p \mid (x_1, y_1)$,这与 $(x_1, y_1) = 1$ 矛盾!说明"方程 $x^2 + y^2 = paz^2$ 只有 x, y 均为0的解",从而有推论1成立.

推论2 若 $m \in \mathbf{Z}$,则 $x^2 + y^2 = (4m-1)z^2$ 有唯一解 $(x, y, z) = (0,0,0)$.

证明 只需证明 $m \in \mathbf{N}^*$ 时成立即可.

可证 $m \in \mathbf{N}^*$ 时 $4m-1$ 不为完全平方数.所以可设 $4m - 1 = A^2 a$ (A, a 均为正奇数,a 为不同奇素数的积),可证 A^2 一定为 $4m+1$ 形数,所以 a 为 $4m-1$ 形数,因而 a 一定有 $4m-1$ 形素因数 p,且 $p^2 \nmid a$.

由推论1知方程 $x^2 + y^2 = a(Az)^2$ 有唯一解 $(x, y, z) = (0,0,0)$,即推论2成立.

3 Euler 猜想的证明

《数学的魅力》(傅钟鹏,福建科学技术出版社,1985)第109页写道:

"著名数学家 Goldbachc 曾提出:'$(3m+2)n^2+3$ 对于任何整数 m 和 n 的人数都不可能排成方队.'Euler证明了这个结论,并提出 $4mn - m - n$ 人也不能排成方队.但要证明 Euler 的结论就难了."

用定理1极易证明这两个结论.

(1) 方程 $(3m+2)n^2 + 3 = t^2$ 无解.

证明 假设此方程有解,则 $(3m+3)n^2 + 3 = t^2 + n^2, 3 \mid t^2 + n^2$.

由定理1得 $3 \mid (t, n), 9 \mid t^2 + n^2$,又 $3 \mid n$,所以 $9 \mid 3$,这不可能!所以结论(1)成立.

(2) 方程 $4mn - m - n = t^2$ 无正整数解.

证明 此方程即 $(4m-1)n = t^2 + m$,假设它有正整数解,得 $4m - 1 \mid$

$t^2+m, 4m-1 \mid (2t)^2+1+(4m-1), 4m-1 \mid (2t)^2+1$，因为 $4m-1$ 有 $4k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 形素因数 p，由定理 1 得 $p \mid 1$，这不可能！所以结论(2)成立.

注 结论(2)中的方程有解 $(m,n,t)=(0,0,0)$，$(0,-t_1^2,t_1^2)$，$\left(-1,\frac{1-(5t_1+1)^2}{5},5t_1+1\right)$.

不定方程 $ax^2+bxy+cz^2=\lambda z^n$ 的部分整数解

文献[1]给出了关于 x,y,z 的不定方程

$$x^2+My^2=(a_0^2+Mb_0^2)z^n(M,a_0,b_0\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{N}^*)$$

的部分整数解,本文给出关于 x,y,z 的不定方程

$$ax^2+bxy+cz^2=\lambda z^n(a,b,c,\lambda\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{N}^*) \quad ①$$

的部分整数解.

约定,本文中未注明的字母均表示实数.

定理 1 方程 $x^2-\delta y^2=(r_0^2-\delta s_0^2)z^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 有解

$$\begin{cases}x=t^n[r_0\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}r_1^{n-2k}(\delta s_1^2)^k+\delta s_0s_1\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}r_1^{n-2k-1}(\delta s_1^2)^k]\\ y=t^n[s_0\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}r_1^{n-2k}(\delta s_1^2)^k+r_0s_1\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}r_1^{n-2k-1}(\delta s_1^2)^k]\\ z=t^2(r_1^2-\delta s_1^2)\end{cases}$$

证明 因为可以验证上述解满足

$$\begin{cases}x+\sqrt{\delta}y=t^n(r_0+\sqrt{\delta}s_0)(r_1+\sqrt{\delta}s_1)^n=\\ \qquad t^n(r_0+\sqrt{\delta}s_0)[\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}r_1^{n-2k}(\delta s_1^2)^k+\sqrt{\delta}s_1\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}r_1^{n-2k-1}(\delta s_1^2)^k]\\ x-\sqrt{\delta}y=t^n(r_0-\sqrt{\delta}s_0)(r_1-\sqrt{\delta}s_1)^n=\\ \qquad t^n(r_0-\sqrt{\delta}s_0)[\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}r_1^{n-2k}(\delta s_1^2)^k-\sqrt{\delta}s_1\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}r_1^{n-2k-1}(\delta s_1^2)^k]\end{cases}$$

(其中 $\sqrt{\delta}$ 的意义是:当 $\delta\geqslant 0$ 时,$\sqrt{\delta}$ 是 δ 的算术平方根;当 $\delta<0$ 时,$\sqrt{\delta}=\sqrt{-\delta}i$,$i$ 表示虚数单位. 可以证明 $\sqrt{\delta}$ 的性质: $(\sqrt{\delta})^2=\delta$; $(\sqrt{\delta})^{2l}=\delta^l$; $(\sqrt{\delta})^{2l+1}=(\sqrt{\delta})^{2l}\cdot\sqrt{\delta}=\delta^l\cdot\sqrt{\delta}$,其中 $l\in\mathbf{N}^*$.)

所以定理 1 的解满足 $x^2-\delta y^2=(x+\sqrt{\delta}y)(x-\sqrt{\delta}y)=t^{2n}(r_0^2-\delta s_0^2)(r_1^2-\delta s_1^2)^n=(r_0^2-\delta s_0^2)z^n$,即定理 1 成立.

定理 2 方程 $x^2+2\alpha xy+\beta y^2=(r_0^2+2\alpha r_0s_0+\beta s_0^2)z^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 有解

$$\begin{cases} x = t^n\{r_0\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}r_1^{n-2k}[(\alpha^2-\beta)s_1^2]^k - s_1(\alpha r_0+\beta s_0)\times \\ \qquad \sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}r_1^{n-2k-1}[(\alpha^2-\beta)s_1^2]^k\} \\ y = t^n\{s_0\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}r_1^{n-2k}[(\alpha^2-\beta)s_1^2]^k + s_1(r_0+\alpha s_0)\times \\ \qquad \sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}r_1^{n-2k-1}[(\alpha^2-\beta)s_1^2]^k\} \\ z = t^2[r_1^2-(\alpha^2-\beta)s_1^2] \end{cases}$$

证明 可把定理 2 中的方程变形为

$$(x+\alpha y)^2-(\alpha^2-\beta)y^2=[(r_0+\alpha s_0)^2-(\alpha^2-\beta)s_0^2]z^n$$

再由定理 1 可得定理 2 成立.

定理 3 若关于 x,y,z 的不定方程

$$ax^2+bxy+cy^2=\lambda z^2(a,b,c,\lambda\in\mathbf{Z},a\neq 0)$$

有一组整数解 (x_0,y_0,z_0)，且 $z_0\neq 0$，则不定方程 ① 有无数组整数解

$$\begin{cases} x = t^n\{\frac{x_0}{z_0}\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}(2az_0r)^{n-2k}[(b^2-4ac)z_0^2s^2]^k - \\ \qquad s(bx_0+2cy_0)\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}(2az_0r)^{n-2k-1}[(b^2-4ac)z_0^2s^2]^k\} \\ y = t^n\{\frac{y_0}{z_0}\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}(2az_0r)^{n-2k}[(b^2-4ac)z_0^2s^2]^k + \\ \qquad s(2ax_0+by_0)\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}(2az_0r)^{n-2k-1}[(b^2-4ac)z_0^2s^2]^k\} \\ z = t^2z_0^2[4a^2r^2-(b^2-4ac)s^2] \end{cases}$$

（其中 $r,s,t\in\mathbf{Z}$）.

证明 由 $ax_0^2+bx_0y_0+cy_0^2=\lambda z_0^2$，$az_0\neq 0$，得

$$\frac{\lambda}{a}=(\frac{x_0}{z_0})^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot\frac{x_0}{z_0}\cdot\frac{y_0}{z_0}+\frac{c}{a}(\frac{y_0}{z_0})^2$$

可得方程 ① 即

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}xy+\frac{c}{a}y^2=[(\frac{x_0}{z_0})^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot\frac{x_0}{z_0}\cdot\frac{y_0}{z_0}+\frac{c}{a}(\frac{y_0}{z_0})^2]z^n$$

在定理 2 中选 $\alpha=\dfrac{b}{2a},\beta=\dfrac{c}{a},r_0=\dfrac{x_0}{z_0},s_0=\dfrac{y_0}{z_0},r_1=2az_0r,s_1=2az_0s$，即可得定理 3 成立.

定理 3 给出了方程 ①($a\neq 0$时) 的部分整数解，同理可给出方程 ①($c\neq 0$时) 的部分整数解，方程 ①($a=c=0$时) 的整数解是容易求出的.

推论 1　若关于 x,y,z 的不定方程

$$ax^2+bxy+cy^2=\lambda z^2(a,b,c,\lambda\in\mathbf{Z})\qquad ②$$

有一组不全为 0 的整数解(x_0,y_0,z_0)，则方程 ② 有无数组整数解

$$\begin{cases}x=t[4a^2x_0r^2-4a(bx_0+2cy_0)rs+(b^2-4ac)x_0s^2]\\ y=t[4a^2y_0r^2+4a(2ax_0+by_0)rs+(b^2-4ac)y_0s^2]\\ z=t^2z_0^2[4a^2r^2-(b^2-4ac)s^2]\end{cases}$$

(其中 $r,s,t\in\mathbf{Z}$).

下面再给出一个比定理 3 更广泛的结论.

定理 4　记 $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f\left(b^2-4ac\neq 0,f=\dfrac{a(be-2cd)^2+b(be-2cd)(bd-2ae)+c(bd-2ae)^2}{(b^2-4ac)^2}\right)$，若 $F(x_0,y_0)=\lambda z_0^2(x_0,y_0,z_0\in\mathbf{Z},z_0\neq 0)$，则关于 x,y,z 的不定方程

$$F(x,y)=\lambda z^n(a,b,c,d,e\in\mathbf{Z},a\neq 0,n\in\mathbf{N}^*)\qquad ③$$

有整数解(x,y,z)，其中整数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}(b^2-4ac)x+(be-2cd)=t^n\Big\{\dfrac{(b^2-4ac)x_0+(be-2cd)}{z_0}\times\\ \quad\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}(2az_0r)^{n-2k}[(b^2-4ac)z_0^2s^2]^k-s[(b^2-4ac)(bx_0+2cy_0)+\\ \quad b(be-2cd)+2c(bd-2ae)]\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}(2az_0r)^{n-2k-1}[(b^2-4ac)z_0^2s^2]^k\Big\}\\ (b^2-4ac)y+(bd-2ae)=t^n\Big\{\dfrac{(b^2-4ac)y_0+(bd-2ae)}{z_0}\times\\ \quad\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}(2az_0r)^{n-2k}[(b^2-4ac)z_0^2s^2]^k+s[(b^2-4ac)(2ax_0+by_0)+\\ \quad 2a(be-2cd)+b(bd-2ae)]\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}(2az_0r)^{n-2k-1}[(b^2-4ac)z_0^2s^2]^k\Big\}\\ z=t^2z_0^2[4a^2r^2-(b^2-4ac)s^2]\end{cases}$$

(其中 $r,s,t\in\mathbf{Z}$).

证明 可得

$$F(x,y)\equiv a(x+u)^2+b(x+u)(y+v)+c(y+v)^2$$

其中

$$u=\frac{be-2cd}{b^2-4ac},v=\frac{bd-2ae}{b^2-4ac}$$

所以方程③即

$$a[(b^2-4ac)x+(be-2cd)]^2+b[(b^2-4ac)x+(be-2cd)][(b^2-4ac)y+(bd-2ae)]+c[(b^2-4ac)y+(bd-2ae)]^2=\lambda(b^2-4ac)^2z^n$$

并且 $F(x_0,y_0)=\lambda z_0^2$，即

$$a[(b^2-4ac)x_0+(be-2cd)]^2+b[(b^2-4ac)x_0+(be-2cd)][(b^2-4ac)y_0+(bd-2ae)]+c[(b^2-4ac)y_0+(bd-2ae)]^2=\lambda(b^2-4ac)^2z_0^n$$

所以可在定理3中把 x 换为 $(b^2-4ac)x+(be-2cd)$，y 换为 $(b^2-4ac)y+(bd-2ae)$，x_0 换为 $(b^2-4ac)x_0+(be-2cd)$，y_0 换为 $(b^2-4ac)y_0+(bd-2ae)$，λ 换为 $\lambda(b^2-4ac)^2$，从而可得定理4成立.

推论2 记 $F_0(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f(b^2-4ac=1,f=a(be-2cd)^2+b(be-2cd)(bd-2ae)+c(bd-2ae)^2)$，若 $F_0(x_0,y_0)=\lambda z_0^2(x_0,y_0,z_0\in\mathbf{Z},z_0\neq 0)$，则关于 x,y,z 的不定方程

$$F_0(x,y)=\lambda z^n(a,b,c,d,e\in\mathbf{Z},a\neq 0,n\in\mathbf{N}^*) \qquad ④$$

有整数解

$$\begin{cases}x=t^n\{\frac{x_0+(be-2cd)}{z_0}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}(2az_0r)^{n-2k}(z_0s)^{2k}-s[(bx_0+2cy_0)+\\ \quad b(be-2cd)+2c(bd-2ae)]\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}(2az_0r)^{n-2k-1}(z_0s)^{2k}\}-(be-2cd)\\ y=t^n\{\frac{y_0+(bd-2ae)}{z_0}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2k}(2az_0r)^{n-2k}(z_0s)^{2k}+s[(2ax_0+by_0)+\\ \quad 2a(be-2cd)+b(bd-2ae)]\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2k+1}(2az_0r)^{n-2k-1}(z_0s)^{2k}\}-(bd-2ae)\\ z=t^2z_0^2(4a^2r^2-s^2)\end{cases}$$

(其中 $r,s,t\in\mathbf{Z}$).

参考文献

[1] 韩毅.不定方程 $x^2+My^2=Nz^n$ 的整数解[J].中学数学月刊,1997(8):18-19.

不定方程 $x^2+\sum_{k=1}^{n} d_k x_k^2 = y^2 (d_k \in \mathbf{Q})$ 的部分整数解

首先约定,下文中未注明的字母均表示实数.

引理 $(a^2-\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2+\sum_{k=1}^{n}(2aa_k)^2=(a^2+\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2$ ①

证明 $(a^2-\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2+\sum_{k=1}^{n}2aa_k^2=$

$(a^2)^2+(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2-2a^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2+4a^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2=$

$(a^2)^2+(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2+2a^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2=$

$(a^2+\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2$

欲求关于 $x,x_1,\cdots,x_n,y$ 的不定方程

$$x^2+\sum_{k=1}^{n} d_x x_k^2 = y^2 (d_k \in \mathbf{Q}) \quad ②$$

的部分整数解,可先把 ② 变形为

$$x^2+\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{d_k}x_k)^2 = y^2 \quad ③$$

(其中$\sqrt{d_k}$ 的意义是:当 $d_k \geqslant 0$时,$\sqrt{d_k}$ 是 d_k 的算术平方根;当 $d_k<0$时,$\sqrt{d_k}=\sqrt{-d_k}i$,i 表示虚数单位.可以证明:当 $d_k \in \mathbf{Q}$ 时,$(\sqrt{d_k})^2=d_k$.)

比较 ①,③,得

$$\begin{cases} x = a^2-\sum_{k=1}^{n} a'^2_k & ④ \\ x_k = \dfrac{1}{\sqrt{d_k}} \cdot 2aa'_k (k=1,2,\cdots,n) & ⑤ \\ y = a^2+\sum_{k=1}^{n} a'^2_k & ⑥ \end{cases}$$

是 ② 的解.

欲求 ② 的整数解,只需使 ④,⑤,⑥ 中的 $x, x_k(k=1,2,\cdots,n), y\in\mathbf{Z}$ 即可.

设 $d_k=\dfrac{q_k}{p_k}, p_k\in\mathbf{N}^*, q_k\in\mathbf{Z}, (p_k,q_k)=1$,由 ⑤ 可得

$$x_k=\frac{2p_kaa'_k}{\sqrt{p_kq_k}}$$

再令 $a'_k=a_k\sqrt{p_kq_k}$,得 $x_k=2p_kaa_k$,从而有

定理

$$\begin{cases}x=a^2-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kq_ka_k^2\\x_k=2p_kaa_k(k=1,2,\cdots,n)\\y=a^2+\sum\limits_{k=1}^{n}p_kq_ka_k^2\end{cases}$$

(其中 $d_k=\dfrac{p_k}{q_k}, p_k\in\mathbf{N}^*, q_k\in\mathbf{Z}, (p_k,q_k)=1, k=1,2,\cdots,n; a, a_k\in\mathbf{Z}$) 是不定方程 ② 的部分整数解.

推论1 不定方程 $x^2+\sum\limits_{k=1}^{n}d_kx_k^2=y^2$($d_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是已知的整数,n 是已知的正整数) 有正整数解

$$\begin{cases}x=|a^2-\sum\limits_{k=1}^{n}d_ka_k^2|\\x_k=2aa_k(k=1,2,\cdots,n)\\y=|a^2+\sum\limits_{k=1}^{n}d_ka_k^2|\end{cases}$$

(其中 $a, a_k\in\mathbf{N}^*$,且 $xy\neq0$).

推论2 不定方程 $x^2+\sum\limits_{k=1}^{n}d_kx_k^2=y^{2^s}$($d_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是已知的有理数,s, n 是已知的正整数) 有无数组正整数解.

不定方程 $ax^2+by^2=cz^n$ 的部分整数解

首先约定,下文中未注明的字母均表示任意实数.

文献[1]定义了$\sqrt{\alpha}$ 的意义:当 $\alpha\geqslant 0$时,$\sqrt{\alpha}$ 是 α 的算术平方根;当 $\alpha<0$时,$\sqrt{\alpha}=\sqrt{-\alpha}i$,$i$ 表示虚数单位.可以证明$\sqrt{\alpha}$ 有如下性质:$(\sqrt{\alpha})^2=\alpha$;$(\sqrt{\alpha})^{2k}=\alpha^k$,$(\sqrt{\alpha})^{2k+1}=(\sqrt{\alpha})^{2k}\cdot\sqrt{\alpha}=\alpha^k\cdot\sqrt{\alpha}$,其中 $k\in\mathbf{N}$.

引理1 若$(r_0+s_0\sqrt{\alpha})(r_1+s_1\sqrt{\alpha})^n(n\in\mathbf{N}^*)$展开合并后的结果为 $A+B\sqrt{\alpha}$,则

$$(r_0^2-\alpha s_0^2)(r_1^2-\alpha s_1^2)^n=A^2-\alpha B^2$$

证明 全同文献[1]的引理2的证明(注意“展开合并”的意义).

引理2 若$(r_0+s_0\sqrt{\alpha})(r_1+s_1\sqrt{\alpha})^n(n\in\mathbf{N}^*)$展开合并的结果为$A+B\sqrt{\alpha}$,则关于 x,y,z 的不定方程 $x^2-\alpha y^2=(r_0^2-\alpha s_0^2)z^n$ 有解$(x,y,z)=(A,B,r_1^2-\alpha s_1^2)$.

证明 由题设及引理1,可得

$$A^2-\alpha B^2=(r_0^2-\alpha s_0^2)(r_1^2-\alpha s_1^2)^n$$

所以方程 $x^2-\alpha y^2=(r_0^2-\alpha s_0^2)(r_1^2-\alpha s_1^2)^n$ 有解$(x,y,z)=(A,B,r_1^2-\alpha s_1^2)$.

可把引理2变形为

引理2′ 关于 x,y,z 的不定方程 $x^2-\alpha y^2=(r_0^2-\alpha s_0^2)z^n(n\in\mathbf{N}^*)$有解

$$\begin{cases}x=r_0[r_1^n+C_n^2r_1^{n-2}(\alpha s_1^2)+C_n^4r_1^{n-4}(\alpha s_1^2)^2+\cdots]+\\ \qquad \alpha s_0s_1[C_n^1r_1^{n-1}+C_n^3r_1^{n-3}(\alpha s_1^2)+C_n^5r_1^{n-5}(\alpha s_1^2)^2+\cdots]\\ y=s_0[r_1^n+C_n^2r_1^{n-2}(\alpha s_1^2)+C_n^4r_1^{n-4}(\alpha s_1^2)^2+\cdots]+\\ \qquad r_0s_1[C_n^1r_1^{n-1}+C_n^3r_1^{n-3}(\alpha s_1^2)+C_n^5r_1^{n-5}(\alpha s_1^2)^2+\cdots]\\ z=r_1^2-\alpha s_1^2\end{cases}$$

(若整数 p 使得 $p\alpha,pr_0,ps_0\in\mathbf{Z}$,则在上述解中选 $r_1=pr,s_1=ps(s\in\mathbf{Z})$得到的解是整数解.)

定理 若 $ax^2+by^2=cz^2$ 有整数解(x_0,y_0,z_0),且 $z_0\neq 0$,则关于 x,y,z 的不定方程 $ax^2+by^2=cz^n$(a,b,c 是已知的整数,$a\neq 0,n\in\mathbf{N}^*$)有无数组整数解

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_0}{z_0}[(az_0r)^n + C_n^2(az_0r)^{n-2}(-abz_0^2s^2) + C_n^4(az_0r)^{n-4}(-abz_0^2s^2)^2 + \cdots] - \\ \quad by_0s[C_n^1(az_0r)^{n-1} + C_n^3(az_0r)^{n-3}(-abz_0^2s^2) + C_n^5(az_0r)^{n-5}(-abz_0^2s^2)^2 + \cdots] \\ y = \dfrac{y_0}{z_0}[(az_0r)^n + C_n^2(az_0r)^{n-2}(-abz_0^2s^2) + C_n^4(az_0r)^{n-4}(-abz_0^2s^2)^2 + \cdots] + \\ \quad ax_0s[C_n^1(az_0r)^{n-1} + C_n^3(az_0r)^{n-3}(-abz_0^2s^2) + C_n^5(az_0r)^{n-5}(-abz_0^2s^2)^2 + \cdots] \\ z = az_0^2(ar^2 + bs^2) \end{cases}$$

(其中 $r, s \in \mathbf{Z}$).

证明 因为 $ax_0^2 + by_0^2 = cz_0^2(az_0 \neq 0)$,所以

$$\frac{c}{a} = \left(\frac{x_0}{z_0}\right)^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{y_0}{z_0}\right)^2$$

所以方程 $ax^2 + by^2 = cz^n$ 即

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)y^2 = \left[\left(\frac{x_0}{z_0}\right)^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{y_0}{z_0}\right)^2\right]z^n \quad ①$$

在引理 3 中,令 $\alpha = -\dfrac{b}{a}, r_0 = \dfrac{x_0}{z_0}, s_0 = \dfrac{y_0}{z_0}$,再选 $r_1 = az_0r, s_1 = az_0s(r, s \in \mathbf{Z})$ 即得定理成立.

读者还可看出:当 $n \geqslant 2$时,定理中给出的解(x, y, z)有公约数 az_0,所以把定理得到的解(x, y, z) 变为$\left(\dfrac{x}{az_0}, \dfrac{y}{ay_0}, \dfrac{z}{az_0}\right)$ 得到的解更简洁.

推论 1 若不定方程 $ax^2 + by^2 = cz^2$(a, b, c 是已知的不全为0的整数)有解$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$,则此不定方程有无数组整数解

$$\begin{cases} x = x_0(ar^2 - bs^2) - 2brsy_0 \\ y = y_0(ar^2 - bs^2) + 2arsx_0 \\ z = z_0(ar^2 + bs^2) \end{cases}$$

(其中 $r, s \in \mathbf{Z}$).

推论 2 不定方程 $x^2 + y^2 = z^n(n \in \mathbf{N}^*)$ 有整数解

$$\begin{cases} x = C_n^0r^n - C_n^2r^{n-2}s^2 + C_n^4r^{n-4}s^4 - \cdots \\ y = C_n^1r^{n-1}s - C_n^3r^{n-3}s^3 + C_n^5r^{n-5}s^5 - \cdots \\ z = r^2 + s^2 \end{cases}$$

(其中 $r, s \in \mathbf{Z}$).

证明 在定理中令 $a = b = c = 1, x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 1$,即得推论 2 成立.

推论 2 即文献[2] 得到的一般结论.

参考文献

[1] 韩毅.不定方程 $x^2+My^2=Nz^2$ 的整数解[J].中学数学月刊,1997(8):18-19.
[2] 万志华.从复数运算联想不定方程 $x^2+y^2=z^n$ 的整数解.中学数学月刊,1997(3):25-26.

用复数模的性质求不定方程 $x^2+dy^2=z^n$ $(d\in\mathbf{Q},n\in\mathbf{N}^*)$ 的部分整数解

复数 A 的模有如下性质：

(1) $(\mathrm{Re}\,A)^2+(\mathrm{Im}\,A)^2=|A|^2$ ①

(2) $|A^n|=|A|^n(n\in\mathbf{N}^*)$

在 ① 中设 $A=A_0^n=(a_0+b_0i)^n(a_0,b_0\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$，并用(2)，得

$$(\mathrm{Re}A_0^n)^2+(\mathrm{Im}A_0^n)^2=|A_0^n|^2=(|A_0|^n)^2=(|A_0|^2)^n$$

即

$$f^2(a_0,b_0)+g^2(a_0,b_0)=(a_0^2+b_0^2)^n \quad ②$$

其中

$$f(a_0,b_0)=a_0^n-C_n^2a_0^{n-2}b_0^2+C_n^4a_0^{n-4}b_0^4-\cdots \quad ③$$

$$g(a_0,b_0)=b_0(C_n^1a_0^{n-1}-C_n^3a_0^{n-3}b_0^2+C_n^5a_0^{n-5}b_0^4-\cdots \quad ④$$

欲求关于 x,y,z 的不定方程

$$x^2+dy^2=z^n(d\in\mathbf{Q},n\in\mathbf{N}^*) \quad ⑤$$

的部分整数解，可先把 ⑤ 变形为

$$x^2+(\sqrt{d}y)^2=z^n \quad ⑥$$

(其中$\sqrt{d}$ 的意义是：当 $d\geqslant 0$ 时，$\sqrt{d}=d$ 的算术平方根；当 $d<0$ 时，$\sqrt{d}=\sqrt{-d}i$. 由此定义可以证明：当 $d\in\mathbf{Q}$ 时，$(\sqrt{d})^2=d$.)

比较 ②，⑥，得

$$\begin{cases}x=f(a_0,b_0) & ⑦\\ y=\sqrt{\dfrac{p}{q}}\cdot g(a_0,b_0) & ⑧\\ z=a_0^2+b_0^2 & ⑨\end{cases}$$

是 ⑤ 的解.

欲求 ⑤ 的整数解，只需使 ⑦，⑧，⑨ 中的 $x,y,z\in\mathbf{Z}$ 即可. 在 ⑦ 中设 $b_0=b\sqrt{pq}(b\in\mathbf{Z}),a_0=a$，即得

定理 1

$$\begin{cases}x=a^n-C_n^2a^{n-2}(pqb^2)+C_n^4a^{n-4}(pqb^2)^2-C_n^6a^{n-6}(pqb^2)^3+\cdots\\ y=pb[C_n^1a^{n-1}-C_n^3a^{n-3}(pqb^2)+C_n^5a^{n-5}(pqb^2)^2-C_n^7a^{n-7}(pqb^2)^3+\cdots\\ z=a^2+pqb^2\end{cases}$$

(其中 $a,b\in\mathbf{Z},d=\frac{q}{p},p\in\mathbf{N}^*,q\in\mathbf{Z},(p,q)=1$)是不定方程⑤的整数解.

推论
$$\begin{cases}x=a^n-C_n^2a^{n-2}(db^2)+C_n^4a^{n-4}(db^2)^2-C_n^6a^{n-6}(db^2)^3+\cdots\\y=b[C_n^1a^{n-1}-C_n^3a^{n-3}(db^2)+C_n^5a^{n-5}(db^2)^2-C_n^7a^{n-7}(db^2)^3+\cdots]\\z=a^2+db^2\end{cases}$$

(其中 $a,b\in\mathbf{Z}$)是关于 x,y,z 的不定方程 $x^2+dy^2=z^n(d\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{N}^*)$ 的整数解.

推论中 $d=1$ 时的结论即文献[1]得到的一般结论.

关于不定方程⑤中 $n=2$ 时的解,笔者得到了更丰富的结论:

定理 2 关于 x,y,z 的不定方程 $x^2+dy^2=z^2(d\in\mathbf{Q})$ 有整数解

$$\begin{cases}x=\frac{1}{k}(k^2a^2-pqb^2)\\y=2pab\\z=\frac{1}{k}(k^2a^2+pqb^2)\end{cases}$$

(其中 $d=\frac{q}{p},p\in\mathbf{N}^*,q\in\mathbf{Z},(p,q)=1,k,a,b\in\mathbf{Z},k\mid pq$).

此结论可直接验证,也可仿照定理 1 推得.

读者要注意的是,本文得到的整数解均是一部分整数解,而不是全部整数解.比如定理 2 中 $d=1$ 时的结论为

不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 有整数解 $\begin{cases}x=a^2-b^2\\y=2ab\\z=a^2+b^2\end{cases}$ $(a,b\in\mathbf{Z})$,但得到的解不是全部整数解(比如 $x=9,y=12,z=15$ 不能由此得到),而文献[2]就错误的运用了这一结论,所以文献[2]只给出了"问题征解"第 123 题中 $x-1,x,x+1,x_1,x_2,x_3$ 中有式子的值为 0 时的解,其余的情形并未解决.

参考文献

[1] 万志华.从复数运算联想不定方程 $x^2+y^2=z^n$ 的整数解[J].中学数学月刊,1997(3):25-26.

[2] 曾登高.问题征解第 123 题的解答[J].数学通讯,1999(7):46-47.

一类不定方程的两种解法

本文给出关于 x,y 的不定方程

$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$($f(x),g(x)$ 是已知的整系数多项式,$f(x)\not\equiv 0$,$g(x)$ 的次数 $\partial g(x)=n(n\in\mathbf{N}^*)$) ①

的整数解的两种求法.

约定,本文中的整除均指数的整除.

1 辗转相除法

定理 1 设 $f(x),g(x)$ 是互素的整系数多项式,$\partial f(x)<\partial g(x)$,$\partial g(x)\in\mathbf{N}^*$,$g(x)=q(x)\cdot f(x)+r(x)$(则商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 均为有理系数多项式,$\partial r(x)<\partial f(x)$),又设 d 为 $q(x)$ 各项系数的最小公分母,则 $g(x)\mid f(x)\Rightarrow g(x)\mid d\cdot r(x)$,且 $d\cdot r(x)\not\equiv 0$.

证明 有 $d\cdot g(x)=d\cdot q(x)\cdot f(x)+d\cdot r(x)$ ②

因为 $d\cdot g(x),d\cdot q(x),f(x)$ 均为整系数多项式,所以 $d\cdot r(x)$ 也为整系数多项式.

由 $g(x)\mid f(x)$,得 $d\cdot g(x)\mid d\cdot f(x)\cdot d\cdot q(x)$,即

$$d\cdot q(x)\cdot f(x)+d\cdot r(x)\mid d\cdot(d\cdot q(x)\cdot f(x)+d\cdot r(x))-d^2\cdot r(x)$$

所以 $d\cdot g(x)\mid d^2\cdot r(x)$,$g(x)\mid d\cdot r(x)$.

在 ② 中,由 $f(x),g(x)$ 互素,得 $d\cdot r(x)\not\equiv 0$.

例 1 求不定方程 $y=\dfrac{3x^3-4x-1}{2x^2-1}$ 的整数解.

解 有 $2y=3x(2x^2-1)-\dfrac{5x+2}{2x^2-1}$,所以 $2x^2-1\mid 5x+2$.又

$$2x^2-1=\left(\frac{2}{5}x-\frac{4}{25}\right)(5x+2)-\frac{17}{25}$$

由定理 1,得

$$2x^2-1\mid 17,2x^2-1=\pm 1,\pm 17,x=0,\pm 1,\pm 3.$$

得原方程的全部整数解为

$$(x,y)=(0,1),(1,-2),(-1,0),(3,4)$$

当 $\partial f(x)\geqslant\partial g(x)$ 时,可用例 1 的方法把 ① 化为 $\partial f(x)<\partial g(x)$ 的情形.

当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不互素时,可化为互素的情形,此时可能变为

$$y = \text{整式}$$

更容易求解,若仍是

$$y = \text{分式}$$

可反复用定理 1 的方法(有限次)求解.

2　估计试验法

定理 2　设 $f(x), g(x)$ 是整系数多项式,$\partial g(x) = n(n \in \mathbf{N}^*)$,$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$,$r(x) \not\equiv 0$,$\partial r(x) \leqslant n-1$,设 d 为 $q(x)$ 的各项系数的最小公分母,$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i (a_n \neq 0)$,$d \cdot r(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$,$a_j, b_j \in \mathbf{Z}$,$c = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \{|a_i| + |b_i|\}$,若 (x, y) 是 ① 的一组整数解,则

(1) 当 $\begin{cases} r(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$,或 $r(x) \neq 0$ 时,$|x| < 1 + \dfrac{c}{|a_n|}$;

(2) 此时,① 只有有限组整数解.

证明　有 $d \cdot f(x) = d \cdot q(x) \cdot g(x) + d \cdot r(x)$.

由 $g(x) \mid f(x)$,得 $g(x) \mid d \cdot r(x)$.

当 $\begin{cases} r(x) = 0(\text{非恒等}) \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ 时,可求出全部整数 x,再验证哪些 x 是 ① 的根(此时求得 ① 的有限组整数解).

当 $r(x) \neq 0$ 时,由 $g(x) \mid d \cdot r(x)$,得 $|g(x)| < |d \cdot r(x)|$,

$$|a_n| \cdot |x|^n - \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right| \leqslant \left|\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j\right|$$

$$|a_n| \cdot |x|^n \leqslant \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right| + \left|\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (|a_i| + |b_i|) |x|^i \leqslant$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} c |x|^i = c \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} (\text{当 } |x| \neq 1 \text{ 时})$$

所以

$$|x| - 1 < \frac{|x|^n (|x| - 1)}{|x|^n - 1} \leqslant \frac{c}{|a_n|}$$

$$|x| < 1 + \frac{c}{|a_n|}$$

此式在 $|x| = 1$ 时也成立(因为可证 $c \neq 0$,否则 $b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$,$r(x) \equiv 0$),

此时,由 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \left[1 + \dfrac{c}{|a_n|}\right]$,逐个试验可求出 ① 的全部整数解(有限组).

例 2 求 $y=\dfrac{2x^5-2x^4+x^2-1}{2x^3-2x^2-x+1}$ 的整数解.

解 $2x^5-2x^4+x^2-1=(x^2+\frac{1}{2})(2x^3-2x^2-x+1)+(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2})$

由定理 2,得

(1) $$\begin{cases}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0\\2x^3-2x^2-x+1\neq 0\end{cases}$$

此时整数 x 不存在.

或(2) $$|x|<3(c=4,\ |a_n|=2)$$

所以 $x=0,\ \pm 1,\ \pm 2$.

从而得原方程的全部整数解为

$$(x,y)=(0,-1),(-1,2),(2,5)$$

两个不定方程(组)的解

本文将用初等方法证明下面的定理1,2.

定理1 方程组

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 & ① \\ a^2+(2b)^2=d^2 & ② \end{cases}$$

没有正整数解(a,b,c,d).

定理2 方程$a^4-a^2+1=b^2$的全部有理解(a,b)是:$(0,\pm 1)$,$(1,\pm 1)$,$(-1,\pm 1)$.

引理1 方程$z^2-y^2=3$的全部正有理解是

$$\begin{cases} y=\dfrac{3m^2-n^2}{2mn} \\ z=\dfrac{3m^2+n^2}{2mn} \end{cases}(m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1,n<\sqrt{3}m)$$

证明 可设$\begin{cases} z-y=\dfrac{n}{m} \\ z+y=\dfrac{3m}{n} \end{cases}$ $(m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1)$,得

$$\begin{cases} y=\dfrac{3m^2-n^2}{2mn} \\ z=\dfrac{3m^2+n^2}{2mn} \end{cases}\quad(\text{由 } y>0,\text{得 } n<\sqrt{3}m)$$

还可验证,得到的解是方程$z^2-y^2=3$的正有理解.

引理2 方程$3x^2+y^2=z^2((x,y,z)=1)$的全部正整数解是(以下m,$n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1$):

$$(1)\begin{cases} x=2mn \\ y=|3m^2-n^2| \\ z=3m^2+n^2 \end{cases}\quad(2\nmid m+n,3\nmid n)$$

或

$$(2)\begin{cases} x=mn \\ y=\dfrac{1}{2}|3m^2-n^2| \\ z=\dfrac{1}{2}(3m^2+n^2) \end{cases}\quad(2\nmid m,2\nmid n,3\nmid n)$$

引理 3 方程 $3(2q)^4+y^2=z^2((2q,y,z)=1)$ 的全部正整数解是(以下 $m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1,2\nmid m$):

$$(1)\begin{cases}q=mn\\ y=3m^4-4n^4\quad(3\nmid n,n<\sqrt[4]{\frac{3}{4}}m)\\ z=3m^4+4n^4\end{cases}$$

或

$$(2)\begin{cases}q=mn\\ y=12n^4-m^4\quad(3\nmid m,m<\sqrt[4]{12}n)\\ z=12n^4+m^4\end{cases}$$

或

$$(3)\begin{cases}q=mn\\ y=m^4-12n^4\quad(3\nmid m,m>\sqrt[4]{12}n)\\ z=m^4+12n^4\end{cases}$$

或

$$(4)\begin{cases}q=mn\\ y=4n^4-3m^4\quad(3\nmid n,n>\sqrt[4]{\frac{3}{4}}m)\\ z=4n^4+3m^4\end{cases}$$

引理 4 方程组 $\begin{cases}a^2+b^2=2c^2\\ c^2+d^2=2a^2\end{cases}$ 的正整数解满足 $a=b=c=d$.

证明 此即文献[1]的定理 3(其证明初等但复杂).

定理 1 的证明 (无限递降法).

假设方程组 ①② 有正整数解 (a,b,c,d),并设所有的正整数解 (a_i,b_i,c_i,d_i) 中使 b_i 最小的一组是 (a,b,c,d).

由"b 最小"及 ① 可得 $(a,b,c)=1$,由"b 最小"及 ② 可得 $(a,2b,d)=1$,由 ② 及互素勾股数组的求法知 $2\mid b$.再由互素勾股数组的求法,得

存在 $p,q,r,s\in\mathbf{N}^*,(p,q)=(r,s)=1,2\nmid p+q,2\nmid r+s,p>q,r>s$,使得

$$\begin{cases}a=p^2-q^2=r^2-s^2\\ b=2pq=rs\end{cases}$$

所以

$$4p^2q^2=r^2s^2=s^2(s^2+p^2-q^2)$$

$$(s^2)^2+(p^2-q^2)(s^2)-4p^2q^2=0$$

$$\Delta=p^4+14p^2q^2+q^4=y^2(y\in\mathbf{N}^*)$$

由 $2\nmid p+q$,得 $2\nmid y$,由 $(p,q)=1$,得 $(q,y)=1$,所以 $(2q,y)=1$.

又可得 $p^2=\sqrt{3(2q)^4+y^2}-7q^2\in\mathbf{N}^*$,所以

$$3(2q)^4+y^2=z^2(z\in\mathbf{N}^*)$$

由 $(2q,y)=1$,得 $(2q,y,z)=1$,且 $p^2=z-7q^2$.

由引理3(在引理3中,由 $(m,n)=1$,得 $(m^2-n^2,3m^2-4n^2)=(m^2-3n^2,$

$m^2-4n^2)=1)$(1),(2),(3),(4),分别得

(1)$p^2=3m^4+4n^4-7m^2n^2=(m^2-n^2)(3m^2-4n^2)$

由 $n<\sqrt[4]{\frac{3}{4}}m<m$,得 $m^2-n^2>0,3m^2-4n^2>0$,可设 $3m^2-4n^2=v^2(v\in\mathbf{N}^*)$,$3\mid n^2+v^2$,$3\mid n$,这与 $3\nmid n$ 矛盾!

(2)$p^2=12n^4+m^4-7n^2m^2=(3n^2-m^2)(4n^2-m^2)$

由 $m<\sqrt[4]{12}n<2n$,得 $4n^2-m^2>0$,$4n^2-m^2=v^2(v\in\mathbf{N}^*)$,$4\mid m^2+v^2$,必 $2\mid m$,$2\mid v$,这与 $2\nmid m$ 矛盾!

(3)$p^2=m^4+12n^4-7m^2n^2=(m^2-3n^2)(m^2-4n^2)$

由 $m>\sqrt[4]{12}n>\sqrt{3}n$,得 $m^2-3n^2>0$,

$$\begin{cases}m^2-3n^2=u^2\\ m^2-4n^2=v^2\end{cases}(u,v\in\mathbf{N}^*),\begin{cases}v^2+n^2=u^2\\ v^2+(2n)^2=m^2\end{cases}$$

说明方程组 ①② 还有正整数解(v,n,u,m),但 $n^2<u^2\leqslant u^2v^2=p^2$,$n<p<2pq=b$,$n<b$,这与"$b$ 最小"矛盾!

(4)$p^2=4n^4+3m^4-7m^2n^2=(n^2-m^2)(4n^2-3m^2)$

由 $n>\sqrt[4]{\frac{3}{4}}m>\sqrt{\frac{3}{4}}m$,得 $4n^2-3m^2>0$

$$\begin{cases}n^2-m^2=u^2\\ 4n^2-3m^2=v^2\end{cases}(u,v\in\mathbf{N}^*),\begin{cases}m^2+u^2=n^2\\ m^2+(2u)^2=v^2\end{cases}$$

说明方程组 ①② 还有正整数解(m,u,n,v),但 $u^2\leqslant u^2v^2=p^2$,$u\leqslant p<2pq=b$,$u<b$,这与"b 最小"矛盾!

从而得定理 1 成立.

定理 2 的证明

易知 $a^4-a^2+1>0$,所以只需证明方程

$$a^4-a^2+1=b^2(a,b\in\mathbf{Q}^*,a\neq 1) \qquad ③$$

无解.

假设 ③ 有解,得

$$a^2=\frac{1}{2}(1\pm y)(a^2\in\mathbf{Q}^*),且\ y^2=4b^2-3(y,b\in\mathbf{Q}^*) \qquad ④$$

由引理 1,可得 ④ 的解满足

$$y=\frac{3m^2-n^2}{2mn}(m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1,n<\sqrt{3}m)$$

(1) 当 $a^2=\frac{1}{2}(1+y)$ 时

$$a^2=\frac{3m^2+2mn-n^2}{4mn}$$

所以 $$\frac{3m^2+2mn-n^2}{mn}=a_0^2(a_0\in\mathbf{Q}^*)$$

设 $d_1=(mn,3m^2+2mn-n^2)$,得 $d_1=(n,3)$.

1) 当 $3\nmid n$ 时,$d_1=1$,所以

$$\begin{cases}3m^2+2mn-n^2=(m+n)(3m-n)=u^2\\ m=r^2,n=s^2(r,s,u\in\mathbf{N}^*,3\nmid s)\end{cases}$$

设 $d_2=(m+n,3m-n)$,得 $d_2=(m+n,4)=1,2$ 或 4.

当 $d_2=1$ 或 4 时,$3m-n=3r^2-s^2=q^2(q\in\mathbf{N}^*)$,$3\mid s^2+q^2$,$3\mid s$,与 $3\nmid s$ 矛盾!

当 $d_2=2$ 时

$$\begin{cases}r^2+s^2=2p^2\\ 3r^2-s^2=2q^2\end{cases}(p,q\in\mathbf{N}^*),\begin{cases}r^2+s^2=2p^2\\ p^2+q^2=2r^2\end{cases}$$

由引理4,得 $r=s=p=q$,又 $(r,s)=1$(因为 $(m,n)=1$),所以 $r=s=1$,得 $m=n=1$,$a^2=1$,这与 $a\in\mathbf{Q}^*$,$a\neq1$ 矛盾!

2) 当 $3\mid n$ 时,$d_1=3$

设 $n=3n_1(n_1\in\mathbf{N}^*)$,由 $(m,n)=1$,得 $(m,n_1)=1$,$3\nmid m$.

$$a_0^2=\frac{m^2+2mn_1-3n_1^2}{mn_1}(\text{既约分数})$$

所以 $$\begin{cases}m^2+2mn_1-3n_1^2=(m-n_1)(m+3n_1)=u^2\\ m=r^2,n_1=s^2(r,s,u\in\mathbf{N}^*,3\nmid r)\end{cases}$$

设 $d_2=(m-n_1,m+3n_1)=(m-n_1,4)=1,2$,或 4

当 $d_2=1$ 或 4 时,

$$\begin{cases}r^2-s^2=p^2\\ r^2+3s^2=q^2\end{cases}(p,q\in\mathbf{N}^*),\begin{cases}p^2+s^2=r^2\\ p^2+2s^2=q^2\end{cases}$$

由定理1知,这不可能!

当 $d_2=2$ 时,$r^2+3s^2=2q^2(q\in\mathbf{N}^*)$,得 $3\mid r^2+q^2$,$3\mid r$,与 $3\nmid r$ 矛盾!

(2) 当 $a^2=\frac{1}{2}(1-y)$ 时

$$a^2=\frac{n^2+2mn-3m^2}{4mn}$$

所以 $$\frac{n^2+2mn-3m^2}{mn}=a_0^2(a_0\in\mathbf{Q}^*)$$

设 $d_1=(mn,n^2+2mn-3m^2)$,得 $d_1=(n,3)$.

1) 当 $3\nmid n$ 时,$d_1=1$,所以

$$\begin{cases} n^2 = 2mn - 3m^2 = (n-m)(n+3m) = u^2 \\ m = r^2, n = s^2 (r,s,u \in \mathbf{N}^*, 3 \nmid s) \end{cases}$$

设 $d_2 = (n-m, n+3m) = (n-m, 4) = 1, 2,$ 或 4.

当 $d_2 = 1$ 或 4 时

$$\begin{cases} s^2 - r^2 = p^2 \\ s^2 + 3r^2 = q^2 \end{cases} (p, q \in \mathbf{N}^*), \begin{cases} p^2 + r^2 = s^2 \\ p^2 + (2r)^2 = q^2 \end{cases}$$

由定理 1 知,这不可能!

当 $d_2 = 2$ 时, $s^2 + 3r^2 = 2q^2, 3 \mid s^2 + q^2, 3 \mid s$,与 $3 \nmid s$ 矛盾!

2) 当 $3 \mid n$ 时, $d_1 = 3$.

设 $m = 3n_1 (n_1 \in \mathbf{N}^*)$,由 $(m, n) = 1$,得 $(m, n_1) = 1, 3 \nmid m$

$$a_0^2 = \frac{3n_1^2 + 2mn_1 - m^2}{mn_1} \text{(既约分数)}$$

所以

$$\begin{cases} 3n_1^2 + 2mn_1 - m^2 = (n_1 + m)(3n_1 - m) = u^2 \\ m = r^2, n_1 = s^2 (r, s, u \in \mathbf{N}^*, 3 \nmid r) \end{cases}$$

设 $d_2 = (n_1 + m, 3n_1 - m) = (n_1 + m, 4) = 1, 2,$ 或 4.

当 $d_2 = 1$ 或 4 时, $3s^2 - r^2 = q^2, 3 \mid r^2 + q^2, 3 \mid r$,与 $3 \nmid r$ 矛盾!

当 $d_2 = 2$ 时

$$\begin{cases} s^2 + r^2 = 2p^2 \\ 3s^2 - r^2 = 2q^2 \end{cases} (p, q \in \mathbf{N}^*), \begin{cases} s^2 + r^2 = 2p^2 \\ p^2 + q^2 = 2s^2 \end{cases}$$

由引理 4,得 $s = r = p = q = 1$,所以 $m = n_1 = 1, n = 3, a^2 = 1, a = 1$,与 $a \neq 1$ 矛盾!

这些矛盾(不可能)说明定理 2 成立.

参考文献

[1] 甘志国.有理数集上不存在四连贯的二次多项式[J].数学通讯,1995(12):23-26.

不定方程 $x^4+y^2=2z^4$ 的正整数解

要求出不定方程 $x^4+y^2=2z^4$ 的正整数解，只需求出不定方程

$$x^4+y^2=2z^4(x,y,z\text{ 两两互素},z>1) \tag{①}$$

的正整数解.

首先约定，本文中未注明的字母均表示正整数.

注释① 的定理4已得到方程①的全部正整数解可表示为

$$\begin{cases}x=|a^2-2b^2|\\y=(a^2+4ab+2b^2)^2-8a^2b^2\\z=r^2+s^2\end{cases} \tag{②}$$

其中 x,y,z 两两互素，a,b,r,s 满足

$$\begin{cases}ab=rs\\(a+b)^2+b^2+s^2=r^2\end{cases} \tag{③}$$

其中 a,r 奇(指 a,r 均为奇数，下同)，b,s 偶，$(a,b)=(r,s)=1$

或

$$\begin{cases}x=|a^2-2b^2|\\y=|(a^2-4ab+2b^2)^2-8a^2b^2|\\z=r^2+s^2\end{cases} \tag{④}$$

其中 x,y,z 两两互素，a,b,r,s 满足

$$\begin{cases}ab=rs\\(a-b)^2+b^2+s^2=r^2\end{cases} \tag{⑤}$$

其中 a,r 奇，b,s 偶，$(a,b)=(r,s)=1$.

对于注释①的定理4(即以上叙述)可作如下研究：

(1) 注释①定理4中“且 x,y,z 两两互素”这句话可以去掉：

证明 只需证$(a^2-2b^2,(a^2\pm4ab+2b^2)^2-8a^2b^2)=1$.

假设存在素数 $p\mid(a^2-2b^2,(a^2\pm4ab+2b^2)^2-8a^2b^2)$，易证得 $2\nmid p,p\nmid a,p\nmid b$.

得 $p\mid(a^2\pm4ab+2b^2)^2-8a^2b^2,p\mid(a\pm2b)^2-2b^2$

$$p\mid a^2\pm4ab+2b^2,p\mid4b^2\pm4ab,p\mid b\pm a,p\mid b^2-a^2$$

① 甘志国.不定方程 $2x^2+y^2=z^2$ 与 $x^2+y^2=2z^2$ 中有未知数为平方数的正整数解研究 // 傅海伦.中国教育优秀论文集.天津:天津社会科学院出版社,1998.

又 $p \mid a^2-2b^2$,所以 $p \mid b$,这与 $p \nmid b$ 矛盾!所以要证结论成立.

(2) 求出方程组 ③,⑤ 的全部正整数解.

定理 1 方程组 ③ 的全部正整数解是

$$\begin{cases} a=\dfrac{a_1}{d}(a_1^2+2c_1^2) \\ b=\dfrac{c_1}{d}(k-a_1c_1) \\ r=\dfrac{c_1}{d}(a_1^2+2c_1^2) \\ s=\dfrac{a_1}{d}(k-a_1c_1) \end{cases} \quad ⑥$$

其中 a_1,c_1,k,d 满足 $a_1^4+k^2=2c_1^4,(a_1,c_1)=1,k>a_1c_1,(k-a_1c_1,a_1^2+2c_1^2)=d$.

证明 先证 ③ 的正整数解均可表示为 ⑥ 的形式.

由 $ab=rs,(a,b)=(r,s)=1,a,r$ 奇,b,s 偶,及注释 ① 的引理 4 得

可设 $a=a_1d_1,b=c_1d_2,r=c_1d_1,s=a_1d_2$,其中 a_1,c_1,d_1,d_2 两两互素,a_1,c_1,d_1 奇,d_2 偶.

又由 $(a+b)^2+b^2+s^2=r^2$,得

$$(a_1^2+2c_1^2)d_2^2+2a_1c_1d_1d_2+d_1^2(a_1^2-c_1^2)=0$$

所以

$$\frac{d_2}{d_1}=\frac{k-a_1c_1}{a_1^2+2c_1^2}$$

其中

$$a_1^4+k^2=2c_1^4$$

设 $(k-a_1c_1,a_1^2+2c_1^2)=d$,得

$$d_1=\frac{1}{d}(a_1^2+2c_1^2),d_2=\frac{1}{d}(k-a_1c_1)$$

进而可得 ⑥ 成立.

再证 ⑥ 是 ③ 的正整数解:只需证 $(a,b)=(r,s)=1,a,r$ 奇,b,s 偶.

定理 2 方程组 ⑤ 的全部正整数解是

$$\begin{cases} a=\dfrac{a_1}{d}(a_1^2+2c_1^2) \\ b=\dfrac{c_1}{d}(a_1c_1+k) \\ r=\dfrac{c_1}{d}(a_1^2+2c_1^2) \\ s=\dfrac{a_1}{d}(a_1c_1+k) \end{cases} \quad ⑦$$

其中 a_1,c_1,k,d 满足 $a_1^4+k^2=2c_1^4,(a_1,c_1)=1,(a_1c_1+k,a_1^2+2c_1^2)=d$;

或
$$\begin{cases} a=\dfrac{a_1}{d}(a_1^2+2c_1^2)\\ b=\dfrac{c_1}{d}(a_1c_1-k)\\ r=\dfrac{c_1}{d}(a_1^2+2c_1^2)\\ s=\dfrac{a_1}{d}(a_1c_1-k)\end{cases} \quad ⑧$$

其中 a_1,c_1,k,d 满足 $a_1^4+k^2=2c_1^4,(a_1,c_1)=1,k<a_1c_1,(a_1c_1-k,a_1^2+2c_1^2)=d$.(同定理 1 可证)

再把定理 1,2 代入注释 ① 定理 4,得

定理 3 方程 ① 的全部正整数解是

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{d^2}\mid a_1^2(a_1^2+2c_1^2)^2-2c_1^2(a_1c_1+k)^2\mid\\ y=\dfrac{1}{d^4}\mid[a_1^2(a_1^2+2c_1^2)^2-4a_1c_1(a_1^2+2c_1^2)(a_1c_1+k)+\\ \qquad 2c_1^2(a_1c_1+k)^2]^2-8a_1^2c_1^2(a_1^2+2c_1^2)^2(a_1c_1+k)^2\mid\\ z=\dfrac{1}{d^2}[c_1^2(a_1^2+2c_1^2)^2+a_1^2(a_1c_1+k)^2]\end{cases}$$

其中 a_1,c_1,k,d 满足 $a_1^4+k^2=2c_1^4,k\in\mathbf{Z},k\neq-1,(a_1,c_1)=1,(a_1c_1+k,a_1^2+2c_1^2)=d$.

定理 4 定理 3 中的 $z>c_1$.

证明 若 $a_1c_1+k=0$,又 $a_1^4+k^2=2c_1^4,(a_1,c_1)=1$,所以 $k=-1$.

而 $k\neq-1$,所以 $a_1c_1+k\neq0,\dfrac{a_1^2}{d^2}(a_1c_1+k)^2>0$.

因为 $d\mid a_1^2+2c_1^2$,所以$\dfrac{1}{d^2}(a_1^2+2c_1^2)\geqslant1$.

所以 $z>c_1^2\geqslant c_1$,即 $z>c_1$.

由定理 3,4 知,求方程 ① 的全部正整数解,最终归结到求 ① 的满足 z 最小的一组正整数解.当定理 3 中的 c_1 取最小值 1 时,由定理 3 就得到 ① 的满足 z 最小的正整数解(1,239,13).

定理 5 (1) 从 $a_1=k=c_1=1$ 开始反复运用定理 3,可求出方程 ① 的全部正整数解;

(2)① 满足 z 最小的正整数解是(1,239,13);

(3)① 有无数组正整数解.

问题1 求出不定方程 $x^8+y^2=2z^4$(x,y,z 两两互素,$z>1$)的正整数解(它有解(1,239,13)).

问题2 求出不定方程 $x^4+y^2=2z^8$(x,y,z 两两互素,$z>1$)的正整数解.

定理6 方程

$$2x^4+y^2=z^4(x,y,z\text{ 两两互素}) \tag{⑨}$$

的全部正整数解为

$$\begin{cases}x=2abc\\y=|8a^4c^4-b^4|\\z=2a^4+c^4\end{cases}$$

其中 a,b,c 两两互素,$2a^4+b^2=c^4$ 或 $c^4+b^2=2a^4$.(即注释 ① 的定理 5)

因为可求出 $c^4+b^2=2a^4$(a,b,c 两两互素)的全部正整数解,所以也可求出 ⑨ 的全部正整数解.

也谈不定方程 $x^4+y^4+(x+y)^4=z^4+w^4+(z+w)^4$ 的全部整数解

文献[1]给出了不定方程

$$x^4+y^4+(x+y)^4=z^4+w^4+(z+w)^4 \qquad ①$$

的全部整数解,但文献[1]中有些表述上的错误,比如②有平凡解 $x=\pm z, y=\pm w$,或 $x=\pm w, y=\pm z$,而文献[1]只指出平凡解 $x=z, y=w$,或 $x=w, y=z$;文献[1]中命 $x=m+n, y=m-n, z=p+q, w=p-q(m,n,p,q\in\mathbf{Z})$ 不妥,因为这样将得到 $2\mid x+y$,而①有 $2\nmid x+y$ 的整数解,如 $(x,y,z,w)=(8,9,3,13)$;文献[1]的通解公式也可简化.

本文将在文献[1]的基础上给出①的全部整数解的简洁结论.

定理 ①的全部整数解为

(1) $(x,y,z,w)=(-a,-b,b,a)(a,b\in\mathbf{Z})$;

或(2)

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}[k(a+3b)+l(a-b)] & ②\\ y=\frac{1}{4}[k(a-3b)-l(a+b)] & ③\\ z=\frac{1}{4}[k(a+3b)-l(a-b)] & ④\\ w=\frac{1}{4}[k(a-3b)+l(a+b)] & ⑤\end{cases}$$

其中 $a\in\mathbf{N}^*, 3\nmid a; b,k,l\in\mathbf{Z},(a,b)=1,(2\nmid a+b, 2\mid k, 2\mid l, 4\mid k+l)$ 或 $(2\mid a+b, 2\mid k+l)$;

或(3)

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}[k(a_1+b)+l(3a_1-b)] & ⑥\\ y=\frac{1}{4}[k(a_1-b)-l(3a_1+b)] & ⑦\\ z=\frac{1}{4}[k(a_1+b)-l(3a_1-b)] & ⑧\\ w=\frac{1}{4}[k(a_1-b)+l(3a_1+b)] & ⑨\end{cases}$$

其中 $a_1\in\mathbf{N}^*, b,k,l\in\mathbf{Z}, 3\nmid b,(a_1,b)=1,(2\nmid a_1+b, 2\mid k, 2\mid l, 4\mid k+l)$ 或 $(2\mid a_1+b, 2\mid k+l)$.

证明 先证明由定理得到的解(1),(2),(3)均是①的整数解.

(1)是显然的;

(2)容易验证,由(2)得到的解(x,y,z,w)是①的解.

当$2\nmid a+b,2\mid k,2\mid l,4\mid k+l$时,$2\nmid a\pm b,2\nmid a\pm 3b$,设$k=2k_1,l=2l_1,k_1,l_1\in\mathbf{Z}$,有$2\mid k_1+l_1$,从而可证由(2)得到的$x,y,z,w\in\mathbf{Z}$.

当$2\mid a+b,2\mid k+l$时,下证由(2)得到的$x,y,z,w\in\mathbf{Z}$.

1)若$2\parallel a+b$,则$2\parallel a-3b,4\mid a-b,4\mid a+3b$,得②,④中的$x,z\in\mathbf{Z}$,又由$2\mid k+l$,得③,⑤中的$y,w\in\mathbf{Z}$.

2)若$2\parallel a-b$,则$2\parallel a+3b,4\mid a+b,4\mid a-3b$,有③,⑤中的$y,z\in\mathbf{Z}$,又由$2\mid k+l$,得②,④中的$x,z\in\mathbf{Z}$.

(3)同(2)可证.

再证明①的整数解均可由定理得到.

由①可得$x^2+xy+y^2=z^2+zw+w^2$,设$x+y=m,x-y=n,z+w=p,z-w=q;m,n,p,q\in\mathbf{Z}$,可得

$$x=\frac{1}{2}(m+n),y=\frac{1}{2}(m-n),z=\frac{1}{2}(p+q),w=\frac{1}{2}(p-q) \quad ⑩$$

$$3m^2+n^2=3p^2+q^2$$

$$(n+q)(n-q)=3(p+m)(p-m)$$

当$n-q=0$时,$p=\pm m$,可得此时①的整数解为

$$x=z,y=w\text{或}x=-w,y=-z$$

前者可由(2)中的$l=0$得到,后者可由(1)得到

当$p+m=0$时,$n=\pm q$,可得此时①的整数解为

$$x=-w,y=-z\text{或}x=-z,y=-w$$

前者可由(1)得到,后者可由(2)中的$k=0$得到.

当$n-q\neq 0$,且$p+m\neq 0$时,可设

$$\frac{n+q}{p+m}=\frac{3(p-m)}{n-q}=\frac{3b}{a},\text{其中 }a\in\mathbf{N}^*,b\in\mathbf{Z},(a,b)=1.$$

当$3\nmid a$时,$(a,3b)=1$,

可设$n+q=3kb,p+m=ka,p-m=lb,n-q=la,k,l\in\mathbf{Z}$,得$m=\frac{1}{2}(ka-lb),n=\frac{1}{2}(3kb+la),p=\frac{1}{2}(ka+lb),q=\frac{1}{2}(3kb-la)$,又由⑩可得②,③,④,⑤成立.

由③,⑤中的$y,w\in\mathbf{Z}$可得,$4\mid k(a-3b)-l(a+b),4\mid k(a-3b)+l(a+b)$,所以$4\mid 2k(a-3b),4\mid 2l(a+b)$,即$2\mid k(a-3b),2\mid l(a+b)$.

当$2\nmid a+b$时,$2\nmid a-3b$,所以$2\mid k,2\mid l$,设$k=2k_1,l=2l_1$,由⑤中

的 $w\in\mathbf{Z}$,可得 $2\mid k_1+l_1$,即 $4\mid k+l$.

当 $2\mid a+b$ 时,

1) 若 $2\parallel a+b$,则 $2\parallel a-3b$,由 ⑤ 可得 $2\mid k+l$;

2) 若 $2\parallel a-b$,则 $2\parallel a+3b$,由 ② 可得 $2\mid k+l$.

总之,当 $3\nmid a$ 时,① 的整数解可由(1),(2) 得到.

当 $3\mid a$ 时,设 $a=3a_1(a_1\in\mathbf{N}^*)$,有 $3\nmid b,(a_1,b)=1$

$$\frac{n+q}{p+m}=\frac{b}{a_1},\frac{p-m}{n-q}=\frac{b}{3a_1}$$

所以可设 $n+q=kb,p+m=ka_1,p-m=lb,n-q=3la_1,k,l\in\mathbf{Z}$,得 $m=\frac{1}{2}(ka_1-lb),n=\frac{1}{2}(3la_1+kb),p=\frac{1}{2}(ka_1+lb),q=\frac{1}{2}(kb-3la_1)$,又由 ⑩ 可得 ⑥,⑦,⑧,⑨ 成立.

以下同上面的证明,可得 $3\mid a$ 时 ① 的整数解均可由(3) 得到.

在(2) 中选 $(a,b,k,l)=(7,-1,3,-1),(17,-3,3,-1),(13,-1,5,-1),(9,-1,66,-20)$ 可分别得到 ① 的解 $(x,y,z,w)=(1,9,5,6),(1,23,11,16),(9,23,16,17),(49,238,149,158)$;在(3) 中选 $(a_1,b,k,l)=(3,-1,11,1),(5,-3,73,-5)$,可得 ① 的解(8,9,3,13),(14,161,59,131),这些解均是文献[1] 给出的,由本文定理也可得到.

参考文献

[1] 郭富喜. 方程 $x^4+y^4+(x+y)^4=z^4+w^4+(z+w)^4$ 的整数解[J]. 中学数学,1997(3):35.

不定方程 $x^3-y^3=n$ 的整数解的求法

文献[1]给出了关于 x,y 的不定方程

$$x^2-y^2=n(n\text{ 是已知的正整数})$$

的全部正整数解的求法及解的组数,本文进一步给出关于 x,y 的不定方程

$$x^3-y^3=n(n\text{ 是已知的正整数},x>y) \quad ①$$

的全部正整数解的求法.

定理1 ①有正整数解的充要条件是 n 能表示成 $\frac{1}{4}a(a^2+3b^2)$ 的形式,其中 $a\in\mathbf{N}^*,b\in\mathbf{N},2\mid a+b$.

证明 **充分性**.若条件满足,可以验证①有整数解 $(x,y)=(\frac{a\pm b}{2},\frac{-a\pm b}{2})$.

必要性.若①有整数解 (x,y),则

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=n$$

可设 $\begin{cases}x-y=a\\x^2+xy+y^2=r,\end{cases}$ 其中 $n=ar,a,r\in\mathbf{N}^*$.

所以

$$x^2-ax+\frac{1}{3}(a^2-r)=0$$

$$x=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{\frac{4}{3}r-\frac{1}{3}a^2}\right)$$

由 $x\in\mathbf{Z},a\in\mathbf{N}^*$,得 $\sqrt{\frac{4}{3}r-\frac{1}{3}a^2}\in\mathbf{N}$.

可设 $\frac{4}{3}r-\frac{1}{3}a^2=b^2(b\in\mathbf{N}),r=\frac{1}{4}(a^2+3b^2),n=ar=\frac{1}{4}a(a^2+3b^2)$.

因为 $r\in\mathbf{N}^*$,所以 $2\mid a+b$.

推论 (1)当 $2\nmid n$ 时,①有整数解的充要条件是 n 能表示成 $\frac{1}{4}a(a^2+3b^2)$ 的形式,其中 a,b 为正奇数;

(2)当 $2\mid n$ 时,①有整数解的充要条件是 n 能表示成 $2a_1(a_1^2+3b_1^2)$ 的形式,其中 $a_1\in\mathbf{N}^*,b_1\in\mathbf{N}$.

证明 (1)显然成立.

(2) 假设 a,b 均为奇数,可证 $8\mid a^2-b^2, 4\mid a^2+3b^2, 8\nmid a^2+3b^2$,得 $2\nmid n$,与题设矛盾!

又 $2\mid a+b$,所以 a,b 均为偶数,设 $a=2a_1, b=2b_1, a_1\in\mathbf{N}^*, b_1\in\mathbf{N}$,得 $n=2a_1(a_1^2+3b_1^2)$.

定理 2 (1) 当正整数 $n\neq\frac{1}{4}a^3(a\in\mathbf{N}^*)$ 时,设 n 有且只有 k 种方式表示成 $\frac{1}{4}a_i(a_i^2+3b_i^2)(a_i,b_i\in\mathbf{N}^*, 2\mid a_i+b_i), i=1,2,\cdots,k$(指 $i\neq j$ 时,(a_i,b_i) 与 (a_j,b_j) 是不同的有序数对,即 $a_i\neq a_j$ 或 $b_i\neq b_j$),则 ① 有且只有 $2k$ 组整数解:

$$(x,y)=(\frac{a_i\pm b_i}{2},\frac{-a_i\pm b_i}{2}), i=1,2,\cdots,k$$

(2) 当正整数 $n=\frac{1}{4}a^3(a\in\mathbf{N}^*)$ 时,设 n 有且只有 k 种方式表示成 $\frac{1}{4}a_i(a_i^2+3b_i^2)(a_i,b_i\in\mathbf{N}^*, 2\mid a_i+b_i), i=1,2,\cdots,k$,则 ① 有且只有 $2k+1$ 组整数解:

$$(x,y)=(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}),(\frac{a_i\pm b_i}{2},\frac{-a_i\pm b_i}{2}),(i=1,2,\cdots,k)$$

证明 只需证明

$$\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{a_2+b_2}{2} \text{ 且 } \frac{-a_1+b_1}{2}=\frac{-a_2+b_2}{2}$$

或
$$\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{a_2-b_2}{2} \text{ 且 } \frac{-a_1+b_1}{2}=\frac{-a_2-b_2}{2}$$

或
$$\frac{a_1-b_1}{2}=\frac{a_2+b_2}{2} \text{ 且 } \frac{-a_1-b_1}{2}=\frac{-a_2+b_2}{2}$$

或
$$\frac{a_1-b_1}{2}=\frac{a_2-b_2}{2} \text{ 且 } \frac{-a_1-b_1}{2}=\frac{-a_2-b_2}{2}$$

时,均有 $a_1=a_2$ 且 $b_1=b_2$,这是容易验证的.

由定理 2 看出,要求出 ① 的整数解组数的简明结论是不容易的.文献[2]的定理说,若 ① 有整数解,则 ① 有两组整数解,这是不对的,比如 $x^3-y^3=2(x>y)$ 只有一组整数解 $(x,y)=(1,-1)$,导致错误的原因是文献[2]的证明中忽略了文献[2]的(4),(5)式中 $c^2-\frac{4}{3}(c^2-d)=0$ 的情形.文献[2]并没有证明定理2,只给出了 ① 的整数解的求法.文献[2]的推论,即 $x^3+y^3=z^3$ 没有正整数解,这是著名的 Fermat 大定理[3]的一种情形,其证明也并非文献[2]那样简单(虽早已证明).文献[2]在求 $x^3-y^3=2\,060(x>y)$ 的整数解时,没有对 $cd=5\times412$ 进行验证是不对的(答案正确),文献[2]中三道例题的结论及

解法均正确.

可以用本文的方法求 $x^k - y^k = n$(n,k 是已知的正整数,$k \geqslant 2, x > y$)的全部整数解(x,y).

例 求不定方程 $x^5 - y^5 = 3\ 093(x > y)$ 的整数解.

解 设 $x - y = a(a \in \mathbf{N}^*)$,得

$$(a+y)^5 - y^5 = 3\ 093$$

$$a(a^4 + 5a^3y + 10a^2y^2 + 10ay^3 + 5y^4) = 3 \times 1\ 031$$

因为 3,1 031 都是素数,所以

$$\begin{cases} a = 1, \quad 3, 1\ 031 \text{或} 3\ 093 \\ a^4 + 5a^3y + 10a^2y^2 + 10ay^3 + 5y^4 = 3\ 093, 1\ 031, \quad 3 \text{或} \quad 1 \end{cases}$$

可以验证,当且仅当 $a = 3$ 时,原方程有整数解 $(x,y) = (5,2),(-2,-5)$.

参考文献

[1] 甘志国.任意自然数的全部平方差分拆及其组数[J].数学通讯,1996(11):29-31
[2] 刘焕然,刘清阁.不定方程 $x^3 - y^3 = n$ 整数解的初等求法[J].中学数学,1997(2):45-46.
[3] 单墫.趣味数论[M].北京:中国青年出版社,1987.

广义勾股数组的求法

定义[1] 设 $a_1 < a_n, a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 是连续正整数,若 $\sum_{i=1}^{k} a_i^2 = \sum_{i=k+1}^{n} a_i^2$,则称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为一组广义勾股数组,记作 $(a_1, \cdots, a_k \mid a_{k+1}, \cdots, a_n)$.

求广义勾股数组即求不定方程

$$(x+1)^2+(x+2)^2+\cdots+(x+k)^2=(x+k+1)^2+(x+k+2)^2+\cdots+(x+k+l)^2 (x \in \mathbf{N}, k, l \in \mathbf{N}^*) \quad ①$$

的解 (x, k, l)(易得 $k > l$).

方程 ① 即

$$kx^2+2x(1+2+\cdots+k)+(1^2+2^2+\cdots+k^2)=$$

$$lx^2+2x\left[kl+\frac{1}{2}l(l+1)\right]+\left[1^2+2^2+\cdots+(k+l)^2-(1^2+2^2+\cdots+k^2)\right]$$

$$(k-l)x^2+(k^2-2kl-l^2+k-l)x-\frac{1}{6}\left[(k+l)(k+l+1)(2k+2l+1)-2k(k+1)(2k+1)\right]=0$$

令 $k-l=t$,得方程 ① 即

$$tx^2+(t^2+t-2l^2)x+\frac{1}{6}t(t+1)(2t+1)-2l^3-(2t+1)l^2=0 (t=k-l)(x \in \mathbf{N}, t, l \in \mathbf{N}^*) \quad ②$$

须求 ② 的解 (x, t, l).

视 ② 为 x 的一元二次方程,则 $\Delta = 4l^2(l+t^2)-\frac{1}{3}t^2(t^2-1)$.

若 ② 有解 (x, t, l),则 $\Delta=(2y)^2(y \in \mathbf{N}$,因为易证 $4 \mid \frac{1}{3}t^2(t^2-1))$.

又设 $l^2+lt=z (l, t, z \in \mathbf{N}^*)$ ③

得方程 $z^2-y^2=\frac{1}{12}t^2(t^2-1) (y \in \mathbf{N}, z, t \in \mathbf{N}^*)$ ④

有解 (y, z),此时

$$x=\frac{2l^2-t^2-t \pm 2y}{2t} (x, y \in \mathbf{N}, t, l \in \mathbf{N}^*) \quad ⑤$$

定理 对于已知的 $k-l(k-l=t)$,方程①有解(x,k,l)的充要条件是方程④有解(y,z)且方程③,⑤分别有解 l,x.

在定理中,令 $t=1$ 可得拉钦斯基给出的结论:

$(2l^2+l)^2+(2l^2+l+1)^2+\cdots+(2l^2+2l)^2=$

$(2l^2+2l+1)^2+\cdots+(2l^2+3l)^2(l\in\mathbf{N}^*)$

其特例是 $3^2+4^2=5^2$

当 $t=9$ 时,可得文献[1]的结论:

$$18^2+19^2+\cdots+34^2=35^2+36^2+\cdots+42^2$$

令 $t=25$,可得新结论:

$$4^2+5^2+\cdots+38^2=39^2+40^2+\cdots+48^2$$

令 $t=26$,可得文献[2]的结论:

$$12^2+13^2+\cdots+50^2=51^2+52^2+\cdots+63^2$$

$$60^2+61^2+\cdots+110^2=111^2+112^2+\cdots+135^2$$

下面由定理给出 $t=26$ 时的求解过程,此时④即

$$z^2-y^2=\frac{1}{12}\cdot 26^2(26^2-1)=3^2\cdot 5^2\cdot 13^2(y\in\mathbf{N},z\in\mathbf{N}^*)$$

这种类型不定方程的求解可参见文献[3],[4],得

$$\begin{cases}z-y=1,3,5,9,13,15,25,39,45,65,75,117,169,195\\ z+y=38\ 025,12\ 675,7\ 605,4\ 225,2\ 925,2\ 535,1\ 521,975,845,585,507,\\ \qquad 325,225,195\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=19\ 012,6\ 336,3\ 800,2\ 108,1\ 456,1\ 260,748,468,400,260,216,104,28,0\\ z=19\ 013,6\ 339,3\ 805,2\ 117,1\ 469,1\ 275,773,507,445,325,291,221,197,195\end{cases}$$

此时③即 $l^2+26l=z(l\in\mathbf{N}^*)$,得

$$l=\sqrt{z+169}-13$$

逐一验证,得

$$(y,z,l)=(1\ 260,1\ 275,25),(468,507,13)$$

此时⑤即 $x=\dfrac{l^2-13\cdot 27\pm y}{26}(x\in\mathbf{N})$,分别得 $x=59,11$

又由 $t=k-l$,分别得 $k=51,39$.

从而可得 $t=26$ 时的两个广义勾股数组.

当 $t=8m\pm 3(m\in\mathbf{N},t\in\mathbf{N}^*)$ 时,可证 $2\parallel\frac{1}{12}t^2(t^2-1)$,所以此时④无解$(y,z)$,因而此时不存在相应的广义勾股数组.

问题 1 请读者由本文列举的广义勾股数组发现出更一般的结论.

问题 2 对于哪些正整数 t 存在相应的广义勾股数组(即方程 ② 有解(x,l))?

问题 3 试求不定方程$\sum_{i=1}^{k}(x+id)^2=\sum_{i=1}^{l}[x+(k+i)d]^2(d\in\mathbf{N}^*)$的整数解$(x,k,l)$.

参考文献

[1] 刘正军.一个新的广义勾股数组[J].中学数学教学参考,2003(8):60.
[2] 吴波.两个新的广义勾股数组[J].中学数学教学参考,2004(8):61.
[3] 甘志国.任意自然数的全部平方差分拆及其组数[J].数学通讯,1996(11):29-31.
[4] 甘志国.自然数的互素平方差分拆[J].中学数学月刊,1997(11):15-16.

把分数表示成两个单位分数的和与差

本文所说的分数是形如$\frac{m}{n}(m,n\in\mathbf{N}^*)$的数,单位分数是指形如$\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$的数.把分数表示成几个单位分数和的问题,人们研究了很长时间,但还有很多问题没有解决[1].本文介绍把分数表示成两个单位分数的和与差的方法,即要给出求

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}(m,n\text{ 是已知的正整数},x,y\in\mathbf{N}^*,x\leqslant y) \quad ①$$

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}(m,n\text{ 是已知的正整数},x,y\in\mathbf{N}^*) \quad ②$$

的全部解(x,y)的方法.

本文用$\sigma(a),\sigma_0(a),\sigma_1(a)$分别表示正整数$a$的正因数的个数,小于$\sqrt{a}$的正因数的个数,不大于$\sqrt{a}$的正因数的个数.显然$\sigma(1)=\sigma_1(1)=1,\sigma_0(1)=0$.

引理 设正整数$a(a>1)$是完全平方数,其标准分解式为$a=\prod_{i=1}^{k}p_i^{2\alpha_i}$($p_i$是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,k$),则

(1)$\sigma(a)=\prod_{i=1}^{k}(2\alpha_i+1)$;

(2)$\sigma_0(a)=\frac{1}{2}(\sigma(a)-1)$;

(3)$\sigma_1(a)=\frac{1}{2}(\sigma(a)+1)$.

(直接运用文献[2]的引理1,2可证)

定理1 方程

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}(n\text{ 是已知的正整数},x,y\in\mathbf{N},x\leqslant y) \quad ③$$

恒有解(x,y),全部解为

$$\begin{cases}x=n+a\\y=n+b\end{cases}(ab=n^2,a,b\in\mathbf{N}^*,a\leqslant n) \quad ④$$

且解的组数为$\sigma_1(n^2)=\frac{1}{2}(\sigma(n^2)+1)$.

证明　由$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$知③恒有解

$$(x,y)=(n+1,n(n+1))$$

下证③的全部解为④.

先证③的解均可由④得到：

设(x,y)是③的解，则$n<x\leqslant y$，可设$x=n+a,y=n+b,a,b\in\mathbf{N}^*$，$a\leqslant b$，得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}=\frac{2n+a+b}{n^2+an+bn+ab}$$

所以$ab=n^2$.由$a\leqslant b$，得$a\leqslant n$.

再证由④得到的(x,y)是③的解：

由④得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}=\frac{2n+a+b}{n^2+an+bn+ab}=\frac{1}{n}$(因为$ab=n^2$)，还可得$x,y\in\mathbf{N}^*$，$x\leqslant y$.

这就证明了③的全部解为④.

由$\sigma_1(n^2)$的意义，易知③的解的组数为$\sigma_1(n^2)$，又由引理知$\sigma_1(n^2)=\frac{1}{2}(\sigma(n^2)+1)$.

(由$\sigma_1(n^2)\geqslant 1$，也可得③恒有解.)

定理2　方程

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\ (n\text{ 是已知的正整数},n\geqslant 2,x,y\in\mathbf{N}^*) \quad ⑤$$

恒有解(x,y)，全部解为

$$\begin{cases}x=n-a\\y=b-n\end{cases}(ab=n^2,a,b\in\mathbf{N}^*,a<n) \quad ⑥$$

且解的组数为$\sigma_0(n^2)=\frac{1}{2}(\sigma(n^2)-1)$.

证明　由$\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n(n-1)}$知，⑤恒有解

$$(x,y)=(n-1,n(n-1))$$

下证⑤的全部解为⑥.

容易验证由⑥得到的(x,y)是⑤的解.

再证⑤的解均可由⑥得到：

设(x,y)是⑤的解，则可设$x=n-a,y=b-n,a,b\in\mathbf{N}^*,a<n$，得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n-a}+\frac{1}{n-b}=\frac{2n-a-b}{n^2-an-bn+ab}$$

所以

$$ab=n^2$$

由 $\sigma_0(n^2)$ 的意义及引理,得 ⑤ 的解的组数为 $\sigma_0(n^2)=\frac{1}{2}(\sigma(n^2)-1)$.

因为 $\frac{2}{n}=\frac{1}{x}\pm\frac{1}{y}$ 可变形为 $\frac{1}{n}=\frac{1}{2x}\pm\frac{1}{2y}$,所以由定理 1,2 可得

定理 3 方程

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\,(n\text{ 是已知的正奇数},x,y\in\mathbf{N}^*,x\leqslant y)$$

恒有解(x,y),全部解为

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(n+a)\\ y=\frac{1}{2}(n+b)\end{cases}\quad(ab=n^2,a,b\in\mathbf{N}^*,a\leqslant n)$$

且解的组数为 $\sigma_1(n^2)=\frac{1}{2}(\sigma(n^2)+1)$.

定理 4 方程

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\,(n\text{ 是已知的正奇数},n\geqslant 3,x,y\in\mathbf{N}^*)$$

恒有解(x,y),全部解为

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(n-a)\\ y=\frac{1}{2}(b-n)\end{cases}\quad(ab=n^2,a,b\in\mathbf{N}^*,a<n)$$

且解的组数为 $\sigma_0(n^2)=\frac{1}{2}(\sigma(n^2)-1)$.

因为 $\frac{m}{n}=\frac{1}{x}\pm\frac{1}{y}$ 可变形为 $\frac{1}{n}=\frac{1}{mx}\pm\frac{1}{my}$,所以由定理 1,2 还可得

定理 5 ① 的全部解为

$$\begin{cases}x=\frac{1}{m}(n+a)\\ y=\frac{1}{m}(n+b)\end{cases}\quad(ab=n^2,a,b\in\mathbf{N}^*,a\leqslant n,m\mid n+a,m\mid n+b)$$

定理 6 ② 的全部解为

$$\begin{cases}x=\frac{1}{m}(n-a)\\ y=\frac{1}{m}(b-n)\end{cases}\quad(ab=n^2,a,b\in\mathbf{N}^*,a<n,m\mid n-a,m\mid b-n)$$

由定理 1,3,还可得

推论 $\frac{1}{n},\frac{2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 均可表示成任意个(至少两个)单位分数的和.

例 把$\frac{1}{10}$,$\frac{2}{13}$,$\frac{3}{14}$表示成两个单位分数的和与差.

解 由定理1,2,可得

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{11}+\frac{1}{110}=\frac{1}{12}+\frac{1}{60}=\frac{1}{14}+\frac{1}{35}=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=$$
$$\frac{1}{9}-\frac{1}{90}=\frac{1}{8}-\frac{1}{40}=\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$$

由定理3,4,可得

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}=\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{1}{6}-\frac{1}{78}$$

由定理5,6,可得

$$\frac{3}{14}=\frac{1}{5}+\frac{1}{70}=\frac{1}{6}+\frac{1}{21}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{1}{4}-\frac{1}{28}$$

参考文献

[1] 张文忠.整数中的明珠[M].重庆:西南师范大学出版社,1992.
[2] 甘志国.任意自然数的全部平方差分拆及其组数[J].数学通讯,1996(11):29-31.

一个引理的证明

笔者在研究平方 m 重连整数①时,急需证得注释 ① 的

引理 1 $\dfrac{10^{mk}-1}{10^k-1}(m,k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant 2)$ 不是完全平方数.

却又不会证,就大胆给数论专家曹珍富(哈尔滨工业大学)先生求教,曹先生迅速回信说,该结论由他的注释② 可立即得到.因为笔者未能读到文献[2],所以本文再另行证明引理 1.

定理 1[1] (Ljunggren定理)不定方程$\dfrac{x^n-1}{x-1}=y^2$(正奇数 $n>1,x>1$)的正整数解为$(x,y,n)=(3,11,5)$.

定理 2 若不定方程$\dfrac{x^n-1}{x-1}=y^2(x>1,2\mid n)$有正整数解,则 $n=2^k$,且 $k>1$ 时,$2\nmid x$.

证明 总可设 $n=2^km(k,m\in\mathbf{N}^*,2\nmid m)$.

$$x^n-1=(x^m)^{2^k}-1=(x^m-1)\prod_{i=0}^{k-1}[(x^m)^{2^i}+1]$$

可以证明 $x^m-1,(x^m)^{2^i}+1(i=0,1,\cdots,k-1)$ 这 $k+1$ 个式子中每两个式子的最大公约数是 1 或 2(当且仅当 $2\mid x$ 时为 1;当且仅当 $2\nmid x$ 时为 2),且 $2\parallel (x^m)^{2^i}+1(i\in\mathbf{N}^*,2\nmid x)$:

$$(x^m-1,(x^m)^{2^i}+1)=(x^m-1,2)=1\text{ 或 }2$$

$$((x^m)^{2^i}+1),(x^m)^{2^{i+j}}+1)=((x^m)^{2^i}+1),(-1)^{2^j}+1)=1\text{ 或 }2$$

由题设可得,$\dfrac{x^{2^km}-1}{x-1}=\dfrac{x^m-1}{x-1}\prod\limits_{i=0}^{k-1}[(x^m)^{2^i}+1]=y^2(x>1,2\nmid m)$有正整数解.

若 $2\mid x$,则
$$\begin{cases}\dfrac{x^m-1}{x-1}=u^2\\ x^m+1=v^2\end{cases}\quad(u,v\in\mathbf{N}^*)$$

---

① 甘志国.平方 m 重连整数 // 傅海伦.中国教育优秀论文集.天津:天津社会科学院出版社,1998.
② 曹珍富.解丢番图方程的一种有力的初等方法 // 初等数学研究论文选.上海:上海教育出版社,1992.

又假设 $m>1$,由定理 1,得 $x=3, m=5$,所以 $x^m+1=3^5+1=244=v^2$,与 $v\in\mathbf{N}$ 矛盾!所以 $m=1$.

若 $2\nmid x$,则 $\frac{x^m-1}{x-1}=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2}[(x^m)^{2^i}+1]=\frac{y^2}{2^k}(x>1,2\nmid m)$ 有正整数解.

可证 $\frac{x^m-1}{x-1}$ 为奇数(因为 $2\nmid x, 2\nmid m$),$\frac{1}{2}[(x^m)^{2^i}+1](i=1,\cdots,k-1)$ 全是奇数.得:

$$\begin{cases}\frac{x^m-1}{x-1}=u^2\\ \frac{1}{2}(x^m+1)=v^2 \text{ 或 } 2v^2\end{cases}\quad(u,v\in\mathbf{N}^*)$$

由定理 1,也可证得 $m=1$.

总之,均有 $m=1$,所以 $n=2^km=2^k$.

当 $k>1$ 时,假设 $2\mid x$,得

$$\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x^{2^k}-1}{x-1}=\prod_{i=0}^{k-1}(x^{2^i}+1)=y^2$$

所以 $x^2+1=w^2(w\in\mathbf{N}^*)$,而由勾股数组知,这不可能!所以当 $k>1$ 时,$2\nmid x$.

注释 ① 引理 1 的证明

由定理 1 知,当 $2\nmid m$ 时成立.

由定理 2 知,当 $2\mid m$ 且 $m>2$ 时成立.

下证 $m=2$ 时成立,即证 10^k+1 不是完全平方数.

假设 10^k+1 为完全平方数,则可设

$$10^k+1=(10a\pm1)^2=20a(5a\pm1)+1$$

$$5^{k-1}\cdot2^{k-1}=a(5a\pm1),\text{得 } k\geqslant2$$

可设 $a=5^{k-1}b$,得 $2^{k-2}=b(5^kb\pm1)\geqslant5^k-1>2^{k-2}$,这不可能!所以 10^k+1 不为完全平方数.

参考文献

[1] SUN QI, YUAN PINGZHI. On the Diophantine Equations $\frac{ax^n-1}{ax-1}=y^2$ and $\frac{ax^n+1}{ax+1}=y^2$[J]. 数学进展,1989,18(3):373-374.

所有的金蝉脱壳数的求法

1 一个定理的简化

文献[1]给出了金蝉脱壳数的定义及一种构造方法(下面的叙述略有改动):

定义 若$2n(n\in \mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$元有序整数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n;x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n})$满足

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=n+1}^{2n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=n+1}^{2n}x_i^2\end{cases} \tag{①}$$

则这个有序整数组叫做$2n$元金蝉脱壳数.

定理1 若$x,y,z\in \mathbf{Z},3\mid x+y-2z,a=\frac{2}{3}(x+y-2z)$,则有序数组$(x,y,z;z+a,x-\frac{1}{2}a,y-\frac{1}{2}a)$是6元金蝉脱壳数.

下面把这个定理进行简化.

在定理1中令$x+y-2z=3u(u\in \mathbf{Z})$,得$a=2u,x=3u-y+2z,z+a=z+2u,x-\frac{1}{2}a=2u-y+2z,y-\frac{1}{2}a=y-u$.从而可把定理1改述为:

有序整数组$(3u-y+2z,y,z;z+2u,2u-y+2z,y-u)$是6元金蝉脱壳数.

再作代换$y\to r,z\to s,u\to t$,得

定理1′ 有序整数组$(-r+2s+3t,r,s;r-t,s+2t,-r+2s+2t)$是6元金蝉脱壳数.

用上述定义还可验证以下:

定理2 设有序整数组$(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6)$,$(x'_1,x'_2,x'_3;x'_4,x'_5,x'_6)$都是由定理1′得到的6元金蝉脱壳数,则对于任意整数k,k',有序整数组$(kx_1+k'x'_1,kx_2+k'x'_2,kx_3+k'x'_3;kx_4+k'x'_4,kx_5+k'x'_5,kx_6+k'x'_6)$也是6元金蝉脱壳数.

2 所有的4元、6元金蝉脱壳数

定理3 所有的4元金蝉脱壳数均可表示为有序整数组$(x_1,x_2;x_1,x_2)$或

$(x_1,x_2;x_2,x_1)$ 的形式.

证明不难,因而略去.

定理 4 所有的 6 元金蝉脱壳数均可表示为有序整数组:

$(x_4+ka-lb-ab+kl, x_4+ka, x_4-lb; x_4, x_4+ka-lb-ab, x_4+ka-lb+kl)$(其中 $x_4,a,b,k,l\in\mathbf{Z}$) ②

的形式.

为证明定理 4,先给出

引理 $A\mid BC(A,B,C\in\mathbf{Z})\Leftrightarrow$ 存在 $a,b,k,l\in\mathbf{Z}$,使 $A=ab,B=ka,C=lb$.

证明 $\Rightarrow$ 显然,只需证明 $A,B,C\in\mathbf{N}$ 的情形.

当 $B=0$ 时,选 $a=A,b=1,k=0,l=C$,即得结论成立.

当 $B=1$ 时,得 $A\mid C$,可设 $C=rA,r\in\mathbf{Z}$,选 $a=1,b=A,k=1,l=r$,即得结论成立.

同理,有 $C=0,1$ 时结论成立.

当 $A=0$ 时,得 $0\mid BC$,所以 $BC=0$,得 $B=0$ 或 $C=0$,由以上证明知,此时结论成立.

下证当 $A,B,C\in\mathbf{N}^*,B\geqslant 2,C\geqslant 2$ 时,结论成立.

由算术基本定理,可设 $B=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i,s\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,s$),$C=\prod_{j=1}^{t}q_j^{\beta_j}$($q_j$ 是互不相同的素数,$\beta_j,t\in\mathbf{N}^*,j=1,\cdots,t$).

因为 $A\mid BC$,即 $A\mid\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}\cdot\prod_{j=1}^{t}q_j^{\beta_j}$,又 $A\in\mathbf{N}^*$,所以可设 $A=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha'_i}\cdot\prod_{j=1}^{t}q_j^{\beta'_j}$($\alpha'_i,\beta'_j\in\mathbf{N}$,且 $\alpha'_i\leqslant\alpha_i,\beta'_j\leqslant\beta_j,i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,t$).

选 $a=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha'_i},b=\prod_{j=1}^{t}q_j^{\beta'_j},k=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i-\alpha'_i},l=\prod_{j=1}^{t}q_j^{\beta_j-\beta'_j}$,即得结论成立.

$\Leftarrow$ 显然成立.

定理 4 的证明 只需证明方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=x_4+x_5+x_6\\x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_4^2+x_5^2+x_6^2\end{cases}\qquad ③$$

的全部整数解$(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6)$为②.

先证明③的整数解均可由②得到.

由③可得,

$$(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=(x_4+x_5+x_6)^2-(x_4^2+x_5^2+x_6^2)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 =$$
$$x_4x_5 + (x_4 + x_5)(x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5)$$
$$(x_1 - x_5)(x_2 + x_3 - x_4 - x_5) = (x_2 - x_4)(x_4 - x_3) \quad ④$$

当 $x_2 + x_3 \neq x_4 + x_5$ 时,$x_1 = \dfrac{(x_2 - x_4)(x_4 - x_3)}{x_2 + x_3 - x_4 - x_5} + x_5$.

由 $x_1 \in \mathbf{Z}$,得 $x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \mid (x_2 - x_4)(x_4 - x_3)$.由引理,可设 $x_2 - x_4 = ka, x_4 - x_3 = lb(a,b,k,l \in \mathbf{Z})$,得 $x_1 = kl + x_5, x_6 = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5$,从而可证,此时的解可由 ② 得到.

当 $x_2 + x_3 = x_4 + x_5$ 时,由 ④ 得 $x_2 = x_4$ 或 $x_4 = x_3$,可得此时 ③ 的解为 $(x_1,x_2,x_3;x_2,x_3,x_1)$ 或 $(x_1,x_2,x_3;x_3,x_2,x_1)$(其中 $x_1,x_2,x_3 \in \mathbf{Z}$).而在 ① 中选 $a = 0$ 或 $b = 0$ 即得这两组解.

再证 ② 是 ③ 的整数解.这是容易验证的.

定理 5 设 $x_1 = x_4 + ka - lb - ab + kl, x_2 = x_4 + ka, x_3 = x_4 - lb, x_5 = x_4 + ka - lb - ab, x_6 = x_4 + ka - lb + kl(x_4,a,b,k,l \in \mathbf{Z})$;$x'_1 = x'_4 + k'a' - l'b' - a'b' + k'l', x'_2 = x'_4 + k'a', x'_3 = x'_4 - l'b', x'_5 = x'_4 + k'a' - l'b' - a'b', x'_6 = x'_4 + k'a' - l'b' + k'l'(x'_4,a',b',k',l' \in \mathbf{Z})$,则$(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3; x_4 + x'_4, x_5 + x'_5, x_6 + x'_6)$ 是 6 元金蝉脱壳数的充要条件是 $(al' - a'l)(bk' - b'k) = 0$.

证明 由题设及定理 4,有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = x'_4 + x'_5 + x'_6 \\ x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = x'^2_4 + x'^2_5 + x'^2_6 \end{cases}$$

所以 $(x_1 + x'_1) + (x_2 + x'_2) + (x_3 + x'_3) = (x_4 + x'_4) + (x_5 + x'_5) + (x_6 + x'_6)$

$(x_1 + x'_1)^2 + (x_2 + x'_2)^2 + (x_3 + x'_3)^2 = (x_4 + x'_4)^2 + (x_5 + x'_5)^2 + (x_6 + x'_6)^2 \Leftrightarrow x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = x_4x'_4 + x_5x'_5 + x_6x'_6$

所以要证明定理 5,只需证明

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = x_4x'_4 + x_5x'_5 + x_6x'_6 \Leftrightarrow (al' - a'l)(bk' - b'k) = 0$$

它由题设代入,即可获证.

由定理 4,5,可得

定理 6 (1)$(x_4 + ka_0 - l_0b - a_0b + kl_0, x_4 + ka_0, x_4 - l_0b; x_4, x_4 + ka_0 - l_0b - a_0b, x_4 + ka_0 - l_0b + kl_0)$(其中 x_4, b, k 可取任意变化的整数,a_0, l_0 是固

定不变的任意整数)是6元金蝉脱壳数.设$(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6)$,$(x'_1,x'_2,x'_3;x'_4,x'_5,x'_6)$是按此方法得到的两组金蝉脱壳数,则对于任意的整数$u,u'$,$(ux_1+u'x'_1,ux_2+u'x'_2,ux_3+u'x'_3;ux_4+u'x'_4,ux_5+u'x'_5,ux_6+u'x'_6)$也是6元金蝉脱壳数.

(2)$(x_4+k_0a-lb_0-ab_0+k_0l,x_4+k_0a,x_4-lb_0;x_4,x_4+k_0a-lb_0-ab_0,x_4+k_0a-lb_0+k_0l)$(其中$x_4,a,l$可取任意变化的整数,$b_0,k_0$是固定不变的任意整数)是6元金蝉脱壳数.设$(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6)$,$(x'_1,x'_2,x'_3;x'_4,x'_5,x'_6)$是按此方法得到的两组金蝉脱壳数,则对于任意的整数$u,u'$,$(ux_1+u'x'_1,ux_2+u'x'_2,ux_3+u'x'_3;ux_4+u'x'_4,ux_5+u'x'_5,ux_6+u'x'_6)$也是6元金蝉脱壳数.

在定理4中,令$a=-t,b=1,k=-1,l=r-s-t,x_4=r-t$,可得定理1'.因而定理2也是定理6(2)的推论.

3 所有的$2n(n\geqslant 4)$元金蝉脱壳数

要求出所有的$2n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 4)$元金蝉脱壳数,就是要求出$n\geqslant 4$时,方程组①的全部整数解.可见下面的

定理7 当$n\geqslant 4$时,方程组①的全部整数解满足:

$$x_1=\frac{-\sum\limits_{2\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j-\sum\limits_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-2}x_ix_j+\left(\sum\limits_{i=2}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=n+1}^{2n-2}x_i\right)-\sum\limits_{i=n+1}^{2n-2}x_i^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}x_i-\sum\limits_{i=n+1}^{2n-1}x_i}+x_{2n-1}$$

(其中$x_2,\cdots,x_{2n-2}$为任意整数,x_{2n-1}为整数),且$\sum\limits_{i=2}^{n}x_i-\sum\limits_{i=n+1}^{2n-1}x_i \Big| -\sum\limits_{2\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j-\sum\limits_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-2}x_ix_j+\left(\sum\limits_{i=2}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=n+1}^{2n-2}x_i\right)-\sum\limits_{i=n+1}^{2n-2}x_i^2$,$\sum\limits_{i=2}^{n}x_i\neq\sum\limits_{i=n+1}^{2n-1}x_i)$,

$$x_{2n}=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i;$$

或

$$\begin{cases}x_1=x_{2n}\\ \sum\limits_{i=2}^{n}x_i=\sum\limits_{i=n+1}^{2n-1}x_i\\ \sum\limits_{i=2}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=n+1}^{2n-1}x_i^2\end{cases}$$

(其中$x_1,x_2,\cdots,x_{2n}\in\mathbf{Z}$).

证明 由①可得$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\sum\limits_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n}x_ix_j$,$x_{2n}=x_1+\sum\limits_{i=2}^{n}x_i-\sum\limits_{i=n+1}^{2n-1}x_i$.

所以 $x_1\sum_{i=2}^{n}x_i+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\sum_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-1}x_ix_j+(\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i)x_{2n}=$

$$\sum_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-1}x_ix_j+(\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i)(x_1+\sum_{i=2}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i)$$

$x_1(\sum_{i=2}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i)=-\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j+\sum_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-1}x_ix_j+(\sum_{i=2}^{n}x_i)(\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i)-(\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i)^2=-\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j-\sum_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-1}x_ix_j+(\sum_{i=2}^{n}x_i)(\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i)-\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i^2=-\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j-\sum_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-2}x_ix_j+(\sum_{i=2}^{n}x_i)(\sum_{i=n+1}^{2n-2}x_i)-\sum_{i=n+1}^{2n-2}x_i^2+x_{2n-1}(\sum_{i=2}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i)$

所以当 $\sum_{i=2}^{n}x_i\neq\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i$ 时

$$x_1=\frac{-\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j-\sum_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-2}x_ix_j+(\sum_{i=2}^{n}x_i)(\sum_{i=n+1}^{2n-2}x_i)-\sum_{i=n+1}^{2n-2}x_i^2}{\sum_{i=2}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i}+x_{2n-1}$$

因为 $x_1\in\mathbf{Z}$，所以有相应的整除关系．由 $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=n+1}^{2n}x_i$，得 $x_{2n}=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i$.

当 $\sum_{i=2}^{n}x_i=\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i$ 时，由 ① 可得 $x_1=x_{2n}$，$\sum_{i=2}^{n}x_i^2=\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i^2$.

由定理 7 可求出方程组 ①($n\geqslant 4$ 时) 的全部整数解.

在定理 7 中，令 $\sum_{i=2}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n-1}x_i=\pm 1$，得

推论　$x_1=\mp[\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j+\sum_{n+1\leqslant i<j\leqslant 2n-2}x_ix_j-(\sum_{i=2}^{n}x_i)(\sum_{i=n+1}^{2n-2}x_i)+\sum_{i=n+1}^{2n-2}x_i^2]+\sum_{i=2}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n-2}x_i\mp 1$，$x_{2n-1}=\sum_{i=2}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n-2}x_i\mp 1$，$x_{2n}=x_1\pm 1$（$x_2,\cdots,x_{2n-2}$ 是任意整数）是方程组 ①($n\geqslant 4$ 时) 的整数解.

参考文献

[1] 刘军.趣谈“金蝉脱壳数”的构造[J].中学数学月刊,1997(12):19-20.

浅探四个问题

本文运用文献[1]的定理4′(文献[1]有两处印刷错误:第25页第四行中的“$z\nmid a+b$”应改为“$3\nmid a+b$”;第二十行中的第一个“$3\mid a+b$”应改为“$3\nmid a+b$”)浅探该文末提出的四个问题.

由文献[1]的定理4′易证得

定理1 不定方程

$$p^2-pq+q^2=z^2(p>q) \qquad ①$$

满足$(p,q,z)=1$的全部正整数解是(下面的$a,b\in\mathbf{N}^*$,$(a,b)=1$,$3\nmid a+b$):

$$\begin{cases}p=2ab-b^2\\q=a^2-b^2\\z=a^2-ab+b^2\end{cases}\quad(b<a<2b)$$

或

$$\begin{cases}p=b^2-a^2\\q=b^2-2ab\\z=a^2-ab+b^2\end{cases}\quad(b>2a).$$

在定理1的第一组解中令$2a-b=d$,得$b,d\in\mathbf{N}^*$,$b<d<3b$,$a=\frac{b+d}{2}$,$2\mid b+d$,$(\frac{b+d}{2},b)=1$,$3\nmid d$.又分两种情形:

(1) 当$2\nmid bd$时,得解为

$$\begin{cases}p=bd\\q=\frac{1}{4}(d^2+2bd-3b^2)\\z=\frac{1}{4}(d^2+3b^2)\end{cases}$$

(其中$b,d\in\mathbf{N}^*$,$2\nmid bd$,$3\nmid d$,$b<d<3b$,$(b,d)=1$).

(2) 当$b=2b'$,$d=2d'$,$b',d'\in\mathbf{N}^*$时,得解为

$$\begin{cases}p=4b'd'\\q=d'^2+2b'd'-3b'^2\\z=d'^2+3b'^2\end{cases}$$

(其中$b',d'\in\mathbf{N}^*$,$2\mid b'd'$,$3\nmid d'$,$b'<d'<3b'$,$(b',d')=1$).

在定理1的第二组解中令$b+a=r$,$b-a=s$,得$r,s\in\mathbf{N}^*$,$b=\frac{r+s}{2}$,

$a=\frac{r-s}{2}$,$2\mid r+s$,$3\nmid a+b\Leftrightarrow 3\nmid r$,$b>2a>0\Leftrightarrow s<r<3s$,$(a,b)=1\Leftrightarrow(r+s,2r)=2$.又分两种情形:

(3) 当 $2\nmid rs$ 时,得解为$\begin{cases}p=rs\\ q=\frac{1}{4}(3s^2+2rs-r^2)\\ z=\frac{1}{4}(3s^2+r^2)\end{cases}$

(其中 $r,s\in\mathbf{N}^*$,$2\nmid rs$,$3\nmid r$,$s<r<3s$,$(r,s)=1$).

(4) 当 $r=2r'$,$s=2s'$,$r',s'\in\mathbf{N}^*$ 时,得解为$\begin{cases}p=4r's'\\ q=3s'^2+2r's'-r'^2\\ z=3s'^2+r'^2\end{cases}$

(其中 $r',s'\in\mathbf{N}^*$,$3\nmid r'$,$2\mid r's'$,$s'<r'<3s'$,$(r',s')=1$).

综上所述,可得

定理2 不定方程①的全部正整数解是(下面的 $r,s,t\in\mathbf{N}^*$,$(r,s)=1$,$s<r<3s$,$3\nmid r$):

$$\begin{cases}p=rst\\ q=\frac{1}{4}(r^2+2rs-3s^2)t\text{ 或 }rst-\frac{1}{4}(r^2+2rs-3s^2)t\\ z=\frac{1}{4}(r^2+3s^2)t\end{cases}$$

(其中 $2\nmid rs$);

或
$$\begin{cases}p=4rst\\ q=(r^2+2rs-3s^2)t\text{ 或 }4rst-(r^2+2rs-3s^2)t\\ z=(r^2+3s^2)t\end{cases}$$

(其中 $2\mid rs$).

以上 $t=1$ 时的解,即为不定方程①满足 $(p,q,z)=1$ 的全部解,也即满足 p,q,z 两两互素的全部解.

在定理2中可证:每一组 (r,s,t) 对应于两组不同的解,不同的一组 (r,s,t) 对应的解均不相同.

下面研究文献[1]末提出的问题:

(1) 当 p 是已知的正整数时,求出不定方程①的正整数解 (q,z) 的组数 $G(p)$.

(2) 当 p 是已知的正整数时,求出不定方程①满足 $(q,z)=1$ 的正整数解 (q,z) 的组数 $G_0(p)$.

(3) 求出所有的正整数 p,使 $G(p)=0$.

(4) 求出所有的正整数 p,使 $G_0(p)=0$.

文献[2]给出了以下定义及引理:

定义 若 $a\in\mathbf{N}^*$, $a\mid n$, $(a,\frac{n}{a})=1$, 则把 a 叫做 n 的一个互素正约数.

引理 设正整数 $n(n\geqslant 2)$ 的全部素因数个数为 $k(k\in\mathbf{N}^*)$, 则

(1) n 的全部互素正约数的个数为 2^k;

(2) n 的全部小于 $\sqrt{n}$ 的互素正约数个数为 2^{k-1}.

定理 3 (1) 设 P 是已知的正奇数, 则满足 $p=rs(r,s\in\mathbf{N}^*,(r,s)=1,s<r<3s,3\nmid r)$ 的有序数组 (r,s) 的组数是 $f_0(p)$. 其中 $f_0(p)$ (p 是正整数) 表示 p' 的全部属于区间 $(\sqrt{3^{-\alpha-1}p'},\sqrt{3^{-\alpha}p'})$ 的互素正约数个数, 这里 α,p' 由 p 确定: $p=3^{\alpha}p'$, $\alpha\in\mathbf{N}$, $p'\in\mathbf{N}^*$, $3\nmid p'$.

(2) 设 p 是已知的正偶数, 且 $8\mid p$, 则满足 $p=4rs(r,s\in\mathbf{N}^*,(r,s)=1,s<r<3s,3\nmid r)$ 的有序数组 (r,s) 的组数是 $f_0(\frac{p}{4})$.

证明 (1) $s<r<3s\Leftrightarrow s^2<p<3s^2\Leftrightarrow s\in(\sqrt{3^{-1}p},\sqrt{p})$.

因为 $p=3^{\alpha}p'=rs$, $3\nmid p'$, 所以 $3\nmid r\Leftrightarrow 3^{\alpha}\mid s$, 设 $s=3^{\alpha}s'$, $s'\in\mathbf{N}^*$, $s\in(\sqrt{3^{-1}p},\sqrt{p})\Leftrightarrow s'\in(\sqrt{3^{-\alpha-1}p'},\sqrt{3^{-\alpha}p'})$, 所以满足 $p=rs(r,s\in\mathbf{N}^*,(r,s)=1,s<r<3s,3\nmid r)$ 的有序数组 (r,s) 的组数即满足 $p'=rs'(r,s'\in\mathbf{N}^*,(r,s')=1,s'\in(\sqrt{3^{-\alpha-1}p'},\sqrt{3^{-\alpha}p'}))$ 的有序数组 (r,s') 的组数 $f_0(p)$. 即结论 ① 成立.

(2) 就是显然的了.

由定理 2,3, 得

定理 4 (1) 当 p 是已知的正奇数时, $G_0(p)=2f_0(p)$.

(2) 当 p 是已知的正偶数且 $8\mid p$ 时, $G_0(p)=2f_0(\frac{p}{4})$.

(3) 当 $2\mid p$ 且 $8\nmid p$ 时, $G_0(p)=0$.

定理 5 $G(p)=2\sum\limits_{t\mid p\text{且}2t\nmid p}f_0(\frac{p}{t})+2\sum\limits_{t\mid\frac{p}{8}}f_0(\frac{p}{4t})$.

定理 4,5 把问题(2),(1) 中求 $G_0(p)$, $G(p)$ 的问题都转化为求 $f_0(p)$ 的问题, 但要求出 $f_0(p)$ 的表达式也是不容易的. 读者可参见上述引理及文献[3] 的结论进行研究:

设 p 是已知的正整数, $p=2^{\alpha}\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$ (p_i 是互不相同的奇素数, $\alpha,\alpha_i\in\mathbf{N}$, $i=1,2,\cdots,k$, 则满足 $p=rst(r,s,t\in\mathbf{N}^*,(r,s)=1)$ 的有序数组 (r,s,t) 的组数是 $(\alpha+1)\prod\limits_{i=1}^{k}(2\alpha_i+1)$.

由定理 2 还可证得:

定理 6 当 p 只含有一个素因数时, 设 $p=m^{\alpha}$ (m 是素数, $\alpha\in\mathbf{N}^*$), 则

(1) 当且仅当 $m = 2$ 且 $\alpha \geqslant 3$ 时 $G(p) \neq 0$(此时 $G(p) = 2$,不定方程①的全部正整数解是 $q = 5 \cdot 2^{\alpha-3}$ 或 $3 \cdot 2^{\alpha-3}$,$z = 7 \cdot 2^{\alpha-3}$).

(2) 当且仅当 $p = 8$ 时,$G_0(p) \neq 0$(此时 $G_0(p) = 2$,不定方程①满足 $(q,z) = 1$ 的全部解是 $q = 5$ 或 3,$z = 7$).

定理 6 即文献[1]的定理 6.

定理 7 当 p 只含有两个素因数时:

(1) 又 $(6,p) = 1$ 时,设 $p = m^\alpha n^\beta$(m,n 是不同的素数,$m > 3$,$n > 3$,$\alpha,\beta \in \mathbf{N}^*$,$m^\alpha < n^\beta$),则:

1) 当且仅当 $n^\beta < 3m^\alpha$ 时 $G(p) \neq 0$(此时 $G(p) = G_0(p) = 2$,不定方程①的全部正整数解是 $q = \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 2p - 3m^{2\alpha})$ 或 $p - \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 2p - 3m^{2\alpha})$,$z = \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 3m^{2\alpha})$,有 $(q,z) = 1$)

2) 当且仅当 $n^\beta < 3m^\alpha$ 时 $G_0(p) \neq 0$(此时 $G_0(p) = 2$).

(2) 又 $3 \nmid p$ 且 $2 \mid p$ 时,设 $p = 2^\alpha n^\beta$(n 是素数,$n > 3$,$\alpha,\beta \in \mathbf{N}^*$),则:

1) 当且仅当 $\alpha = 3$,或 $2^{\alpha-2} < n^\beta < 3 \cdot 2^{\alpha-2}$,或 $n^\beta < 2^{\alpha-2} < 3n^\beta$ 时,$G(p) \neq 0$(此时 $G(p) = 2$ 或 4):

当 $\alpha = 3$,且 $n^\beta \neq 5$ 时,不定方程①的全部正整数解为 $q = 5n^\beta$ 或 $3n^\beta$,$z = 7n^\beta$,有 $(q,z) = n^\beta > 1$.

当 $\alpha = 3$ 且 $n^\beta = 5$ 时,不定方程①的全部正整数解是($q = 25$ 或 15,$z = 35$,有 $(q,z) = 5$)或($q = 33$ 或 7,$z = 37$,有 $(q,z) = 1$).当 $\alpha > 3$ 且 $2^{\alpha-2} < n^\beta < 3 \cdot 2^{\alpha-2}$ 时,不定方程①的全部正整数解为 $q = n^{2\beta} + \frac{1}{2}p - 3 \cdot 4^{\alpha-2}$ 或 $p - (n^{2\beta} + \frac{1}{2}p - 3 \cdot 4^{\alpha-2})$,$z = n^{2\beta} + 3 \cdot 4^{\alpha-2}$,有 $(q,z) = 1$.

当 $\alpha > 3$ 且 $n^\beta < 2^{\alpha-2} < 3 \cdot n^\beta$ 时,不定方程①的全部正整数解为 $q = 4^{\alpha-2} + \frac{1}{2}p - 3n^{2\beta}$ 或 $p - (4^{\alpha-2} + \frac{1}{2}p - 3n^{2\beta})$,$z = 4^{\alpha-2} + 3n^{2\beta}$,有 $(q,z) = 1$.

2) 当且仅当以上的后三种情形 $G_0(p) \neq 0$(此时 $G_0(p) = 2$).

(3) 又 $3 \mid p$ 且 $2 \nmid p$ 时,设 $p = 3^\alpha n^\beta$(n 是素数,$n > 3$,$\alpha,\beta \in \mathbf{N}^*$),则

1) 当且仅当 $3^\alpha < n^\beta < 3^{\alpha+1}$ 时 $G(p) \neq 0$(此时 $G(p) = G_0(p) = 2$,不定方程①的全部正整数解是 $q = \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 2p - 3^{2\alpha+1})$ 或 $p - \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 2p - 3^{2\alpha+1})$,$z = \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 3^{2\alpha+1})$,有 $(q,z) = 1$).

2) 当且仅当 $3^\alpha < n^\beta < 3^{\alpha+1}$ 时 $G_0(p) \neq 0$(此时 $G_0(p) = 2$).

(4) 又 $6 \mid p$ 时,设 $p = 2^\alpha 3^\beta$($\alpha,\beta \in \mathbf{N}^*$),则:

1) 当且仅当以下两种情形 $G(p) \neq 0$(此时 $G(p) = 2$):

当 $3^{\beta} < 2^{\alpha-2} < 3^{\beta+1}$ 时，不定方程 ① 的全部正整数解为 $q = 4^{\alpha-2} + \frac{1}{2}p - 3^{2\beta+1}$ 或 $p - (4^{\alpha-2} + \frac{1}{2}p - 3^{2\beta+1})$，$z = 4^{\alpha-2} + 3^{2\beta+1}$，有 $(q,z) = 1$.

当 $\alpha = 3$ 时，不定方程 ① 的全部正整数解为 $q = 5 \cdot 3^{\beta}$ 或 $3^{\beta+1}$，$z = 7 \cdot 3^{\beta}$，有 $(q,z) = 3^{\beta} > 1$.

2) 当且仅当 $3^{\beta} < 2^{\alpha-2} < 3^{\beta+1}$ 时 $G_0(p) \neq 0$（此时 $G_0(p) = 2$）.

推论 当 p 的素因数个数小于3时，$G(p) = 0,2$ 或 4（当且仅当 $p = 40$ 时，$G(p) = 4$），$G_0(p) = 0$ 或 2.

	$G(p) \neq 0$ 的充要条件	此时 $G(p)$ 的值	此时不定方程 ① 的全部正整数解	$G_0(p) \neq 0$ 的充要条件	此时 $G_0(p)$ 的值	此时不定方程 ① 的全部正整数解
(1)	$n^{\beta} < 3m^{\alpha}$	2	$\begin{cases} q = \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 2p - 3m^{2\alpha}) \\ \quad 或\ p - \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 2p - 3m^{2\alpha}) \\ z = \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 3m^{2\alpha}) \end{cases}$	$n^{\beta} < 3m^{\alpha}$	2	同该行第四栏
(2)	$\alpha = 3$ 或 $2^{\alpha-2} < n^{\beta} < 3 \cdot 2^{\alpha-2}$ 或 $n^{\beta} < 2^{\alpha-2} < 3n^{\beta}$	2 或 4	1) 当 $\alpha = 3$ 且 $n^{\beta} \neq 5$ 时 $\begin{cases} q = 5n^{\beta}\ 或\ 3n^{\beta} \\ z = 7n^{\beta} \end{cases}$ 2) 当 $\alpha = 3$ 且 $n^{\beta} = 5$ 时 $\begin{cases} q = 25\ 或\ 15 \\ z = 35, \end{cases}$ $\begin{cases} q = 33\ 或\ 7 \\ z = 37 \end{cases}$ 3) 当 $\alpha > 3$ 且 $2^{\alpha-2} < n^{\beta} < 3 \cdot 2^{\alpha-2}$ 时， $\begin{cases} q = n^{2\beta} + \frac{1}{2}p - 3 \cdot 4^{\alpha-2} \\ \quad 或\ \frac{1}{2}p - n^{2\beta} - 3 \cdot 4^{\alpha-2} \\ z = n^{2\beta} + 3 \cdot 4^{\alpha-2} \end{cases}$ 4) 当 $\alpha > 3$ 且 $n^{\beta} < 2^{\alpha-2} < 3n^{\beta}$ 时， $\begin{cases} q = 4^{\alpha-2} + \frac{1}{2}p - 3n^{2\beta} \\ \quad 或\ \frac{1}{2}p - 4^{\alpha-2}p + 3n^{2\beta} \\ z = 4^{\alpha-2} + 3n^{2\beta} \end{cases}$	该行左边 2),3),4) 中的条件	2	参见该行第四栏中的 2),3),4)（只需去掉 2) 中 $z = 35$ 的情形）

续　　表

(3)	$3^{\alpha} < n^{\beta} < 3^{\alpha+1}$	2	$\begin{cases} q = \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 2p - 3^{2\alpha+1}) \\ \quad 或 \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}(n^{2\beta} - 3^{2\alpha+1}) \\ z = \frac{1}{4}(n^{2\beta} + 3^{2\alpha+1}) \end{cases}$	$3^{\alpha} < n^{\beta} < 3^{\alpha+1}$	2	同该行第四栏
(4)	$3^{\beta} < 2^{\alpha-2} < 3^{\beta+1}$，或 $\alpha = 3$	2	1) 当 $3^{\beta} < 2^{\alpha-2} < 3^{\beta+1}$ 时，$\begin{cases} q = 4^{\alpha-2} + \frac{1}{2}p - 3^{2\beta+1} \\ \quad 或 \frac{1}{2}p - 4^{\alpha-2}p + 3^{2\beta+1} \\ z = 4^{\alpha-2} + 3^{2\beta+1} \end{cases}$ 2) 当 $\alpha = 3$ 时，$\begin{cases} q = 5 \cdot 3^{\beta} 或 3^{\beta+1} \\ z = 7 \cdot 3^{\beta} \end{cases}$	$3^{\beta} < 2^{\alpha-2} < 3^{\beta+1}$	2	同该行第四栏的 1)

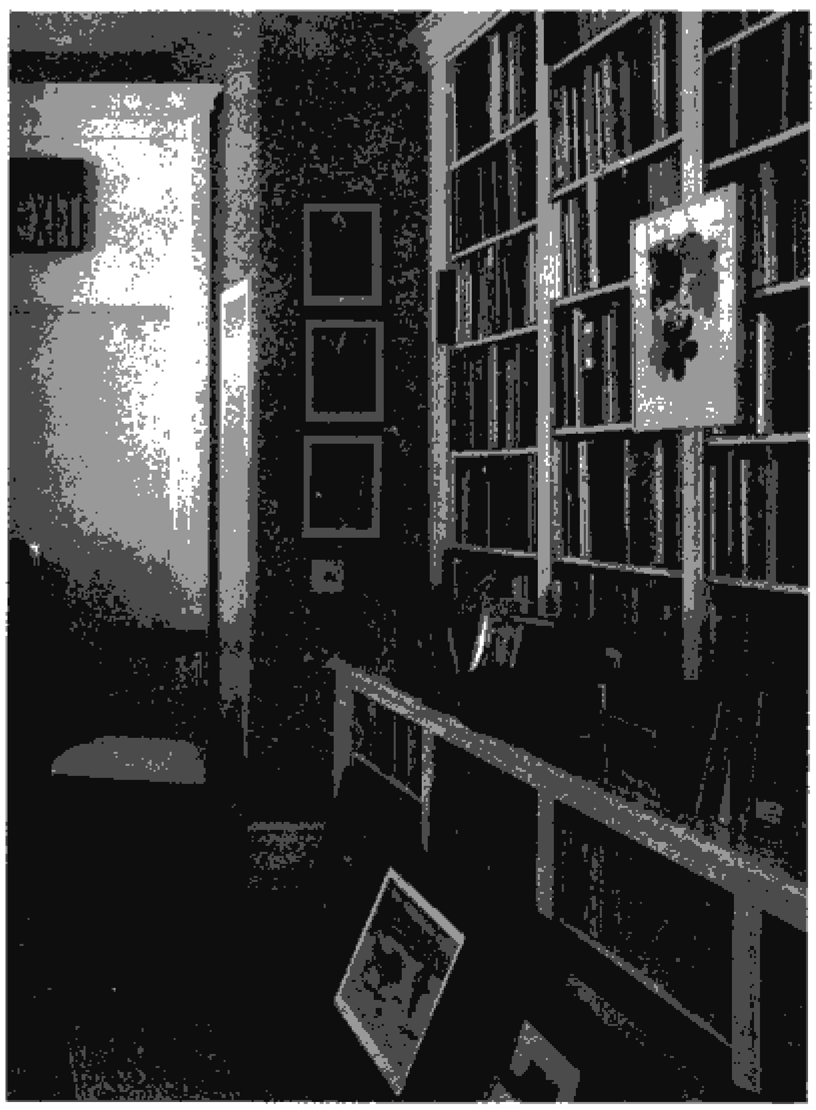
参考文献

[1] 甘志国,张琳.整边正三角形的二剖分[J].中学数学月刊,2000(2):24-25,31.

[2] 甘志国.自然数的互素平方差分拆[J].中学数学月刊,1997(11):15-16.

[3] 甘志国.已知内切圆半径的(基本)勾股形的个数[J].数学通讯,1997(2):34-35.

集　　合



一类集合的元素个数

定义1　本文记$A=\{(x,y)\mid x,y\in \mathbf{N},x+y\leqslant s\}(s\in \mathbf{N})$,$M=\{ax+by\mid (x,y)\in A\}$($a,b\in \mathbf{C}^*$(表示所有非零复数组成的集合)),$G_2(a,b;s)=|M|$(即集合$M$的元素个数).

本文将求出$G_2(a,b;s)$.

1　当$a,b\in \mathbf{C}^*,\frac{a}{b}\in \mathbf{Q}$时

1.1　当$a,b\in \mathbf{N}^*,(a,b)=1$时

因为$G_2(a,b;s)=G_2(b,a;s)$,所以只需研究$a\geqslant b$的情形.

记$B=\{0,1,2,\cdots,a-1\}$,$A_0=\{(x,y)\mid (x,y)\in A,y\in B\}$,$M_0=\{ax+by\mid (x,y)\in A_0\}$,下证$M=M_0$.只需证$M\subset M_0$:

对于任意的$(x,y)\in A$,即$x,y\in \mathbf{N}$且$x+y\leqslant s$,可设$y=ka+y_0$($k\in \mathbf{N},y_0\in B$),易证

$$ax+by=a(kb+x)+by_0$$

且
$$(kb+x)+y_0\leqslant (ka+x)+y_0=x+y\leqslant s$$

即$(kb+x,y_0)\in A_0$(因为可证$kb+x\in \mathbf{N}$),所以$M\subset M_0$.

设$(x_i,y_i)\in A_0(i=1,2)$,$(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$,再证$ax_1+by_1\neq ax_2+by_2$.

否则,有$a(x_1-x_2)=b(y_2-y_1)$,由$(a,b)=1$,得$a\mid y_2-y_1$.

又$y_1,y_2\in B$,所以$y_1=y_2$,进而有$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$,矛盾!所以要证结论成立.

从而,得
$$G_2(a,b;s)=|M|=|M_0|=|A_0|$$

在集合A_0中,对于每一个$y\in B$,相应的x均可从0取到$s-y$这$s-y+1$个数(因为$x+y\leqslant s$).

于是,当$s\geqslant a-2$时

$$|A_0|=\sum_{y=0}^{a-1}(s-y+1)=\frac{1}{2}a(2s-a+3)$$

当$s<a-2$时

$$|A_0| = \sum_{y=0}^{s}(s-y+1) = \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$$

从而,得

定理 1 当 $a,b \in \mathbf{N}^*,(a,b)=1$ 时:

(1) 若 $a \geqslant b$,则

$$G_2(a,b;s) = \begin{cases} \frac{1}{2}a(2s-a+3) & (\text{当 } s \geqslant a-2 \text{ 时}) \\ \frac{1}{2}(s+1)(s+2) & (\text{当 } s < a-2 \text{ 时}) \end{cases}$$

(此时 $G_2(a,b;s)$ 的大小与 b 的取值无关)

(2) 若 $a < b$,则 $G_2(a,b;s) = G_2(b,a;s)$.

1.2 当 $a \in \mathbf{N}^*, b \in \mathbf{Z}^-, (a,b)=1$ 时

在集合 M 中,因为 $x+y \leqslant s$,所以可设 $x+y+y'=s, y' \in \mathbf{N}$,得

$$M = \{ax + b(s-x-y') \mid (x,y') \in A\} = \{(a-b)x - by' + bs \mid (x,y') \in A\}$$

可得 $a-b, -b \in \mathbf{N}^*, (a-b,-b)=1$,由定理 1(1) 可得

定理 2 当 $a \in \mathbf{N}^*, b \in \mathbf{Z}^-, (a,b)=1$ 时, $G_2(a,b;s) = G_2(a-b,-b;s)$(其值可由定理 1(1) 求出).

1.3 当 a,b 是非零复数,$\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ 时

定理 3 当 a,b 是非零复数,$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}(a_1 \in \mathbf{N}^*, b_1 \in \mathbf{Z}^*, (a_1,b_1)=1)$ 时,$G_2(a,b;s) = G_2(a_1,b_1;s)$(其值可由定理 1,2 求出).

2 当 a,b 是非零复数,$\frac{a}{b} \notin \mathbf{Q}$ 时

定理 4 当 a,b 是非零复数,$\frac{a}{b} \notin \mathbf{Q}$ 时

$$G_2(a,b;s) = |A| = \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$$

证明 设 $(x_i,y_i) \in A(i=1,2)$, $ax_1+by_1 = ax_2+by_2$.若 $x_1 \neq x_2$,得 $\frac{a}{b} = \frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}$,这不可能(左边为无理数,右边为有理数)!所以 $x_1 = x_2$, $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

这就说明 $G_2(a,b;s) = |A|$.

在集合 A 中,$0 \leqslant y \leqslant s$,对于每个 y,相应的 x 均可从 0 取到 $s-y$ 这 $s-y+1$ 个数(因为 $x+y \leqslant s$),所以

$$G_2(a,b;s) = |A| = \sum_{y=0}^{s}(s-y+1) = \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$$

至此,求 $G_2(a,b;s)$ 的问题已全部解决.

由本文的定理 1 极易解决文献[1]末提出的问题:

设答对 x 题,不答 y 题,可得所求答案为 $G_2(m+n,n+l;s)$.

(文献[1]的定理 2 中 $F_0(m,n,s)$ 的第二个表达式有误,应改为$\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$.)

3　一般问题

定义 2　变 $A_{n,s} = \{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_n,\cdots,x_n \in \mathbf{N}, \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant s\}(s \in \mathbf{N})$, $M_n = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid (x_1,\cdots,x_n) \in A_{n,s}\}(a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{C}^*)$.

问题　怎样求 $|M_n| = G_n(a_1,\cdots,a_n;s) = ?$

当 $n=1$ 时,$G_1(a_1;s) = s+1$;

本文已解决了 $n=2$ 的情形;

请有志之士先解决 $n=3$ 的情形.

显然 $G_n(a_1,\cdots,a_n;s) \leqslant |A_{n,s}|$,还可对 n 用数学归纳法证明

$$|A_{n,s}| = \frac{1}{n!}(s+1)(s+2)\cdots(s+n) \qquad ①$$

证明时需用到恒等式[2]:

$$\sum_{i=1}^{s+1} i(i+1)\cdots(i+n-1) = \frac{1}{n+1}(s+1)(s+2)\cdots(s+n+1) \qquad ②$$

① 的证明　因为 $|A_{1,s}| = |\{0,1,\cdots,s\}| = s+1$,所以 $n=1$ 时 ① 成立.

假设 n 时 ① 成立,下证 $n+1$ 时 ① 成立.

在集合 $A_{n+1,s}$ 中,$0 \leqslant x_{n+1} \leqslant s$,有 $x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant s-x_{n+1}$,

$$|A_{n+1,s}| = \sum_{x_{n+1}=0}^{s} |A_{n,s-x_{n+1}}| = \sum_{x_{n+1}=0}^{s} \frac{1}{n!}(s-x_{n+1}+1)(s-x_{n+1}+2)\cdots (s-x_{n+1}+n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{s+1} i(i+1)\cdots(i+n-1) = \frac{1}{(n+1)!}(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)(\text{用 ②})$$

即 $n+1$ 时 ① 成立,所以 ① 成立.

参考文献

[1] 方廷刚.一道竞赛题的推广与一般解法[J].中学数学月刊,2000(7):21-22.
[2] 言川.中学数学手册[M].太原:山西人民出版社,1983.

集合 R_n^2 与完全平方数

本文记 $R_n^2=\{$全体整数的平方关于模 n 的最小非负剩余$\}$.对于已知的正整数 n,求出 R_n^2 的元素及其个数是应当解决的问题,$|R_n^2|$ 表示集合 R_n^2 的元素的个数.

例如,可求得 $R_2^2=\{0,1\}$,$|R_2^2|=2$.

定理 1　设 $n\in\mathbf{N}^*$,$R_n^2=\{i^2$ 关于模 n 的最小非负剩余 $|\ i=0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]\}$,则 $|R_n^2|\leqslant[\frac{n}{2}]+1$.

证明　用 a 表示任意的整数,可设 $a=nk\pm i$,$i=0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]$.$k$ 是一整数.

所以 $R_n^2=\{$全体整数的平方关于模 n 的最小非负剩余$\}=\{i^2$ 关于模 n 的最小非负剩余 $|\ i=0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]\}$,从而有 $|R_n^2|\leqslant[\frac{n}{2}]+1$(因为集合的元素有互异性).

定理 2　整数 $k\geqslant4$ 时,$R_{2^k}^2=\{i^2$ 关于模 2^k 的最小非负剩余 $|\ i=0,1,\cdots,2^{k-2}-1\}$,$|R_{2^k}^2|\leqslant2^{k-2}$.

证明　由定理 1,得 $R_{2^k}^2=\{i^2$ 关于模 2^k 的最小非负剩余 $|\ i=0,1,\cdots,2^{k-1}\}$.

当 $k\geqslant4$,$t=0,1,\cdots,2^{k-2}-1$ 时

$$(2^{k-2}+t)^2\equiv(2^{k-2}-t)^2\pmod{2^k}$$
$$(2^{k-2})^2\equiv(2^{k-1})^2\equiv0\pmod{2^k}$$

所以由集合元素的互异性,得

$R_{2^k}^2=\{i^2$ 关于模 2^k 的最小非负剩余 $|\ i=0,1,\cdots,2^{k-2}-1\}$,从而有 $|R_{2^k}^2|\leqslant2^{k-2}$.

定理 3　当 p 是奇质数时,$|R_p^2|=\frac{p+1}{2}$.

证明　设 $i=0,1,\cdots,\frac{p-1}{2}$;$j=0,1,\cdots,\frac{p-1}{2}$,且 $i\neq j$.

有 $0<i+j<p$,$-p<i-j<p$,且 $i-j\neq0$.

由 p 是质数,得$(p,i+j)=(p,i-j)=1$,所以 $p\nmid i^2-j^2$.

得 $i \neq j$ 时,i^2 与 j^2 关于模 p 的最小非负剩余不相等.

由定理 1,得 $|R_p^2| = |\{0,1,\cdots,\frac{p-1}{2}\}| = \frac{p+1}{2}$.

定理 4 设 $n \in \mathbf{N}^*$,$R_n^2 = \{r_i \mid i = 0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]\}$,则存在整数 k 使 $nk + r_i$ 为完全平方数;$j = 1,\cdots,[\frac{n-1}{2}]$ 时,对于全体整数 k,$pk - r_j$ 不为完全平方数.

证明 因为 $R_n^2 = \{i^2$ 关于模 n 的最小非负剩余 $\mid i = 0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]\} = \{r_i \mid i = 0,1,\cdots,[\frac{n}{2}]\}$.

所以可设 $i^2 = nk_i + r_i$,k_i 是一整数.

此即说明定理 4 的前一部分结论成立.

假设 $nk - r_j$ 为完全平方数,则可设 $nk - r_j = nk' + r_i$,所以 $n \mid r_i + r_j$,但 $0 < r_i + r_j < n$,所以 $n \nmid r_i + r_j$,前后矛盾!得 $nk - r_j$ 不为完全平方数.

文献[1]给出了定理 4 的一些具体情形.

参考文献

[1] 梅向明.中学数学奥林匹克丛书《初等数论》(初中册)[M].北京:北京师范学院出版社,1988.

函数与方程



多项式 $S_k(x)$ 的一条性质

有较多文献给出了正整数方幂和 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k=1^k+2^k+\cdots+n^k(k,n\in\mathbf{N}^*)$ 的求法及性质，比如文献[1]～[4]. 因为 $S_k(n)$ 是关于 n 的 $k+1$ 次缺常数项多项式，所以我们还可以给出多项式 $S_k(x)$ 的意义：设 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{k+1} a_i n^i$（$a_i$ 是仅与 k 有关的常数，$i=1,2,\cdots,k+1$；$a_{k+1}=\frac{1}{k+1}$），则 $S_k(x)=\sum_{i=1}^{k+1} a_i x^i$，多项式 $S_k(x)$ 中变量 x 的取值范围是复数集 $\mathbf{C}$，比如 $S_1(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，$S_1(2.3)=3.795$. 方幂和 $S_k(n)$ 只是 $S_k(x)$ 在 $x\in\mathbf{N}^*$ 的情形.

本文给出多项式 $S_k(x)$ 的一条性质.（约定：本文中未注明的小写字母除 $x,a\in\mathbf{C}$ 外均表示正整数，整除均指多项式的整除.）

引理 1　(1) $\sum_{i=1}^{k} C_{2k}^{2i-1} S_{2i-1}(n)=\frac{1}{2}[(n+1)^{2k}+n^{2k}-1]$；

(2) $\sum_{i=1}^{k} C_{2k+1}^{2i} S_{2i}(n)=\frac{1}{2}[(n+1)^{2k+1}+n^{2k+1}-2n-1]$.

证明　(1)，(2) 可分别参见文献[3]的第22页前两行，第20页右栏第2～4行.

引理 2　(1) $\sum_{i=1}^{k} j^{2i-1} C_{2k}^{2i-1}=\frac{1}{2}[(j+1)^{2k}-(j-1)^{2k}]$；

(2) $\sum_{i=0}^{k} j^{2i} C_{2k+1}^{2i}=\frac{1}{2}[(j+1)^{2k+1}-(j-1)^{2k+1}]$.

证明　用二项式定理可证.

引理 3　(1) $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} j^{2i-1} C_{2k}^{2i-1}=\frac{1}{2}[(p+1)^{2k}+p^{2k}-1]$；

(2) $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} j^{2i} C_{2k+1}^{2i}=\frac{1}{2}[(p+1)^{2k+1}+p^{2k+1}-2p-1]$.

证明　(1) 由引理 2(1)，得

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} j^{2i-1} C_{2k}^{2i-1}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{k} j^{2i-1} C_{2k}^{2i-1}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}[(j+1)^{2k}-(j-1)^{2k}]=$$

$$\frac{1}{2}[(p+1)^{2k}+p^{2k}-1]$$

(2) 由引理2(2),得

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{p}j^{2i}C_{2k+1}^{2i}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{k}j^{2i}C_{2k+1}^{2i}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}[(j+1)^{2k+1}-(j-1)^{2k+1}]=$$
$$\frac{1}{2}[(p+1)^{2k+1}+p^{2k+1}-1]$$

从而可得结论(2)成立.

引理4 (1)$n^2(n+1)^2\mid S_{2k-1}(n)(k\geqslant 2)$;

(2)$n(n+1)(2n+1)\mid S_{2k}(n)$.(参见文献[3]或文献[4])

引理5 $S_{2k-1}(x)=f(x(x+1))(k\geqslant 2)$,$S_{2k}(x)=(2x+1)g(x(x+1))(k\geqslant 1)$,其中$f(x)$,$g(x)$均表示$x$的$k$次缺常数项多项式.(由文献[4]中的定理可得)

定理 (1)$n+p\mid S_{2k-1}(n)-S_{2k-1}(p-1)(p\geqslant 2)$;

(2)$n+p\mid S_{2k}(n)+S_{2k}(p-1)(p\geqslant 2)$.

证明 均对k用数学归纳法来证.

(1) 容易验证$k=1$时成立.

假设小于k时均成立,下证k时成立.

由引理1(1)可得

$$n+p\mid C_{2k}^{2k-1}S_{2k-1}(n)+\sum_{i=1}^{k-1}C_{2k}^{2i-1}S_{2i-1}(p-1)-$$
$$\frac{1}{2}[(-p+1)^{2k}+(-p)^{2k}-1]$$

$$n+p\mid 2k[S_{2k-1}(n)-S_{2k-1}(p-1)]+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p-1}j^{2i-1}C_{2k}^{2i-1}-$$
$$\frac{1}{2}[p^{2k}+(p-1)^{2k}-1]$$

由引理3(1),得

$n+p\mid 2k[S_{2k-1}(n)-S_{2k-1}(p-1)]$,即$n+p\mid S_{2k-1}(n)-S_{2k-1}(p-1)$

得k时成立,所以结论(1)成立.

(2) 容易验证$k=1$时成立.

假设小于k时均成立,下证k时成立.

由引理1(2)可得

$$n+p\mid C_{2k+1}^{2k}S_{2k}(n)-\sum_{i=1}^{k-1}C_{2k+1}^{2i}S_{2i}(p-1)-\frac{1}{2}[(-p+1)^{2k+1}+$$
$$(-p)^{2k+1}+2p-1]$$

$$n+p \mid (2k+1)[S_{2k}(n)+S_{2k}(p-1)]-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p-1}j^{2i}C_{2k+1}^{2i}+\frac{1}{2}[p^{2k+1}+(p-1)^{2k+1}-2p+1]$$

由引理3(2),得 $n+p \mid S_{2k}(n)+S_{2k}(p-1)$.

得 k 时成立,所以结论(2)成立.

推论1 (1)$x+a \mid S_{2k-1}(x)-S_{2k-1}(a-1)$;

(2)$x+a \mid S_{2k}(x)+S_{2k}(a-1)$.

证明 (1)由定理(1)及因式定理,可得

当 $p\in \mathbf{N}^*, p\geqslant 2$ 时,均有 $S_{2k-1}(-p)-S_{2k-1}(p-1)=0$,

而 $S_{2k-1}(-p)-S_{2k-1}(p-1)$ 是关于 p 的多项式,有无限多个 p 的值,使 $S_{2k-1}(-p)-S_{2k-1}(p-1)=0$,所以 $a\in \mathbf{C}$ 时,均有 $S_{2k-1}(-a)-S_{2k-1}(a-1)=0$,又由因式定理,可得结论(1)成立.

(2)可用(1)证明.

由推论(1)的证明或因式定理,可得

$$S_{2k-1}(-a)=S_{2k-1}(a-1); S_{2k}(-a)=-S_{2k}(a-1)$$

从而,有

推论2 (1)$S_{2k-1}(a)=S_{2k-1}(-a-1)$;

(2)$S_{2k}(a)=-S_{2k}(-a-1)$.

推论2就是本文要给出的多项式 $S_k(x)$ 的一条性质(由推论2可得本文的定理及推论均成立).实际上,由引理5很容易验证推论2成立,也就是说,由文献[4]中的定理可得推论2,但笔者还是把自己的复杂证明发表出来,供读者参阅.

推论3 (1)$n+2 \mid S_{2k-1}(n)-1$;

(2)$n+2 \mid S_{2k}(n)+1$;

(3)$n+2 \mid S_k(n)+S_{k+1}(n)$.

最后,给出一处猜想的证明.

文献[5]的定理给出了正整数方幂的累进和 $SS_k(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j^k=1^k+(1^k+2^k)+\cdots+(1^k+2^k+\cdots+n^k)$ 的求法,文献[5]末还提出了关于 $SS_k(n)$ 的两条猜想:

1. $n(n+1)(n+2) \mid SS_{2k-1}(n)$;

2. $n(n+1)^2(n+2) \mid SS_{2k}(n)$.

这可由推论3(3)及引理4给出简洁的证明:

文献[5]已验证 $k=1$ 时成立,下证 $k\geqslant 2$ 时成立.

1.由定理[5]知,$SS_{2k-1}(n)=(n+1)S_{2k-1}(n)-S_{2k}(n)$.

由推论3(3),得 $n+2\mid S_{2k-1}(n)+S_{2k}(n)$,所以 $n+2\mid SS_{2k-1}(n)$.

又由引理4,易得 $n(n+1)\mid SS_{2k-1}(n)$,所以 $n(n+1)(n+2)\mid SS_{2k-1}(n)$.

2.由定理[5]知,$SS_{2k}(n)=(n+1)S_{2k}(n)-S_{2k+1}(n)$.

由推论3(3),得 $n+2\mid S_{2k}(n)+S_{2k+1}(n)$,所以 $n+2\mid SS_{2k}(n)$.

又由引理4,易得 $n(n+1)^2\mid SS_{2k}(n)$,所以 $n(n+1)^2(n+2)\mid SS_{2k}(n)$.

参考文献

[1] 褚学璞.一个幂和定理摘译[J].数学通讯,1997(1):33-34

[2] 汪军龙.求自然数方幂和的一个公式[J].湖南数学通讯,1994(6):46-封底.

[3] 刘会成.自然数的方幂和的一个性质的证明[J].数学通讯,1994(2):20-22.

[4] 陈永林,储慧,张文军.关于方幂和的一个性质及其初等证法[J].数学通讯,1996(3):32-33.

[5] 盛宏礼.自然数方幂的累进和[J].中学数学月刊,1997(1):23-24.

一元二次多项式连贯性的研究

首先约定,本文中的多项式均指关于 x 的多项式.

1 问题

连贯,$n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$ 连贯多项式的定义文献[1],[2],或文献[3].

一般在复数集 $\mathbf{C}$,实数集 $\mathbf{R}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,整数集 $\mathbf{Z}$ 上研究多项式的连贯性. $\mathbf{C}$,$\mathbf{R}$ 上的情形很简洁[2],又 $\mathbf{Q}$ 上不存在 $n(n\geqslant 4)$ 连贯的二次多项式[3],还有结论:$f(x)\,n$ 连贯 $\Leftrightarrow(-f(x)-n+1)\,n$ 连贯[2],所以研究二次多项式的连贯性,还需解决以下四个问题(下文中的 $f_1(x)$ 指 $ax^2+bx+c(a\in\mathbf{N}^*,b,c\in\mathbf{Z})$, $f_2(x)$ 指 $ax^2+bx+c(a\in\mathbf{Q}^+,b,c\in\mathbf{Q})$):

问题 1 求出所有的 $f_1(x)$,使其在 $\mathbf{Z}$ 上连贯.

问题 2 求出所有的 $f_1(x)$,使其在 $\mathbf{Z}$ 上三连贯.

问题 3 求出所有的 $f_2(x)$,使其在 $\mathbf{Q}$ 上连贯.

问题 4 求出所有的 $f_2(x)$,使其在 $\mathbf{Q}$ 上三连贯.

2 问题 1 的解决(a 已知时)

定理 1 若 $f_1(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯,则有序数组 (a,b,c) 的所有解是

$$\begin{cases} a=rs & ① \\ b\text{ 是满足 }4a\mid b^2-(r+s)^2\text{ 的一切整数 }b & ② \\ c=\dfrac{b^2-(r+s)^2}{4a} & ③ \end{cases}$$

证明 先证:若 $f_1(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯,则 (a,b,c) 满足 ①,②,③.

因为 $f_1(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯,所以 $\begin{cases} b^2-4ac=u^2 \\ 4a=u^2-v^2 \end{cases}(u\in\mathbf{N}^*,v\in\mathbf{Z},u>v\geqslant 0)$.

可设 $\begin{cases} u+v=2r \\ u-v=2s \end{cases}(r,s\in\mathbf{N}^*)$, $\begin{cases} u=r+s \\ v=r-s. \end{cases}$ 又由 $4a=u^2-v^2$ 得 $a=rs$.

因为 $b^2-4ac=u^2$,所以 $c=\dfrac{b^2-(r+s)^2}{4a}$. 因为 $c\in\mathbf{Z}$,所以 $4a\mid b^2-(r+s)^2$.

再证:若 (a,b,c) 满足 ①,②,③,则 $f_1(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯.

可得 $f_1(x)+i(i=0,1)$ 的判别式分别为 $(r+s)^2$, $(r-s)^2$,故云.

由定理1可求出 a 为已知正整数的所有连贯二次多项式 $f_1(x)$(在(2)中设 $b=2am\pm r_0(m\in\mathbf{Z},r_0=0,1,\cdots,a)$,代入②中可求出所有的 b.对于任意的 a,b 一定有无限个解).从而可得:对于任意的 $a\in\mathbf{N}^*$,均存在 $b,c\in\mathbf{Z}$,使 $f_1(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯.

推论1 (1) 多项式 $x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯 $\Leftrightarrow b=2k,c=k^2-1(k\in\mathbf{Z})$;

(2) 多项式 $2x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯 $\Leftrightarrow b=2k+1,c=\frac{1}{2}k(k+1)-1(k\in\mathbf{Z})$;

(3) 多项式 ax^2+bx+c(a 为奇素数 $b,c\in\mathbf{Z}$) 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯 $\Leftrightarrow b=(2k+1)a\pm1,c=k[(k+1)a\pm1](k\in\mathbf{Z}$,前后的正负号选取一致,下同).

证明 (1),(2) 虽然成立(3) 由定理1得 $r+s=a+1.4a\mid b^2-(r+s)^2\Leftrightarrow 2\mid b$ 且 $a\mid b^2-1$,故云.

推论2 文献[4]的定理1(1).

定理2 (1) 当 a 为任意非0整数时,存在 $b,c\in\mathbf{Z}$,使 ax^2+bx+c 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯;

(2) 当 b 为任意整数时,存在 $a,c\in\mathbf{Z},a\neq0$,使 ax^2+bx+c 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯;

(3) c 为任意整数时,存在 $a,b\in\mathbf{Z},a\neq0$,使 ax^2+bx+c 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯.

证明 (1) 因为 $ax^2+(5a+1)x+(6a+2)$ 连贯.

(2) 因为 $(b-1)x^2+bx(b\neq1),-2x^2+x$ 连贯.

(3) 因为 $c(c+1)(2c+1)(c^2-c-1)x^2-(3c^3+c^2-2c-1)x+c(c\neq0,-1),-2x^2+x,2x^2-x-1$ 连贯[4].

由定理2,还可进一步问:若整系数二次多项式 ax^2+bx+c 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯,则 a,b,c 中能有两个字母同时取任意整数吗(当然 $a\neq0$)?

回答是否定的.因为 $ax^2+0x+1,x^2+bx+1,x^2+x+c(a,b,c\in\mathbf{Z},a\neq0)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上均不连贯.

3 问题2的解决(a 已知时)

引理1 方程 $l_0^2-k_0^2=8$ 的全部正有理数解是 $\begin{cases}l_0=\dfrac{2m^2+n^2}{mn}\\ k_0=\dfrac{2m^2-n^2}{mn}\end{cases}(m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1,n<\sqrt{2}m)$.

证明 可设 $\begin{cases}l_0-k_0=\dfrac{2n}{m}\\ l_0+k_0=\dfrac{4m}{n}\end{cases}(m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1)$,得 $l_0=\dfrac{2m^2+n^2}{mn}$,

$k_0=\dfrac{2m^2-n^2}{mn}$.因为 $k_0>0$,所以 $n<\sqrt{2}m$.

还可验证,得到的解是原方程的正有理数解.

推论 3 方程 $l^2-k^2=8r_1^2$ 的全部正整数解是

$$\begin{cases}l=t(2m^2+n^2)\\k=t\,|2m^2-n^2|\\r_1=tmn\end{cases}(t,m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1,2\nmid n)$$

证明 由引理1,得$\begin{cases}\dfrac{l}{r_1}=\dfrac{2m^2+n^2}{mn}\\\dfrac{k}{r_1}=\dfrac{2m^2-n^2}{mn}\end{cases}(m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1,n<\sqrt{2}m)$.

设 $d=(2m^2+n^2,mn)$,则 $d=(n,2)$.

当 $2\nmid n$ 时,$d=1$,此时原方程的全部正整数解是 $l=t(2m^2+n^2)$,$k=t(2m^2-n^2)$,$r_1=tmn(t,m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1,2\nmid n,n<\sqrt{2}m)$.

当 $2\mid n$ 时,$d=2$,设 $n=2n_1(n_1\in\mathbf{N}^*)$.因为 $(m,n)=1$,所以,$(m,n_1)=1,2\nmid m$.此时原方程的全部正整数数解是 $l=t(m^2+2n_1^2)$,$k=t(m^2-2n_1^2)$,$r_1=tmn_1(t,m,n_1\in\mathbf{N}^*,(m,n_1)=1,2\nmid m,m>\sqrt{2}n_1)$.

将第二组解中的 m 换为 n,n_1 换为 m,得 $l=t(2m^2+n^2)$,$k=-t(2m^2-n^2)$,$r_1=tmn(t,m,n\in\mathbf{N}^*,(m,n)=1,2\nmid n,n>\sqrt{2}m)$.

从而有推论 3 成立.

推论 4 方程组$\begin{cases}rs=r_1s_1\\r-s=r_1+s_1\end{cases}$的全部正整数解是

$$\begin{cases}r=\dfrac{1}{2}(k+l)-r_1\\s=\dfrac{1}{2}(k-l)+r_1\\s_1=l-3r_1\end{cases}$$

(其中 k,l,r_1 由推论 3 确定,且 m,n 还满足"$n<m$,或 $n>2m$").

证明 $\begin{cases}rs=r_1s_1\\r-s=r_1+s_1\end{cases}(r,s,r_1,s_1\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}r=r_1+s_1+s\\s^2+(r_1+s_1)s-r_1s_1=0\end{cases}(s,r_1,s_1\in\mathbf{N}^*)$$

又
$$s^2+(r_1+s_1)s-r_1s_1=0(s,r_1,s_1\in\mathbf{N}^*) \qquad ④$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r_1^2+6r_1s_1+s_1^2=k^2(\text{可证 }k\neq0,\text{所以可设 }k\in\mathbf{N}^*)\\s=\dfrac{1}{2}(k-r_1-s_1)(s\in\mathbf{N}^*)\end{cases}(r_1,s_1\in\mathbf{N}^*)$$

(下面证明$\frac{1}{2}(k-r_1-s_1)\in\mathbf{N}^*$:

④的两个有理解(一定是整数解)$s_1=\frac{1}{2}(-k-r_1-s_1)<0$,$s_2=\frac{1}{2}(k-r_1-s_1)$满足$s_1s_2=-r_1s_1<0$,所以$s_2>0$,即$s_2\in\mathbf{N}^*$.)

又$r_1^2+6r_1s_1+s_1^2=k^2(r_1,s_1,k\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\begin{cases}l^2-k^2=8r_1^2\\ s_1=l-3r_1(s_1\in\mathbf{N}^*)\end{cases}(k,l,r_1\in\mathbf{N}^*)$,再由推论3,可证推论4成立.

定理3 若$f_1(x)$在$\mathbf{Z}$上三连贯,则有序数组(a,b,c)的所有解是:

$$\begin{cases}a=t^2mn(m-n)(2m-n)\\ b\text{ 是满足 }4a\mid b^2-t^2(2m^2-n^2)^2\text{ 的一切整数 }b\\ c=\dfrac{b^2-t^2(2m^2-n^2)^2}{4a}\end{cases}$$

(其中$t,m,n\in\mathbf{N}^*$,$(m,n)=1$,$2\nmid n$,$n<m$或$n>2m$).

证明 $f_1(x)$在$\mathbf{Z}$上三连贯$\Leftrightarrow f_1(x)$在$\mathbf{Z}$上连贯且$f_1(x)+2$在$\mathbf{Z}$上可约

$$\Leftrightarrow\begin{cases}①,②,③\text{ 在这里成立}\\ 4a=(r-s)^2-w^2(r-s\in\mathbf{N}^*,w\in\mathbf{N},r-s>w).\end{cases}$$

又在$4a=4rs=(r-s)^2-w^2$中,可设$\begin{cases}r-s+w=2r_1\\ r-s-w=2s_1\end{cases}(r_1,s_1\in\mathbf{N}^*)$,

所以$\begin{cases}r-s=r_1+s_1\\ w=r_1-s_1\end{cases}$,得$\begin{cases}rs=r_1s_1\\ r-s=r_1+s_1\end{cases}\quad(r,s,r_1,s_1\in\mathbf{N}^*)$,

又由推论4可得定理3成立.

推论5 文献[4]的定理2(1).

在推论5中令$m=l+1$,$n=l-1$,得

推论6 文献[4]的定理2(2).

推论7 若$f_1(x)$在$\mathbf{Z}$上三连贯,则

(1)$2\mid a$,且a是合数;

(2)若$a=p_1p_2$(p_1,p_2,p_3是素数,下同),则$a=6$;

(3)若$a=p_1p_2p_3$,则$a=30$;

(4)若$a\neq6$,则a至少含有三个不同的素因数.

证明 由定理3得,a可表示为$t^2mn(m-n)(2m-n)(t,m,n\in\mathbf{N}^*$,$(m,n)=1$,$2\nmid n$,$n<m$或$n>2m)$.

(1)显然成立.

(2)当$n<m$时,$\begin{cases}2m-n>m>m-n>0 & ⑤\\ m>n>0 & ⑥\end{cases}$

因为 $a = p_1p_2$,所以 $t = n = m - n = 1$,得 $t = n = 1, m = 2, a = 6$.

当 $n > 2m$ 时,$\begin{cases} n > n - m > n - 2m > 0 & ⑦ \\ n - m > m > 0 & ⑧ \end{cases}$

因为 $a = p_1p_2$,所以 $t = n - 2m = m = 1$,得 $t = m = 1, n = 3, a = 6$.

(3) 当 $n < m$ 时,⑤,⑥ 成立.由 $a = p_1p_2p_3$,得

$t = m - n = 1$,且 $2m - n, m, n$ 均为素数,即 $n, n + 1, n + 2$ 均为素数,这不可能!

或 $t = n = 1$,且 $2m - n, m, m - n$ 均为素数,即 $m - 1, m, 2m - 1$ 均为素数,所以 $m = 3$,得 $a = 30$.

当 $n > 2m$ 时,⑦,⑧ 成立.由 $a = p_1p_2p_3$,得

$t = n - 2m = 1$,且 $n, n - m, m$ 均为素数,即 $m, m + 1, 2m + 1$ 均为素数,所以 $m = 2, a = 30$.

或 $t = m = 1$,且 $n, n - m, n - 2m$ 均为素数,即 $n, n - 1, n - 2$ 均为素数,这不可能!

(4) 可证四个整数 $m, n, m - n, 2m - n$ 两两互素.

假设 a 只含有两个不同的素因数(因为 a 是合数),则 $t = m - n = n = 1$(由 ⑤,⑥ 得),所以 $a = 6$;或 $t = n - 2m = m = 1$(由 ⑦,⑧ 得),所以 $a = 6$. 故云.

推论 8 (1)$6x^2 + bx + c(b, c \in \mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上三连贯 $\Leftrightarrow b = 6k \pm 1, c = \frac{1}{2}k(3k \pm 1) - 2(k \in \mathbf{Z})$;

(2)$30x^2 + bx + c(b, c \in \mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上三连贯 $\Leftrightarrow (b = 30k \pm 7, c = \frac{1}{2}k(15k \pm 7) - 2)$ 或 $(b = 30k \pm 13, c = \frac{1}{2}k(15k \pm 13) - 1)(k \in \mathbf{Z})$.

证明 (1) 由推论 7(2) 的证明及定理 3,可得

$6x^2 + bx + c(b, c \in \mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上三连贯 $\Leftrightarrow \begin{cases} 24 \mid b^2 - 7^2 \\ c = \frac{1}{24}(b^2 - 7^2) \end{cases}$,又 $24 \mid b^2 - 7^2 \Leftrightarrow 2 \nmid b$ 且 $3 \mid b^2 - 1$,故云.

(2) 由推论 7(3) 的证明及定理 3,可得

$30x^2 + bx + c(b, c \in \mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上三连贯 $\Leftrightarrow \begin{cases} 120 \mid b^2 - 17^2 \\ c = \frac{1}{120}(b^2 - 17^2) \end{cases}$,又 $120 \mid b^2 - 17^2 \Leftrightarrow 2 \nmid b$ 且 $b = 15l \pm 2$ 或 $b = 15l \pm 7(l \in \mathbf{Z})$,故云.

推论 9 $f_1(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不能三连贯的充要条件是 $a \neq t^2mn(m - n)(2m - n)(t, m, n \in \mathbf{N}^*, (m, n) = 1, 2 \nmid n, n < m$,或 $n > 2m)$.特别的:

(1)$a=1$,或素数;

或(2)a 只含一个或两个不同的素因数;

或(3)a 是三个素数之积时,$ax^2+bx+c(a\neq 30,b,c\in \mathbf{Z})$ 均不能在 Z 上三连贯.

可在定理 3 中,令 $t=1,m=c+1,n=c-1$,得

推论 10 文献[4]的定理 2(5).

推论 11 文献[4]的定理 3.

由推论 9,11,笔者再提出

问题 5 b 为哪些整数时,二次多项式 $ax^2+x+c(a,c$ 为任意整数,$a\neq 0)$ 均不能在 $\mathbf{Z}$ 上三连贯.

4 问题 3 的解决(c 已知时)

定理 4 $f_2(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上连贯的充要条件是:存在 $u,v\in \mathbf{Q}$, $|u|>|v|$,使 $b^2+cv^2=(c+1)u^2, a=\frac{1}{4}(u^2-v^2)$.

证明 **必要性**.由"连贯"可得 $\begin{cases}b^2-4ac=u^2\\ b^2-4ac-4a=v^2\end{cases}(u,v\in \mathbf{Q})$,所以 $b^2+cv^2=(c+1)u^2, a=\frac{1}{4}(u^2-v^2)$.因为 $a>0$,所以 $|u|>|v|$.

充分性.由 $\begin{cases}b^2+cv^2=(c+1)u^2\\ a=\frac{1}{4}(u^2-v^2)\end{cases}$,可得 $\begin{cases}b^2-4ac=u^2\\ b^2-4ac-4a=v^2\end{cases}(u,v\in \mathbf{Q})$,故云.

由定理 4 知,要解决问题 3,就是要求出方程

$$b^2+cv^2=(c+1)u^2(c\text{ 是已知的任意有理数}, |u|>|v|) \qquad ⑨$$

的所有有理解(u,v,b).

引理 2 方程 $b_1^2+cv_1^2=c+1(c\in \mathbf{Q},c$ 已知,$c\neq 0,-1)$ 的全部有理解(b_1,v_1)为:

$$b_1=v_1=1,\text{或}\begin{cases}b_1=\dfrac{m^2-2cm-c}{m^2+c}\\ v_1=\dfrac{m^2+2m-c}{m^2+c}\end{cases}(m\in \mathbf{Q},\text{且 } m^2+c\neq 0)$$

证明 先求方程 $b_1^2+cv_1^2=c+1(v_1^2\neq 1,c\neq 0,-1)$ 的全部有理解(b_1,v_1).

因为 $v_1^2\neq 1$,所以 $b_1^2\neq 1$.

有
$$\frac{b_1+1}{v_1-1}\cdot\frac{b_1-1}{v_1+1}=-c$$

可设$\frac{b_1+1}{v_1-1}=m$,则 $m\in\mathbf{Q},m\neq 0,\frac{b_1-1}{v_1+1}=-\frac{c}{m}$.

可得
$$\begin{cases}b_1=\dfrac{m^2-2cm-c}{m^2+c}\\ v_1=\dfrac{m^2+2m-c}{m^2+c}\end{cases}\quad(m\in\mathbf{Q}^*,m^2+c\neq 0).$$

当 $m=0,-1,c$ 时,由上述解的公式可得解$(b_1,v_1)=(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$,解$(1,1)$不能由上述公式得到.故云.

推论 12 当 $c\neq 0,-1$ 时,方程 ⑨ 的全部有理解(u,v,b)为:

(1) 又 $c\neq -c_1^2(c_1\in\mathbf{Q})$ 时,$\begin{cases}u=t(m^2+c)\\ v=t(m^2+2m-c)\\ b=t(m^2-2cm-c)\end{cases}$

(其中 $t,m\in\mathbf{Q},t\neq 0$,且 $m(m+1)(m-c)<0$);

(2) 又 $c=-c_1^2(c_1\in\mathbf{Q})$ 时,所求的解为上述解(但要添上条件 $m\neq\pm c_1$).

证明 因为 $|u|>|v|$,所以 $u\neq 0$,得 ⑧ 的有理解由$\left(\frac{b}{a}\right)^2+c\left(\frac{v}{u}\right)^2=c+1$确定.由引理 2 可知推论 12 成立.

定理 5 若 $f_2(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上连贯,则有序数组(a,b,c)的所有解是:

(1) 当 $c=0$ 时,$a=\frac{1}{4}(b^2-v^2),b,v\in\mathbf{Q},|b|>|v|$;

(2) 当 $c=-1$ 时,$a=\frac{1}{4}(u^2-b^2),b,u\in\mathbf{Q},|b|<|u|$;

(3) 当 $c\neq -c_1^2(c_1\in\mathbf{Q})$ 时,$a=t^2m(m+1)(c-m),b=t(m^2-2cm-c),t,m\in\mathbf{Q},t\neq 0,m(m+1)(m-c)<0$.

(4) 当 $c=-c_1^2(c_1\in\mathbf{Q},c_1\neq 0,1)$ 时,所求的解为 ③ 中的解(但要添上条件 $m\neq\pm c_1$).

5 问题 1 的另一解决(c 已知时)

定理 6 $f_1(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯的充要条件是:存在 $u,v\in\mathbf{Z},|u|>|v|,2\mid u+v$,使 $b^2+cv^2=(c+1)u^2,a=\frac{1}{4}(u^2-v^2)$.

由定理 6 知,要解决问题 1 就是要求出方程

$$b^2+cv^2=(c+1)u^2(c\in\mathbf{Z},c\text{ 已知},|u|>|v|,2\mid u+v)\qquad ⑩$$

的全部整数解(u,v,b).

推论 13 当 $c\neq 0,-1$ 时,方程 ⑩ 的全部整数解(u,v,b)为:

(1) 又 $c\neq -c_1^2(c_1\in\mathbf{Z})$ 时,

$$\begin{cases} u = \frac{t}{d}(q^2 + cp^2) \\ v = \frac{t}{d}(q^2 + 2pq - cp^2) \\ b = \frac{t}{d}(q^2 - 2cpq - cp^2) \end{cases}$$

(其中 $p \in \mathbf{N}^*, q \in \mathbf{Z}, (p,q) = 1, (q^2 + cp^2, q^2 + 2pq - cp^2) = d, d \mid tq(p + q), \frac{q}{p}(\frac{q}{p} + 1)(\frac{q}{p} - c) < 0, \mid t \mid \in \mathbf{N}^*$).

(2) 又 $c = -c_1^2(c_1 \in \mathbf{Z})$ 时,所求的解为上述解(但要添上条件 $\frac{q}{p} \neq \pm c_1$).

证明 由引理2(令 $m = \frac{q}{p}, p \in \mathbf{N}^*, q \in \mathbf{Z}, (p,q) = 1$)知,当 $c \neq 0, -1$ 时,方程 ⑩ 的全部整数解 (u,v,b) 可由下式决定:

$$\begin{cases} \frac{b}{u} = \frac{q^2 - 2cpq - cp^2}{q^2 + cp^2} & ⑪ \\ \frac{v}{u} = \frac{q^2 + 2pq - cp^2}{q^2 + cp^2} & ⑫ \end{cases} \quad (\mid u \mid > \mid v \mid, 2 \mid u + v)$$

我们先求 ⑩ 中,$c \neq -c_1^2(c_1 \in \mathbf{Z}), (u,v,b) = 1$ 的解(用 ⑪,⑫). 由 $(u,v,b) = 1$ 及 ⑩ 可得 $(u,v) = 1$.

设 $(q^2 + cp^2, q^2 + 2pq - cp^2) = d$, 又由 $(u,v) = 1$ 及 ⑫, 得 $u = \pm \frac{1}{d}(q^2 + cp^2), v = \pm \frac{1}{d}(q^2 + 2pq - cp^2)$, 又由 ⑪ 得 $b = \pm \frac{1}{d}(q^2 - 2cpq - cp^2)$.

再求 $c \neq -c_1^2(c_1 \in \mathbf{Z}), (u,v,b) = t(t \in \mathbf{N}^*)$ 的解(因为 $u \neq v$ 所以不会出现 $u = v = b = 0$ 的情形)……

并注意推论 13 的结论(1) 中:$2 \mid u + v \Leftrightarrow 2 \left| \frac{2t}{d}q(p + q) \right. \Leftrightarrow d \mid tq(p + q)$.

最终可得推论 13 成立.

由定理 6 及推论 13,可得

定理 7 若 $f_1(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯,则有序数组 (a,b,c) 的所有解是:

(1) 当 $c = 0$ 时, $a = \frac{1}{4}(b^2 - v^2), b, v \in \mathbf{Z}, \mid b \mid > \mid v \mid, 2 \mid b + v$;

(2) 当 $c = -1$ 时, $a = \frac{1}{4}(u^2 - b^2), b, u \in \mathbf{Z}, \mid b \mid < \mid u \mid, 2 \mid b + u$;

(3) 当 $c \neq -c_1^2(c_1 \in \mathbf{Z})$ 时, $a = \frac{t^2}{d^2}pq(p + q)(cp - q), b = \frac{t}{d}(q^2 - 2cpq - cp^2)$(诸字母的限制条件见推论 13(1));

(4) 当 $c = -c_1^2(c_1 \in \mathbf{Z}, c_1 \neq 0, 1)$ 时,所求的解为 ③ 中的解(但要添上条

件$\frac{q}{p} \neq \pm c_1$).

推论 14 若二次多项式 $ax^2+bx+1(a\in \mathbf{N}^*, b\in \mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯,则有序数组(a,b)的所有解是(以下 $p\in \mathbf{N}^*, q\in \mathbf{Z}, (p,q)=1, \frac{q}{p}(\frac{q}{p}+1)(\frac{q}{p}-1)<0, |t|\in \mathbf{N}^*$):

$$\begin{cases} a = t^2pq(p^2-q^2) \\ b = t(q^2-2pq-p^2) \end{cases} \quad (2\nmid p+q)$$

或

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4}t^2pq(p^2-q^2) \\ b = \frac{1}{2}t(q^2-2pq-p^2) \end{cases} \quad (2\nmid p, 2\nmid q)$$

推论 15 若二次多项式 $ax^2+bx+2(a\in \mathbf{N}^*, b\in \mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯,则有序数组(a,b)的所有解是(以下 $p\in \mathbf{N}^*, q\in \mathbf{Z}, (p,q)=1, \frac{q}{p}(\frac{q}{p}+1)(\frac{q}{p}-2)<0, |t|\in \mathbf{N}^*$):

$$\begin{cases} a = t^2pq(p+q)(2p-q) \\ b = t(q^2-4pq-2p^2) \end{cases} (2\nmid q, 3\nmid p+q)$$

或

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4}t^2pq(p+q)(2p-q) \\ b = \frac{1}{2}t(q^2-4pq-2p^2) \end{cases} \quad (2\mid q, 3\nmid p+q)$$

或

$$\begin{cases} a = \frac{1}{9}t^2pq(p+q)(2p-q) \\ b = \frac{1}{3}t(q^2-4pq-2p^2) \end{cases} \quad (2\nmid q, 3\mid p+q)$$

或

$$\begin{cases} a = \frac{1}{36}t^2pq(p+q)(2p-q) \\ b = \frac{1}{6}t(q^2-4pq-2p^2) \end{cases} \quad (2\mid q, 3\mid p+q)$$

定理 1,2(1),7 以较好地解决了

whc78[1] 对哪些 a,二次三项式 $ax^2+bx+c(a,b,c\in \mathbf{Z}, a\neq 0)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上连贯,能否找出 $\mathbf{Z}$ 上的一切连贯二次三项式?

推论 16 文献[4]的定理 1(5)(但文献[4]有印刷错误,应将定理 1(5)中的"$b=q^2-2cpp-cp^2$"改为"$b=q^2-2cpq-cp^2$").

在推论 16 中选 $p=c+1, q=-2c$,并把所得结论化简,也可得到推论 10.

6 问题 3 的又一解决(a,b 已知时)

定理 8 $f_2(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上连贯 $\Leftrightarrow c=\frac{1}{4a}[b^2-(r+\frac{a}{r})^2](r\in \mathbf{Q}^*)$.

证明 $\Rightarrow$ 由连贯可得$\begin{cases}b^2-4ac=u^2\\4a=u^2-v^2\end{cases}(u,v\in\mathbf{Q},|u|>|v|)$,可设$u+v=2r(r\in\mathbf{Q}^*)$,得$u-v=\frac{2a}{r}$,所以$u=r+\frac{a}{r},v=r-\frac{a}{r}$.

由$b^2-4ac=u^2$,得$c=\frac{1}{4a}[b^2-(r+\frac{a}{r})^2]$.

$\Leftarrow$ 可以验证$f_2(x)+i(i=0,1)$的判别式分别为$(r+\frac{a}{r})^2,(r-\frac{a}{r})^2$,故云.

7 关于问题4的一个结论

定理9 $f_2(x)$在$\mathbf{Q}$上三连贯$\Leftrightarrow a=\frac{rs(r-s)}{r+s}(r,s,r\pm s\in\mathbf{Q}^*,a>0)$,$c=\frac{1}{4a}[b^2-(r+\frac{a}{r})]^2$.

证明 $\Rightarrow$ 因为$f_2(x)$在$\mathbf{Q}$上三连贯,所以

$$\begin{cases}b^2-4ac=u^2\\4a=u^2-v^2=v^2-w^2\end{cases}(u,v,w\in\mathbf{Q},|u|>|v|>|w|)$$

由定理8的证明,可设$u=r+\frac{a}{r},v=r-\frac{a}{r}(r\in\mathbf{Q}^*),c=\frac{1}{4a}[b^2-(r+\frac{a}{r})^2]$.

由$4a=v^2-w^2=(r-\frac{a}{r})^2-w^2$,可设$r-\frac{a}{r}+w=2s(s\in\mathbf{Q}^*),r-\frac{a}{r}-w=\frac{2a}{s}$,得

$$r-\frac{a}{r}=s+\frac{a}{s},w=s-\frac{a}{s}$$

由$r-\frac{a}{r}=s+\frac{a}{s},rs\neq0$,得$(r+s)a=rs(r-s)$.假设$r+s=0$,得$r-s=0$,所以$r=s=0$,这不可能!所以$r+s\neq0,a=\frac{rs(r-s)}{r+s}$.因为$a\neq0$,所以$r-s\neq0$.

$\Leftarrow$ 可以验证$f_2(x)+i(i=0,1,2)$的判别式分别为$(r+\frac{a}{r})^2,(r-\frac{a}{r})^2,(s-\frac{a}{s})^2$,故云.

定理9并未完全解决问题4(即使a已知时),恳请广大读者早日研究它.

8 证明一类不定方程无有理解

由定理8,9的证明,还可得

$f_2(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上四连贯 $\Leftrightarrow a = \dfrac{rs(r-s)}{r+s} = \dfrac{st(s-t)}{s+t}(r,s,t,r \pm s,s \pm t \in \mathbf{Q}^*, a > 0), c = \dfrac{1}{4a}[b^2 - (r + \dfrac{a}{r})^2]$.

证明 $\Rightarrow$ 因为 $f_2(x)$ 在 Q 上四连贯,所以

$$\begin{cases} b^2 - 4ac = u^2 \\ 4a = u^2 - v^2 = v^2 - w^2 = w^2 - z^2 \end{cases}$$

(其中 $u,v,w,z \in \mathbf{Q}$, $|u|>|v|>|w|>|z|$).

由定理 9 的证明,可设

$$u = r + \frac{a}{r}, v = r - \frac{a}{r}, w = s - \frac{a}{s}(r,s,r \pm s \in \mathbf{Q}^*),$$

$$c = \frac{1}{4a}[b^2 - (r + \frac{a}{r})^2].$$

由 $4a = w^2 - z^2 = (s - \frac{a}{s})^2 - z^2$,可设 $s - \frac{a}{s} + z = 2t(t \in \mathbf{Q}^*)$, $s - \frac{a}{s} - z = \frac{2a}{t}$,得

$$s - \frac{a}{s} = t + \frac{a}{t}, z = t - \frac{a}{t}$$

易得
$$a = \frac{st(s-t)}{s+t}(s,t,s \pm t \in \mathbf{Q}^*)$$

$\Leftarrow$ 可以验证 $f_2(x) + i(i = 0,1,2,3)$ 的判别式分别为 $(r + \frac{a}{r})^2, (r - \frac{a}{r})^2, (s - \frac{a}{s})^2, (t - \frac{a}{t})^2$,故云.

但文献[3]已证:Q 上不存在四连贯的二次多项式,故有

定理 10 不定方程 $\dfrac{r(r-s)}{r+s} = \dfrac{t(s-t)}{s+t}(r,s,t,r \pm s,s \pm t \in \mathbf{Q}^*)$ 没有有理解 (r,s,t).

在定理 10 中,令 $r - s = a, s - t = b$,可得

不定方程 $2(a-b)t^2 + 2(a^2 + ab - b^2)t + ab(a+b)(ab \neq 0, t \neq 0, -b, -\frac{1}{2}b, -a-b, -\frac{1}{2}a - b)$ 没有有理解 (a,b,t).

由此,可证得.

推论 17 不定方程 $2(a-b)t^2 + 2(a^2 + ab - b^2)t + ab(a+b) = 0(ab \neq 0, a \neq \pm b)$ 没有有理解 (a,b,t).

可得推论 17 的方程中 $t = \dfrac{1}{b-a}(a^2 + ab - b^2 \pm \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})$,故又有

推论 18 不定方程 $a^4-a^2b^2+b^4=c^2(ab\neq 0,a^2\neq b^2)$ 没有有理解 (a,b,c).

在推论 18 中令 $k=\frac{a}{b}$,并注意 $-\frac{c}{b^2}(b\neq 0,b,c\in\mathbf{Q})$ 可表示任意有理数,从而可得

推论 19 不定方程 $k^4-k^2+1=l^2(k\neq 0,\pm 1)$ 没有有理解 (k,l).

若能用其他方法(不用文献[3]的定理4)证得推论 19,就可给出文献[3]的定理 4 的另外证明(文献[3]的证明初等但冗长,值得简化),笔者作过尝试,没有成功.

参考文献

[1] 杨之.初等数学研究问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993:192.
[2] 甘志国.关于 n 连贯多项式的几个结论[J].中学数学,1998(11):35-37.
[3] 甘志国.有理数集上不存在四连贯的二次多项式[J].数学通讯,1995(12):23-26.
[4] 甘志国.一些连贯、三连贯的二次多项式[J].中学数学教学参考,2000(4):56.

求一元丢番图方程有理根的又一种方法

求一元丢番图方程

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

(其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是已知的整数, $a_0 \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$) ①

的有理根,通常用下面的定理 1 试验求得.

定理 1 若即约分数 $\frac{q}{p}(p \in \mathbf{N}^*, q \in \mathbf{Z}, (p, q) = 1)$ 是 ① 的根,则 $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.

用下面的定理 2 及其推论求 ① 的有理根将更容易.

定理 2 若即约分数 $\frac{q}{p}(p \in \mathbf{N}^*, q \in \mathbf{Z}, (p, q) = 1)$ 是 ① 的根,则对于任意的整数 u,有 $pu - q \mid f(u)$.

(因为 $0 = 0 \times 1$,所以可记 $0 \mid 0$.本文中的整除均指数的整除.)

证明 有 $f(\frac{q}{p}) = 0$,所以

$$p^n f(\frac{q}{p}) = a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0$$

由此可得,对于任意的整数 b,有 $b - q \mid a_0b^n + a_1pb^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}b + a_np^n$,再令 $b = pu$,即得 $pu - q \mid p^n f(u)$.

又由 $(p, q) = 1$,得 $(pu - q, p^n) = 1$,所以 $pu - q \mid f(u)$.

推论 若 q 是 ① 的整数根,则

(1) 对于任意的整数 u,有 $u - q \mid f(u)$;

(2) 对于任意的整数 v,有 $v \mid f(v + q)$.

例 1 求方程 $f(x) = x^4 - 29x^3 + 243x^2 - 171x - 3\,564 = 0$ 的整数根.

解 $3\,564 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11$,它有 60 个约数(包括正约数和负约数),用定理 1 难以求出它的整数根.

由推论(1) 可得,整数根 x 满足:$x - u \mid f(u)$(u 是任意整数),所以只要选取整数 u,使(u) 的约数较少即可.

因为 $f(10) = 26$,所以 $x - 10 \mid 26$,得 $x - 10 = \pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$,可进一步得到原方程的全部整数根为 $-3, 9, 11, 12$.

例 2 求证方程 $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 16 = 0$ 没有有理根.

证明 假设 x 是原方程的一个有理根,得 $x-3 \mid f(3)$.

因为 $f(3)=-2$,所以 $x-3=\pm 1, \pm 2, x=1,2,4,5$.

由定理1知,$x \neq 1,5$,又可验证2,4不是原方程的根,所以原方程没有有理根.

例3 解方程 $f(x)=15x^3-89x^2+164x-96=0$.

解 因为 $f(2)=-4$,所以由定理2,得

设 $\frac{q}{p}(p \in \mathbf{N}^*, q \in \mathbf{Z},(p,q)=1)$ 是原方程的有理根,则 $2p-q \mid 4$.

又由定理1,得 $p \mid 15$.

所以
$$\begin{cases} p = 1,\ 3,\ 5,15; \\ 2p-q=\pm 1, \pm 2, \pm 4 \end{cases}$$

进而可验证出原方程的所有解是三个有理解:$3, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}$.

应区别函数图象的两种轴对称

定理 1 若函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点 $(a+b,0)$ 对称，且 $f(2a-x) = f(2b+x)$ 在 $2a-x, 2b+x \in D$ 时恒成立，则 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a+b$ 对称.

证明 可设点 $A(2a-x_0, f(2a-x_0))$ 是函数 $y = f(x)$ 图象上的任一点，又点 A 关于直线 $x = a+b$ 对称的点是 $A'(2b+x_0, f(2a-x_0))$. 由题设知点 A' 即 $(2b+x_0, f(2b+x_0))$.

这就证得了 $y = f(x)$ 图象上的任一点 A 关于直线 $x = a+b$ 对称的点 A' 也在 $y = f(x)$ 的图象上，即定理 1 成立.

定理 2 在同一直角坐标系中，函数 $y = f(2a-x)$ 与 $y = f(2b+x)$ 的图象关于直线 $x = a-b$ 对称.

证明 设点 $A(x_0, f(2a-x_0))$ 是函数 $y = f(2a-x)$ 的图象上任一点，可以验证它关于直线 $x = a-b$ 对称的点 $A'(2a-2b-x_0, f(2a-x_0))$ 在函数 $y = f(2b+x)$ 的图象上：

$$f(2b+2a-2b-x_0) = f(2a-x_0)$$

这就证得了定理 2 成立.

定理 1 是高中生熟知的结论，而对定理 2 可能有些陌生，要注意两者的区别.

推论 在同一直角坐标系中，有

(1) 函数 $y = f(x-a)$ 与 $y = f(a-x)$ 的图象关于直线线 $x = a$ 对称；

(2) 函数 $y = f(x+a)$ 与 $y = f(a-x)$ 的图象关于 y 轴对称.

例 1 (1997 年全国高考题) 函数 $y = f(x-1)$ 与 $y = f(1-x)$ 的图象关于(　　)

A. 直线 $x = 0$ 对称　　B. 直线 $x = 1$ 对称

C. 直线 $y = 0$ 对称　　D. 直线 $y = 1$ 对称

解 由推论(1)立知选 B.

例 2 求退化的二次曲线 $(x-y)(x+y-4) = 0$ 的对称轴.

解 即求函数 $y = x$ 与 $y = 4-x$ 的图象关于哪一条直线对称？

在定理 2 中选 $f(x) = x, a = 2, b = 0$ 可求得一条对称轴是 $x = 2$.

实际上,不垂直的两条相交直线组成的图形的对称轴有且仅有两条(是经过交点的两条互相垂直的直线),还有一条是 $y=2$.

例 2 提示我们,用本文的定理及推论可能没有求完所有的对称轴.

广义连贯多项式

文献[1]定义了 $n(n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2)$ 连贯一元多项式，本文再

定义 数列 $\{a_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}(n \leqslant +\infty$，此数列中任两项不相同，各项不为0) 的项均是数集 K 中的数，若 K 上次数大于1的 $m(m \in \mathbf{N}^*)$ 元多项式 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 及 $f(x_1, \cdots, x_m) + a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 均在 K 上可约，则称 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 是 K 上关于 $\{a_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 的广义连贯 m 元多项式. 关于 $\{1, 2, \cdots, n\}(1 \leqslant n \leqslant +\infty)$ 的广义连贯多项式叫做狭义 $(n+1)$ 连贯多项式，简称 $(n+1)$ 连贯多项式. $n = +\infty$ 时的广义连贯多项式、n 连贯多项式分别叫做广义无限连贯多项式、无限连贯多项式.

关于 n 连贯一元多项式，已有丰富的结论，特别是 n 连贯一元二次多项式已研究得较彻底①.

定理1 (1) $\mathbf{Q}$ 上不存在关于 $\{ki + b\}_{1 \leqslant i \leqslant n}(|k| \in \mathbf{N}^*, b \in \mathbf{Z}, n \geqslant 4)$ 的广义连贯一元二次多项式；

(2) $\mathbf{Q}$ 上不存在关于 $\{ki\}_{1 \leqslant i \leqslant n}(|k| \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 3)$ 的广义连贯一元二次式多项式.

证明 (1) 只需证 $n = 4$ 时成立.

假设 $\mathbf{Q}$ 上的二次多项式

$$f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$$

关于 $\{ki + b\}_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ 广义连贯，则

$$b^2 - 4ac = r^2, b^2 - 4ac - 4a(ki + b) = r_i^2 (1 \leqslant i \leqslant 4), r, r_i \in \mathbf{Q}$$

得

$$4ak = r_1^2 - r_2^2 = r_2^2 - r_3^2 = r_3^2 - r_4^2$$

由文献[2]的定理3又得 $4ak = 0$，这与 $a \neq 0, k \neq 0$ 矛盾！所以结论(1)成立.

(2) 可类似证明.

对于任意的 $k \in \mathbf{N}, k \geqslant 2$，在 $\mathbf{Z}$ 上均存在广义无限连贯一元 k 次多项式，比如 x^k 关于 $\{-i^k\}_{i \geqslant 1}$ 广义连贯.

猜想1 $\mathbf{Q}$ 上不存在无限连贯一元多项式.

---

① 此部分可参考本书"一元二次多项式的连贯性研究"部分内容.

引理 若复数集 **C** 上的二元二次多项式

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f_0 \qquad ①$$

在 **C** 上可约,则

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f_0 \end{vmatrix}=0 \qquad ②$$

证明 由题设知,存在 $a_i,c_i,f_i(i=1,2)\in \mathbf{C}$,使

$$f(x,y)=\prod_{i=1}^{2}(a_ix+c_iy+f_i)$$

展开后同 ① 式比较系数,从而可证得引理成立.

推论 **C** 上的二元二次多项式 $f(x,y)$ 及 $f(x,y)+r(r\in \mathbf{C}$ 且 $r\neq 0)$ 均在 **C** 上可约 $\Leftrightarrow$ 存在 $b,c,u,v\in \mathbf{C},uv\neq 0$,使

$$f(x,y)=(ux+vy)^2+b(ux+vy)+c$$

且一元多项式 $x^2+bx+c,x^2+bx+c+r$ 在 **C** 上可约.

证明 只需证 $\Rightarrow$.

设 $f(x,y)$ 即 ① 式.因为 $f(x,y)$ 可约,所以 ② 成立.

又 $f(x,y)+r$ 可约,所以

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f_0+r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & r \end{vmatrix}=r(ac-b^2)=0$$

$$b^2=ac$$

所以存在 $u,v\in \mathbf{C}$,使

$$Ax^2+2Bxy+cy^2=(ux+vy)^2$$

因为 $f(x,y)$ 可约,所以可设

$$f(x,y)=\prod_{i=1}^{2}(ux+vy+r_i)(r_1,r_2\in \mathbf{C})$$

由 $f(x,y)$ 是二元多项式知 $uv\neq 0$.

定理 2 二元二次多项式 $f(x,y)$ 在 $K(K\subset \mathbf{C})$ 上关于 $\{a_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$(见定义)广义连贯 $\Leftrightarrow$ 存在 $a,b,c,u,v\in K,auv\neq 0$,使

$$f(x,y)=a(ux+vy)^2+b(ux+vy)+c$$

且一元多项式 ax^2+bx+c 关于 $\{a_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 广义连贯.

由定理 2 知,n 连贯广义二元二次多项式、n 连贯二元二次多项式也已研究得比较完整.

猜想 2 m 元 k 次$(k\geqslant 2,m,K\in \mathbf{N}^*)$多项式 $f(x_1,\cdots,x_m)$ 在 $K(K\subset C)$

上关于$\{a_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$(见定义)广义连贯$\Leftrightarrow$存在$K$上的$m$元$\frac{k}{l}$($l\in\mathbf{N}, l\geqslant 2, l\mid k$)次多项式$g(x_1,\cdots,x_m)$及$b_j(j=l,l-1,\cdots,1,0)\in K, b_l\neq 0$,使$f(x_1,\cdots,x_m)=\sum_{j=0}^{l}b_jg^j(x_1,\cdots,x_m)$,且一元$l$次多项式$\sum_{j=0}^{l}b_jx^j$关于$\{a_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$广义连贯.

参考文献

[1] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993.
[2] 甘志国.有理数集上不存在四连贯的二次多项式[J].数学通讯,1995(12):23-26.

whc 82 的解决

首先约定:(1)本文中的 M 表示任意区间(连续的数集),M_1 表示区间 M 去掉其端点后的区间.显然,M 是开区间时,$M = M_1$,否则 $M \supsetneqq M_1$.(2)本文中的 $p(x)$ 指次数大于1的实系数多项式,$f(x)$,$f_1(x)$ 是多项式.(3)$p'(x)$ 指 $p(x)$ 的导数.设 $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$,则 $p'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(n-i)x^{n-i-1}$.

文献[1]介绍了程龙设计的一种求多项式极值的方法(配方法),其实质是下面的:

定理1 若 $p(x)$ 能表示为

$$p(x) = f(x)(x-x_0)^2 + p(x_0)(x_0 \in M_1, f(x_0) \neq 0) \qquad ①$$

则 x_0 是 $p(x)$ 的极值点:当 $f(x_0) > 0$ 时,$p(x_0)$ 是极小值;当 $f(x_0) < 0$ 时,$p(x_0)$ 是极大值.

用定理1求 $p(x)$ 的极值,关键是要求出①中的 $f(x)$ 与 x_0(若能求出一个,另一个就容易求了),因而文献[1]提出问题:

whc 82 求多项式极值的配方法值得研究.对于一般的三、四、五次多项式 $p(x)$,能否设计出求①中 $f(x)$ 与 x_0 的简单公式或程序?对于 $p(x)$,①中的 $f(x)$ 有什么性质?

下面解决这个问题(方法很简单).

定理2 对于 $p(x)$,式①成立的充要条件是:存在 $x_0 \in M_1$,使 $f(x_0) \neq 0$ 且 $p'(x_0) = 0$.

证明 设 $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}(n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}, a_0 \neq 0)$,对于任意的 $x_0 \in \mathbf{R}$,有

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i[(x-x_0)+x_0]^{n-i} = f_1(x)(x-x_0)^2 + p'(x_0)(x-x_0) + p(x_0)$$

其中 $f_1(x)$ 是 $n-2$ 次多项式.从而可得定理2成立.

以上证明方法给出了①中的 x_0 及 $f(x)$ 的求法:

全部 x_0 由 $x_0 \in M_1$ 且 $f(x_0) \neq 0$ 且 $p'(x_0) = 0$ 求得(当然会遇到解高次方

程的困难),求得 x_0 之后,就可求出相应的 $f(x)$:

$$f(x)=\frac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0}$$

这就全部解决了 **whc82**.

高等学校教材《数学分析》中都介绍了下面的结论:

定理 3 若 x_0 是 $p(x)$ 的极值点,则 $x_0\in M_1$,且 $p'(x_0)=0$.

由定理 3,2,1,可得

定理 4 对于 $p(x)$,其极值均可由定理 1 的方法求得(假设能求出 $p'(x)=0$ 的全部实根). x_0 是 $p(x)$ 的极大(小)值点的充要条件是: $x_0\in M_1$ 且式 ① 成立且 $f(x_0)<(>)0$.

定理 5 对于 $p(x)$,它没有极值的充要条件是:方程 $p'(x)=0(x\in M_1)$ 没有实根,或方程 $p'(x)=0(x\in M_1)$ 的实根 x_0 使得 $\left.\frac{p(x)-p(x_0)}{(x-x_0)^2}\right|_{x=x_0}=0$.

参考文献

[1] 杨之. 初等数学研究的问题与课题[M]. 长沙:湖南教育出版社,1993.

对数学问题 1677 的推广[①]

陈稳胜老师在《数学通报》2007 年第 7 期第 64 页给出了数学问题 1677 及其解答,这道题是:

1677　已知函数 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+1}$,$a\leqslant b\leqslant c$,求证:$f(a-b)+f(b-c)+f(c-a)\leqslant\frac{3}{2}$.

本文给出该题的几个推广结论.

定理 1　设 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}(a>1)$,$u+v+w=0$,$uvw\neq 0$.

(1) 若 u,v,w 中恰有一个为正数,则 $f(u)+f(v)+f(w)<\frac{3}{2}$;

(2) 若 u,v,w 中恰有两个为正数,则 $f(u)+f(v)+f(w)>\frac{3}{2}$.

(当 $uvw\to 0$ 时,$f(u)+f(v)+f(w)\to\frac{3}{2}$,所以以上两个结论中的"$\frac{3}{2}$"均是最佳常数.以下定理 2,3,4 中均有此结论.)

证明　(1) 易证

$$f(x)+f(-x)=1 \tag{①}$$

可不妨设 $u\leqslant v<0$,得 $w=-u-v>0$.

由 $a^{-u-v}+a^v-a^{-u}-1=(a^{-u}-a^v)(a^{-v}-1)>0$,得

$$a^{-u-v}+a^v>a^{-u}+1 \tag{②}$$

$$f(w)-f(-v)=\frac{a^w}{a^w+1}-\frac{1}{a^v+1}=\frac{a^{w+v}-1}{a^{w+v}+a^w+a^v+1}=$$

$$\frac{a^{-u}-1}{a^{-u-v}+a^{-u}+a^v+1}<\frac{a^{-u}-1}{2(a^{-u}+1)}(\text{用②})=$$

$$\frac{a^{-u}}{a^{-u}+1}-\frac{1}{2}=f(-u)-\frac{1}{2}$$

所以　$$f(w)-(1-f(v))<1-f(u)-\frac{1}{2}(\text{用①})$$

① 原载于《数学通讯》(2008 年第 2,4 期合刊).

$$f(u)+f(v)+f(w)<\frac{3}{2}$$

(2) 由 ① 及结论(1) 得,当 u,v,w 中恰有两个为正数即 $-u,-v,-w$ 中恰有一个为正数时

$$f(-u)+f(-v)+f(-w)<\frac{3}{2}$$

$$[1-f(u)]+[1-f(v)]+[1-f(w)]<\frac{3}{2}$$

$$f(u)+f(v)+f(w)>\frac{3}{2}$$

(当 $u\to 0$ 时,$f(u)+f(v)+f(w)\to f(0)+f(v)+f(-v)=\frac{1}{2}+1$(用①) $=\frac{3}{2}$. 进而得,当 $uvw\to 0$ 时,$f(u)+f(v)+f(w)\to\frac{3}{2}$.)

定理 2 设 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}(0<a<1), u+v+w=0, uvw\neq 0$.

(1) 若 u,v,w 中恰有一个为正数,则 $f(u)+f(v)+f(w)>\frac{3}{2}$;

(2) 若 u,v,w 中恰有两个为正数,则 $f(u)+f(v)+f(w)<\frac{3}{2}$.

定理 3 设 $g(x)=\frac{1}{a^x+1}(a>1), u+v+w=0, uvw\neq 0$.

(1) 若 u,v,w 中恰有一个为正数,则 $g(u)+g(v)+g(w)>\frac{3}{2}$;

(2) 若 u,v,w 中恰有两个为正数,则 $g(u)+g(v)+g(w)<\frac{3}{2}$.

定理 4 设 $g(x)=\frac{1}{a^x+1}(0<a<1), u+v+w=0, uvw\neq 0$.

(1) 若 u,v,w 中恰有一个为正数,则 $g(u)+g(v)+g(w)<\frac{3}{2}$;

(2) 若 u,v,w 中恰有两个为正数,则 $g(u)+g(v)+g(w)>\frac{3}{2}$.

定理 2,3,4 的证明 用

$$f(x)+g(x)=1 \qquad ③$$

由 ③ 及定理 1 立得定理 3 成立.

在定理 3 中令 $a=\frac{1}{a'}(0<a'<1)$ 立得定理 2 成立.

由 ③ 及定理 2 立得定理 4 成立.

定理 5 设 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}(a>1), n\geqslant 2$.

(1) 若 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^-$,则 $f(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) > \sum\limits_{i=1}^{n} f(a_i) - \frac{n-1}{2}$;

(2) 若 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^-$,则 $f(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) < \sum\limits_{i=1}^{n} f(a_i) - \frac{n-1}{2}$.

证明 用数学归纳法可证,下面只证(1).

由定理1(1)得,当 $a_1,a_2 \in \mathbf{R}^-$ 时:

$$f(a_1)+f(a_2)+f(-a_1-a_2) < \frac{3}{2}$$

$$f(a_1)+f(a_2)+1-f(a_1+a_2) < \frac{3}{2}$$

$$f(a_1+a_2) > f(a_1)+f(a_2)-\frac{1}{2}$$

即 $n=2$ 时成立.

假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时成立,读者可证 $n=k+1$ 时成立.

所以结论(1)成立.

定理 6 设 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}(0<a<1),n\geqslant 2$.

(1) 若 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^-$,则 $f(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) < \sum\limits_{i=1}^{n} f(a_i) - \frac{n-1}{2}$;

(2) 若 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^+$,则 $f(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) > \sum\limits_{i=1}^{n} f(a_i) - \frac{n-1}{2}$.

定理 7 设 $g(x)=\frac{1}{a^x+1}(a>1),n\geqslant 2$.

(1) 若 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^-$,则 $g(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) < \sum\limits_{i=1}^{n} g(a_i) - \frac{n-1}{2}$;

(2) 若 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^+\{0\}$,则 $g(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) > \sum\limits_{i=1}^{n} g(a_i) - \frac{n-1}{2}$.

定理 8 设 $g(x)=\frac{1}{a^x+1}(0<a<1),n\geqslant 2$.

(1) 若 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^-$,则 $g(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) > \sum\limits_{i=1}^{n} g(a_i) - \frac{n-1}{2}$;

(2) 若 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^+$,则 $g(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i) < \sum\limits_{i=1}^{n} g(a_i) - \frac{n-1}{2}$.

定理 6,7,8 的证明 全同定理 2,3,4 的证明.

对《对用最小公倍数法求周期的质疑及扩充》一文的再质疑

《数学通讯》2006年第17期第20页刊登的文章《对用最小公倍数法求周期的质疑及扩充》[1] 指出了有些书刊资料介绍的用最小公倍数法求两个函数和(差)的最小正周期的方法有误,并得到:

结论[1] 设$f_1(x)$,$f_2(x)$都是集合D上的周期函数,T_1,T_2分别是它们的最小正周期,若$\frac{T_1}{T_2} \in \mathbf{Q}$且$T_1 \neq T_2$,则$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$是周期函数且最小正周期为$T_1$,$T_2$的最小公倍数(设$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$($m,n \in \mathbf{N}^*$,$m,n$互质),则存在正数$\alpha$使$T_1 = m\alpha$,$T_2 = n\alpha$,得$T_1$,$T_2$的最小公倍数为$mn\alpha$,即$nT_1$).

本文将指出结论[1] 也不对.

例 求函数$f(x) = \sin 3x - \cos 2x$的最小正周期.

解 易知2π是$f(x) = \sin 3x - \cos 2x$的一个周期,下证2π是$f(x)$的最小正周期:

假设有小于2π的正数l是$f(x)$的周期,得

$$\sin 3(x + l) - \cos 2(x + l) = \sin 3x - \cos 2x \ (x \in \mathbf{R}) \quad ①$$

令$x = 0, -l$,分别得

$$\begin{cases} \sin 3l - \cos 2l = -1 \\ -1 = -\sin 3l - \cos 2l \end{cases}$$

$$\cos 2l = 1, 1 - 2\sin^2 l = 1$$

$$\sin l = 0, l = \pi$$

又由①,得$\sin 3x = 0(x \in \mathbf{R})$,这不可能!

所以$f(x)$的最小正周期是2π.

又$g(x) = \cos 2x$的最小正周期是π,但$f(x) + g(x) = \sin 3x$的最小正周期是$\frac{2}{3}\pi$,不是结论[1] 所得的2π与π的最小公倍数2π,这就说明结论[1] 不正确.

下面再给出一个有用的

定理1 若奇函数$f_1(x)$与偶函数$f_2(x)$都是集合D上的周期函数,且最小正周期分别为T_1,T_2,则函数$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$是周期函数且最小正周

期为 T_1,T_2 的最小公倍数.

证明 易证 $f_1(x),f_2(x)$ 的最小正周期的最小公倍数 T 是 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 的一个周期,所以 $f(x)$ 是周期函数.再设 T' 是 $f(x)$ 的一个周期,则

$$f_1(x+T')+f_2(x+T')=f_1(x)+f_2(x) \quad ②$$

可得 $x+T'\in D$, $-(x+T')\in D$,所以可将 ② 中的 x 改为 $-(x+T')$,得

$$f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(-(x+T'))+f_2(-(x+T'))$$

$$-f_1(x)+f_2(x)=-f_1(x+T')+f_2(x+T') \quad ③$$

由 ②,③,得

$$f_1(x+T')=f_1(x),f_2(x+T')=f_2(x)$$

这就说明 $f(x)$ 的周期 T' 一定是 $f_1(x),f_2(x)$ 的公共周期,而 $f_1(x)(f_2(x))$ 的周期一定是最小正周期的整数倍,所以 T' 是 T_1,T_2 的公倍数.若 T' 是 $f(x)$ 的最小正周期,则 T' 一定是 T_1,T_2 的最小公倍数.

读者易用定理 1 求解例题.

关于三角函数和差积商的周期,笔者仔细研读了文献[2],该文献给出了这方面完整有用的结论,且证明严谨,摘录几条以飨读者:

定理 2 若函数 $g(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos r_kx+b_k\sin r_kx)$,对 $k=1,2,\cdots,n$, a_k, b_k 均不同时为零,$r_1,r_2,\cdots,r_n$ 是可公度(即存在非零实数 α 及整数 m_k 使 $r_k=m_k\alpha(k=1,2,\cdots,n)$)的 n 个互不相等的正实数,则 $g(x)$ 的最小正周期为各项最小正周期的最小公倍数.(文献[2]第 123 页的推论 1)

(注意:不能用定理 2 来求 $f(x)=\sin 3x-\cos 2x+\cos 2x$ 的最小正周期.)

定理 3 若函数 $h(x)=\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(r_kx+\varphi_k)+b_k\sin(r_kx+\theta_k)]$,对 $k=1,2,\cdots,n$, a_k,b_k 均不同时为零,φ_k,θ_k 是任意角,但 $\theta_k-\varphi_k\neq l\pi+\frac{\pi}{2}(l\in\mathbf{Z})$,$r_1,r_2,\cdots,r_n$ 是可公度的正实数,则 $h(x)$ 的最小正周期为各项最小正周期的最小公倍数.(文献[2]第 123 ~ 124 页的推论 2)

定理 4 若函数 $f(x)=A_1\sin(w_1x+\varphi_1)\cdot A_2\sin(w_2x+\varphi_2)$ 为周期函数,则

(1) 当 $|w_1|\neq|w_2|$ 时,$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{|w_1+w_2|}$ 与 $\frac{2\pi}{|w_1-w_2|}$ 的最小公倍数;

(2) 当 $|w_1|=|w_2|$ 时,$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{|w_1|}$.(文献[2]第 99 页的

定理 1)

定理 5 对于函数 $g(x)=A_1\sin(w_1x+\varphi_1)\cdot A_2\cos(w_2x+\varphi_2)$, $h(x)=A_1\cos(w_1x+\varphi_1)\cdot A_2\cos(w_2x+\varphi_2)$ 也有与定理4相同的结论.(文献[2]第100页的推论)

定理 6 若函数 $f(x)=\dfrac{A_2\sin(w_2x+\varphi_2)}{A_1\sin(w_1x+\varphi_1)}$ 为周期函数,则

(1) 当 $|w_1|\neq|w_2|$ 时, $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{|w_1+w_2|}$ 与 $\dfrac{2\pi}{|w_1-w_2|}$ 的最小公倍数;

(2) 当 $|w_1|=|w_2|$ 时, $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{|w_1|}$.(文献[2]第107页的定理1)

下面用定理4再来求解例题:

$$f(x)=\sin 3x-\cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\cos 2x=$$
$$-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{2}x\right)=$$
$$-2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 $\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right|}$ 与 $\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right|}$ 的最小公倍数 2π.

参考文献

[1] 孙汉中.对用最小公倍数法求周期的质疑及扩充[J].数学通讯,2006(17):20.
[2] 马明,宣立新.三角函数和差积商的周期[M].呼和浩特:内蒙古人民出版社,1984.

又四类抽象函数的周期性

文献[1]证明了11类抽象函数具有周期性,本文又给出这样的四类抽象函数.

定理1 若 $x \in \mathbf{R}$ 时均有 $f(x+a)+f(x)=k$,则 $f(x)$ 是周期函数(当 $a \neq 0$ 时,$f(x)$ 有一个周期为 $2a$).

证明 为 $a=0$ 时,可得定理1成立.否则,有

$$f(x+2a)+f(x+a)=f(x+a)+f(x)=k$$

$$f(x+2a)=f(x)(a \neq 0)$$

也得定理1成立.

定理2 若 $x \in \mathbf{R}$ 时均有 $f(x+a)f(x)=k(a,k \in \mathbf{R}^*$,$\mathbf{R}^*$ 表示非零实数集),则 $f(x)$ 是周期函数,且有一个周期为 $2a$.

证明 可得

$$f(x+a)f(x)=k$$

$$f(x+2a)f(x+a)=k$$

因为 $k \in \mathbf{R}^*$,所以以上两式可以相除,得

$$f(x+2a)=f(x)(a \neq 0)$$

所以定理2成立.

定理1是文献[1]中"类型2"的推广,定理2是文献[1]中"类型3,4"的联合推广.

定理3 若 $x \in \mathbf{R}$ 时均有 $[f(x)+k]^{2n}+[f(x+a)+k]^{2n}=r(n \in \mathbf{N}^*$,$a \in \mathbf{R}^*$,且"$f(x)+k \geqslant 0$ 恒成立"或"$f(x)+k \leqslant 0$ 恒成立"),则 $f(x)$ 是周期函数,且有一个周期为 $2a$.

证明 可得 $[f(x+a)+k]^{2n}+[f(x+2a)+k]^{2n}=r$

所以 $$[f(x+2a)+k]^{2n}=[f(x)+k]^{2n}$$

又由"$f(x)+k \geqslant 0$ 恒成立"或"$f(x)+k \leqslant 0$ 恒成立",得

$$f(x+2a)=f(x)(a \neq 0)$$

所以定理3成立.

定理4 若 $x \in \mathbf{R}$ 时均有 $[f(x)+k]^{2n+1}+[f(x+a)+k]^{2n+1}=r(n \in \mathbf{N}$,$a \in \mathbf{R}^*$),则 $f(x)$ 是周期函数,且有一个周期为 $2a$.(证明同定理3的证明)

例 (2003年烟台诊断性测试题)设定义域为 **R** 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$，且 $f(-1)=\frac{1}{2}$，则 $f(2003)$ 的值为( )

A. -1 B. 1 C. 2003 D. $\frac{1}{2}$

解 得

$$[f(x+1)-\frac{1}{2}]^2=f(x)-[f(x)]^2=\frac{1}{2}-[f(x)-\frac{1}{2}]^2$$

$$[f(x)-\frac{1}{2}]^2+[f(x+1)-\frac{1}{2}]^2=\frac{1}{2}$$

由定理3，得 $f(x+2)=f(x)$，$f(2003)=f(-1)=\frac{1}{2}$. 选D.

参考文献

[1] 刘冰."抽象函数周期性证明"的11种类型[J].数学通讯,2004(18):25-26.

也谈用判别式法求一类函数的值域

文献[1]讨论了如何用判别式法求形如

$$y=\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}(a^2+d^2\neq 0\text{ 且 }a^2+b^2\neq 0)$$

的函数的值域,本文将再研究这个问题.对于某些情形,用本文的方法将要简捷得多.

定理 函数 $y=\frac{x}{ax^2+bx+c}(ac\neq 0)$ ①

的值域可用判别式法求得,即先将函数(1)的解析式变形为 x 的形式上的一元二次方程

$$ayx^2+(by-1)x+cy=0$$

因为 $x\in\mathbf{R}$,所以

$$\Delta_x=(by-1)^2-4acy^2\geqslant 0 \quad ②$$

不等式②的解集就是函数①的值域.

证明 首先,应注意函数①的定义域是 $\{x\mid ax^2+bx+c\neq 0\}$;当 $x=0$ 时,$y=0$.下面求函数

$$y=\frac{x}{ax^2+bx+c}(ac\neq 0,x\neq 0\text{ 且 }ax^2+bx+c\neq 0) \quad ③$$

的值域.

可把式③等价变形为关于 x 的一元二次方程(因为由 $x\neq 0$ 得 $y\neq 0$):

$$ayx^2+(by-1)x+cy=0(ac\neq 0,x\neq 0) \quad ④$$

因为此方程一定有实数根,所以②成立.

设函数③的值域为 A,关于 y 的不等式②的解集为 B,下证 $A=B^*$(B^* 指 B 中去掉0后剩下的元素组成的集合):

在③中由 $x\neq 0$ 得 $y\neq 0$,③与④等价,④中的每一个 y 均满足②,所以 $A\subset B^*$.

对于满足②中的每一个 y(但 $y\neq 0$),均可在④中求出对应的 x 值,又④与③等价,且对应的 x 值是函数③的定义域中的元素,所以 $B^*\subset A$.得 $A=B^*$.

因为函数③的值域是 B^*,又在函数①中 $x=0$ 时 $y=0$,所以函数①的

值域为 B.

推论 1 函数

$$y=\frac{ex+f}{ax^2+bx+c}\left(ae\neq 0,\frac{ex+f}{ax^2+bx+c}\text{ 是既约分式}\right) \qquad ⑤$$

的值域可用判别式法求出,即先将函数 ⑤ 的解析式变形为 x 的形式上的一元二次不等式,其判别式 $\Delta_x=h(y)\geqslant 0$ 的解集就是函数 ⑤ 的值域.

证明 将函数 ⑤ 的图象向右平移 $\frac{f}{e}$ 个单位,得到函数图象的解析式为

$$y_1=\frac{x}{\frac{a}{e}(x-\frac{f}{e})^2+\frac{b}{e}(x-\frac{f}{e})+\frac{c}{e}}=\frac{x}{a'x^2+b'x+c'}(a'\neq 0) \qquad ⑥$$

由 $\frac{ex+f}{ax^2+bx+c}$ 是既约分式可知 ⑥ 中的 $\frac{x}{a'x^2+b'x+c'}$ 也是既约分式(因为平移后图象的形状不变),所以 $c'\neq 0$. 由定理知函数⑥的值域可用判别式法求得,从而函数 ⑤ 的值域也可用判别式法求得.

推论 2 函数 $y=\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}\left(a\neq 0,ae\neq bd,\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}\text{ 是既约分式}\right)$ 的值域可用判别式法求出(方法同推论 1).

证明 可将函数 y 等价变形为

$$y=\frac{d}{a}+\frac{(ae-bd)x+af-cd}{a^2x^2+abx+ac}\left(a^2(ae-bd)\neq 0,\frac{(ae-bd)x+af-cd}{a^2x^2+abx+ac}\text{ 是既约分式}\right)$$

再由推论 1 得推论 2 成立.

例 1 求函数 $y=\frac{x^2-x-2}{x^2+3x+1}$ 的值域.(文献[1] 的例 2)

解 由推论 2 知,可用判别式法来求.

先将原函数变形为

$$(y-1)x^2+(3y+1)x+(y+2)=0$$

因为 $x\in\mathbf{R}$,所以

$$\Delta_x=(3y+1)^2-4(y-1)(y+2)=5y^2+2y+9\geqslant 0$$

得 $y\in\mathbf{R}$,所以所求函数 y 的值域也为 $\mathbf{R}$.

注:形如 $y=\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}$ 的函数值域除推论 2 外的情形容易求出.

文献[2](第 7 页) 给出了函数

$$y=\frac{x}{ax^2+cx+b}(ab\neq 0) \qquad ⑦$$

的值域,得到的结论是“当 $ab>0$ 时,$y\in\left[-\frac{1}{2\sqrt{ab}-c},\frac{1}{2\sqrt{ab}+c}\right]$;当 $ab<$

0时，$y \in \mathbf{R}$"．

由于文献[2]的解答不严密，而导致上述"当 $ab>0$ 时的结论"是错误的(当$ab<0$时的结论正确)：

事实上，在"$y \in [-\frac{1}{2\sqrt{ab}-c},\frac{1}{2\sqrt{ab}+c}]$"中若取 $ab=1,c=3$ 得 $y \in [1,\frac{1}{5}]$，即 $y \in \varnothing$，而函数的值域不能是$\varnothing$；当 $c^2=4ab$ 时，"$y \in [-\frac{1}{2\sqrt{ab}-c},\frac{1}{2\sqrt{ab}+c}]$"无意义(分母为0)，这也说明上述"当 $ab>0$ 时的结论"不正确．文献[2]的第3节中两次出现"函数的值域为空集"的说法也不正确．

用本文的方法可求得函数⑦的值域是：

(1)当 $ab<0$ 时，$y \in \mathbf{R}$.

(2)当 $ab>0$ 时

1)又 $c<-2\sqrt{ab}$ 或 $c>2\sqrt{ab}$，$y \in (-\infty,\frac{1}{c+2\sqrt{ab}}] \cup [\frac{1}{c-2\sqrt{ab}},+\infty)$；

2)又 $c=-2\sqrt{ab}$ 时，$y \in [-\frac{1}{4\sqrt{ab}},+\infty)$；

3)又 $c=2\sqrt{ab}$ 时，$y \in (-\infty,\frac{1}{4\sqrt{ab}}]$；

4)又 $-2\sqrt{ab}<c<2\sqrt{ab}$ 时，$y \in [\frac{1}{c-2\sqrt{ab}},\frac{1}{c+2\sqrt{ab}}]$.

例2　求函数 $y=\frac{3x^2+19x+47}{2x^2+12x+30}$ 的值域.

解　由推论2容易求得所求值域为$[\frac{35-\sqrt{7}}{24},\frac{35+\sqrt{7}}{24}]$.

例2即文献[2]的例4，但文献[2]的解答有误.

参考文献

[1] 李金峰.判别式法求一类函数的值域[J].数学通讯，2003(14,16)：13-14.

[2] 胡长江.求函数 $af(x+m)+c$ 型的值域[J].数学通讯，2003(2,4)：6-7.

也谈二元二次多项式的因式分解

有较多文章给出了二元二次多项式能分解因式的充要条件及分解公式，分解方法，比如注释 ①～⑤. 这里先把注释③的方法介绍如下(注释③有印刷错误，且表述可以简化)：

不妨设一般的二元二次多项式为

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F(A \neq 0) \quad ①$$

可用微积分的知识，把 $f(x,y)$ 恒等变形为

$$f(x,y) = A\left(x + \frac{By + D}{A}\right)^2 - \frac{1}{A}[(B^2 - AC)y^2 + 2(BD - AE)y + (D^2 - AF)] \quad ②$$

从而有

定理 1 ① 能分解因式的充要条件是

$$(BD - AE)^2 - (B^2 - AC)(D^2 - AF) = 0 \quad ③$$

并且 $f(x,y)$ 若能分解，则分解的结果为

(1) 当 $B^2 - AC \neq 0$ 时

$$f(x,y) = \frac{1}{A}\left(Ax + By + D + \sqrt{B^2 - AC}y + \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}}\right)\left(Ax + By + D - \sqrt{B^2 - AC}y - \frac{BD - AE}{\sqrt{B^2 - AC}}\right)$$

(2) 当 $B^2 - AC = 0$ 时

$$f(x,y) = \frac{1}{A}\left(Ax + By + D + \sqrt{D^2 - AF}\right)\left(Ax + By + D - \sqrt{D^2 - AF}\right)$$

(其中 $\sqrt{a}(a \in \mathbf{R})$ 的意义是：当 $a \geq 0$ 时，$\sqrt{a}$ 是 a 的算术平方根；当 $a < 0$ 时，$\sqrt{a} = \sqrt{-a}i$.)

推论 (1) $\mathbf{R}$ 上的式 ① 在 $\mathbf{R}$ 上能分解 $\Leftrightarrow$ (③ 成立且 $B^2 - AC > 0$) 或 ($B^2 - AC = BD - AE = 0$ 且 $D^2 - AF \geq 0$)；

---

① 《二元二次多项式可因式分解的充要条件及其分解公式》(高振山．数学通报，1998(11)).
② 《关于二元二次多项式的因式分解》(王远征．中学生数学，1995(1)).
③ 《用微积分分解二次六项式》(朱广化．数学通报，1999(8)).
④ 《二元二次六项式因式分解的简明方法及应用》(王远征．中学数学教学，1999(5)).
⑤ 《二元二次多项式的因式分解》(李选平，杨占运．中学数学教学参考，1999(10)).

(2)$\mathbf{R}$上的式①是完全平方式$\Leftrightarrow B^2-AC=D^2-AF=BD-AE=0$.

注释④,⑤都介绍了用减元法分解二元二次多项式,这里再把这种方法介绍如下(即用一元二次三项式的因式分解方法来分解二元二次多项式):

设$f(x,0)=Ax^2+2Dx+F$可分解为$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$,

$f(0,y)=cy^2+2Ey+F$可分解为$(b_1y+c_1)(b_2y+c_2)$,

又
$$2B=a_1b_2+a_2b_1$$

则$f(x,y)$可分解为$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$.

但注释④介绍的在$\mathbf{Z}$上分解$f(x,y)$的规范化方法中的结论:

"对于$f(x,0)$及$f(0,y)$在$\mathbf{Z}$上的分解式中a_1,a_2,b_1,b_2,若$2B\neq a_1b_2+a_2b_1$,则$f(x,y)$在$\mathbf{Z}$上不能分解"

有误,应改为

"对于$f(x,0)$及$f(0,y)$在$\mathbf{Z}$上的所有分解式中a_1,a_2,b_1,b_2,若均有$2B\neq a_1b_2+a_2b_1$,则$f(x,y)$在$\mathbf{Z}$上不能分解".

举反例说明如下:

例1 在$\mathbf{Z}$上分解因式$f_1(x,y)=120x^2+217xy+40y^2+204x+126y+72$.

解 有
$$f_1(x,0)=120x^2+204x+72=(12x+6)(10x+12)$$
$$f_1(0,y)=40y^2+126y+72=(8y+6)(5y+12)$$
$$217\neq 12\times 5+10\times 8$$

但并不能说$f_1(x,y)$在$\mathbf{Z}$上不能分解.因为由
$$f_1(x,0)=(24x+12)(5x+6)$$
$$f_1(0,y)=(5y+12)(8y+6)$$
$$217=24\times 8+5\times 5$$

可得
$$f_1(x,y)=(24x+5y+12)(5x+8y+6)$$

注释⑤例3的解法也不完整,可以修正为:

例2 若多项式$f_2(x,y)=6x^2+mxy-4y^2-x+17y-15$可分解为两个关于$x,y$的二元一次多项式的乘积,求常数$m$的值.

解 由
$$f_2(x,0)=6x^2-x-15=(3x-5)(2x+3)$$
$$f_2(0,y)=-4y^2+17y-15=(4y-5)(-y+3)$$

知,当$m=3\times(-1)+2\times 4=5$时,$f_2(x,y)$能分解,且
$$f_2(x,y)=(3x+4y-5)(2x-y+3)$$

又
$$f_2(x,0)=(-\frac{9}{5}x+3)(-\frac{10}{3}x-5)$$
$$f_2(0,y)=(-y+3)(4y-5)$$

所以当 $m=-\frac{9}{5}\times 4-\frac{10}{3}\times(-1)=-\frac{58}{15}$ 时，$f_2(x,y)$ 能分解，且
$$f_2(x,y)=(\frac{9}{5}x+y-3)(\frac{10}{3}x-4y+5)$$

又由条件③知，所求 m 的值只有两个：$m=5$ 或 $-\frac{58}{15}$. 而注释⑤只给出了一个答案 $m=5$.

也谈二元多项式的因式分解

本书中“也谈二元二次多项式的因式分解”指出了注释①的不严谨之处，但可把注释①的方法推广到二元 n 次多项式的因式分解，以下只介绍三次的情形.

定理1 数集 K 上的关于 x,y 的二元二次多项式 $p(x,y)$ 在 K 上能分解成 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$ 的充要条件是

$$\begin{cases} p(x,0)=ax^2+dx+f \text{ 在 } K \text{ 上可分解为 } (a_1x+c_1)(a_2x+c_2) \\ p(0,y)=by^2+ey+f \text{ 在 } K \text{ 上可分解为 } (b_1y+c_1)(b_2y+c_2) \\ c=a_1b_2+a_2b_1 \end{cases}$$

例1 判断 $p_1(x,y)=2x^2+3xy+y^2+4x+4y+2$ 在 $\mathbf{Z}$ 上能否分解因式.

解 由 $p_1(0,y)=y^2+4y+2$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不能分解因式及定理1知，$p_1(x,y)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不能分解因式.

定理2 数集 K 上的二元三次多项式

$$q(x,y)=a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}$$

在 K 上能分解成 $(b_{10}x+b_{01}y+b_{00})(c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{02}y^2+c_{10}x+c_{01}y+c_{00})$ 的充要条件是

$$\begin{cases} q(x,0)=a_{30}x^3+a_{20}x^2+a_{10}x+a_{00} \text{ 在 } K \text{ 上可分解成} \\ \qquad (b_{10}x+b_{00})(c_{20}x^2+c_{10}x+c_{00}) \\ q(0,y)=a_{03}y^3+a_{02}y^2+a_{01}y+a_{00} \text{ 在 } K \text{ 上可分解成} \\ \qquad (b_{01}y+b_{00})(c_{02}y^2+c_{01}y+c_{00}) \\ a_{30}x^2+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3 \text{ 在 } K \text{ 上可分解成} \\ \qquad (b_{10}x+b_{01}y)(c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{02}y^2) \\ a_{11}=a_{10}c_{01}+b_{01}c_{10}+b_{00}c_{11} \end{cases}$$

例2 在 $\mathbf{Z}$ 上分解因式

$$q_0(x,y)=4x^3+4x^2y-xy^2-y^3+10x^2+7xy-3y^2+8x+2y+2$$

① 李选平，杨占运.二元二次多项式的因式分解.中学数学教学参考，1999(10).

解 因为

$$q_0(x,0) = 4x^3 + 10x^2 + 8x + 2 = (2x + 1)(2x^2 + 4x + 2)$$

$$q_0(0,y) = -y^3 - 3y^2 + 2y + 2 = (-y + 1)(y^2 + 4y + 2)$$

$$4x^3 + 4x^2y - xy^2 - y^3 = (2x - y)(2x^2 + 3xy + y^2)$$

$$7 = 2 \times 4 - 1 \times 4 + 1 \times 3$$

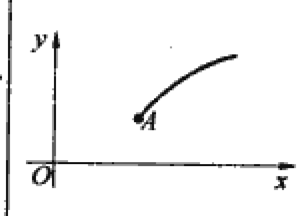
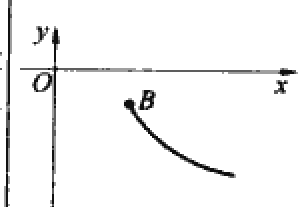
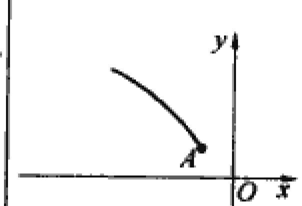
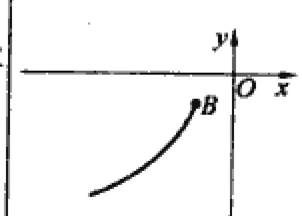
所以 $$q_0(x,y) = (2x - y + 1)(2x^2 + 3xy + y^2 + 4x + 4y + 2)$$

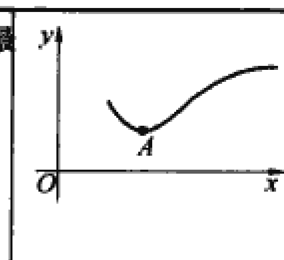
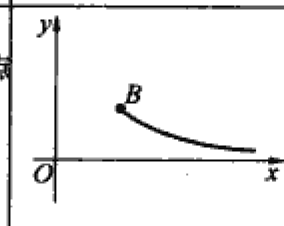
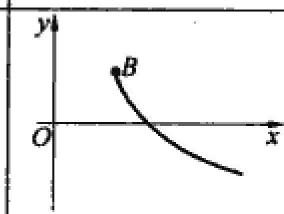
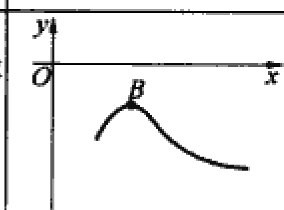
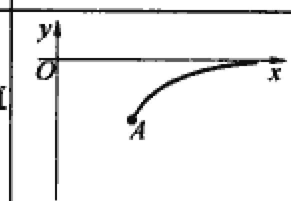
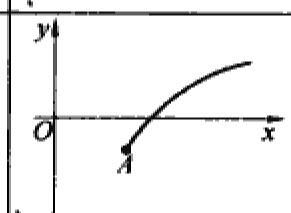
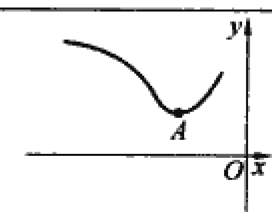
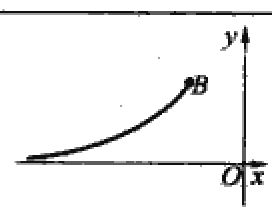
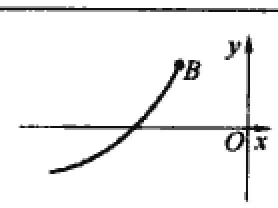
再由例 1 知,以上是分解的最后结果.

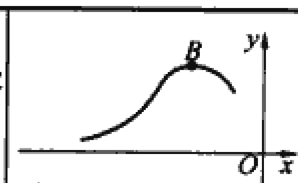
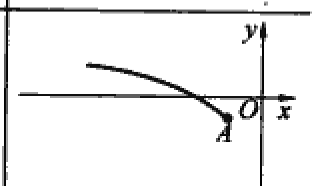
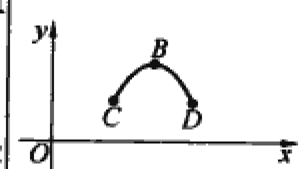
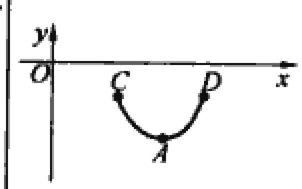
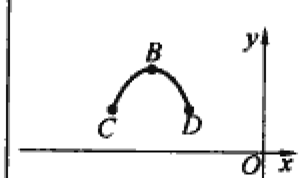
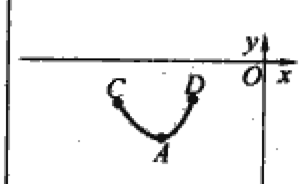
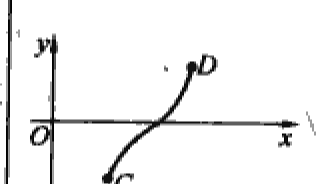
函数 $y=k\sqrt{ax+b}+l\sqrt{cx+d}$ 的单调区间及值域

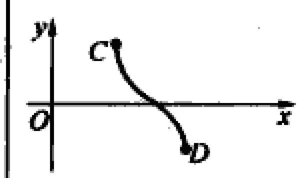
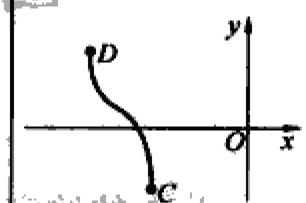
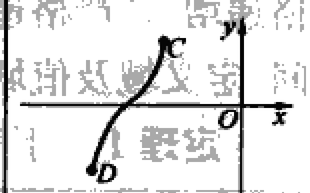
我们约定，本文中未注明的字母均表示实数，用“↑(↓)”表示“严格单调递增(减)”. 本文将研究无理函数 $y=k\sqrt{ax+b}+l\sqrt{cx+d}$ 的单调区间、定义域及值域、最值与极值(显然只需研究 klac $\neq$ 0 的情形)，下面的定理包含了此函数的各种情形.

定理 下表中的 $k,l\in\mathbf{R}^{+}$，$a<b$.

个次	函数及其定义域	值域	单调区间	最值、极值点	函数图象
(1)	$y=k\sqrt{x-a}+l\sqrt{x-b}$，$x\in[b,+\infty)$	$y\in[k\sqrt{b-a},+\infty)$	$[b,+\infty)\uparrow$	无极值、最大值点；最小值点为 $A(b,k\sqrt{b-a})$	
(2)	$y=-k\sqrt{x-a}-l\sqrt{x-b}$，$x\in[b,+\infty)$	$y\in(-\infty,-k\sqrt{b-a}]$	$[b,+\infty)\downarrow$	无极值、最小值点；最大值点为 $B(b,-k\sqrt{b-a})$	
(3)	$y=k\sqrt{-x-a}+l\sqrt{-x-b}$ $x\in(-\infty,-b]$	同(1)	$(-\infty,-b]\downarrow$	无极值、最大值点；最小值点为 $A(-b,k\sqrt{b-a})$	
(4)	$y=-k\sqrt{-x-a}-l\sqrt{-x-b}$ $x\in(-\infty,-b]$	同(2)	$(-\infty,-b]\uparrow$	无极值、最小值点；最大值点为 $B(-b,-k\sqrt{b-a})$	

(5)	$y=k\sqrt{x-a}-l\sqrt{x-b}$ $x\in[b,+\infty)$	1) $k>l$	$y\in[\sqrt{(k^2-l^2)(b-a)},+\infty)$	$[b,\frac{k^2b-l^2a}{k^2-l^2}]\downarrow$; $[\frac{k^2b-l^2a}{k^2-l^2},+\infty)\uparrow$	无极大、最大值点;极小、最小值点均为$A(\frac{k^2b-l^2a}{k^2-l^2},\sqrt{(k^2-l^2)(b-a)})$	
		2) $k=l$	$y\in(0,k\sqrt{b-a}]$	$[b,+\infty)\downarrow$	无极值、最小值点;最大值点为$B(b,k\sqrt{b-a})$	
		3) $k<l$	$y\in(-\infty,k\sqrt{b-a}]$	同上	同上	
(6)	$y=-k\sqrt{x-a}+l\sqrt{x-b}$ $x\in[b,+\infty)$	1) $k>l$	$y\in(-\infty,-\sqrt{(k^2-l^2)(b-a)}]$	$[b,\frac{k^2b-l^2a}{k^2-l^2}]\uparrow$; $[\frac{k^2b-l^2a}{k^2-l^2},+\infty)\downarrow$	无极小、最小值点;极大、最大值点均为$B(\frac{k^2b-l^2a}{k^2-l^2},-\sqrt{(k^2-l^2)(b-a)})$	
		2) $k=l$	$y\in[-k\sqrt{b-a},0)$	$[b,+\infty)\uparrow$	无极值、最大值点;最小值点为$A(b,-k\sqrt{b-a})$	
		3) $k<l$	$y\in[-k\sqrt{b-a},+\infty)$	同上	同上	
(7)	$y=k\sqrt{-x-a}-l\sqrt{-x-b}$, $x\in(-\infty,-b]$	1) $k>l$	同(5)1)	$(-\infty,\frac{l^2a-k^2b}{k^2-l^2}]\downarrow$; $[\frac{l^2a-k^2b}{k^2-l^2},-b]\uparrow$	无极大、最大值点;极小、最小值点均为$A(\frac{l^2a-k^2b}{k^2-l^2},\sqrt{(k^2-l^2)(b-a)})$	
		2) $k=l$	同(5)2)	$(-\infty,-b]\uparrow$	无极值、最小值点;最大值值点为$B(-b,k\sqrt{b-a})$	
		3) $k<l$	同(5)3)	同上	同上	

(8)	$y=-k\sqrt{-x-a}+l\sqrt{-x-b}$, $x\in(-\infty,-b]$	1) $k>l$	同(6)1)	$(-\infty,\frac{l^2a-k^2b}{k^2-l^2}]\uparrow$; $[\frac{l^2a-k^2b}{k^2-l^2},-b]\downarrow$	无极小、最小值点;极大、最大值点均为 $B(\frac{l^2a-k^2b}{k^2-l^2},-\sqrt{(k^2-l^2)(b-a)})$	
		2) $k=l$	同(6)2)	$(-\infty,-b]\downarrow$	无极值、最大值点;最小值点为 $A(-b,-k\sqrt{b-a})$	
		3) $k<l$	同(6)3)	同上	同上	
(9)	$y=k\sqrt{x-a}+l\sqrt{-x+b}$, $x\in[a,b]$		$y\in[\min\{k\sqrt{b-a},l\sqrt{b-a}\},\sqrt{(k^2+l^2)(b-a)}]$	$[a,\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2}]\uparrow$; $[\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2},b]\downarrow$	无极小值点;极大、最大值点均为 $B(\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2},\sqrt{(k^2+l^2)(b-a)})$;最小值点是端点 C 或 D	
(10)	$y=-k\sqrt{x-a}-l\sqrt{-x+b}$, $x\in[a,b]$		$y\in[-\sqrt{(k^2+l^2)(b-a)},\max\{-k\sqrt{b-a},-l\sqrt{b-a}\}]$	$[a,\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2}]\downarrow$; $[\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2},b]\uparrow$	无极大值点;极小、最小值点均为 $A(\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2},-\sqrt{(k^2+l^2)(b-a)})$;最大值点是 C 或 D	
(11)	$y=k\sqrt{-x-a}+l\sqrt{x+b}$ $x\in[-b,-a]$		同(9)	$[-b,-\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2}]\uparrow$; $[-\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2},-a]\downarrow$	无极小值点;极大、最大值点均为 $B(-\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2},\sqrt{(k^2+l^2)(b-a)})$;最小值点是 C 或 D	
(12)	$y=-k\sqrt{-x-a}-l\sqrt{x+b}$ $x\in[-b,-a]$		同(10)	$[-b,-\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2}]\downarrow$; $[-\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2},-a]\uparrow$	无极大值点;极小、最小值点均为 $A(-\frac{k^2b+l^2a}{k^2+l^2},-\sqrt{(k^2+l^2)(b-a)})$;最大值点是 C 或 D	
(13)	$y=k\sqrt{x-a}-l\sqrt{-x+b}$, $x\in[a,b]$		$y\in[-l\sqrt{b-a},k\sqrt{b-a}]$	$[a,b]\uparrow$	无极值点;最小值点为左端点,最大值点为右端点	

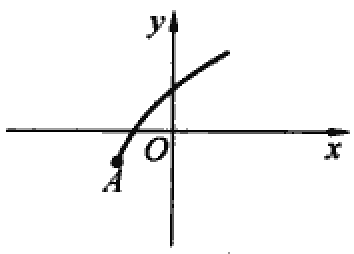
(14)	$y=-k\sqrt{x-a}+l\sqrt{-x+b}$, $x\in[a,b]$	$y\in[-k\sqrt{b-a}, l\sqrt{b-a}]$	$[a,b]\downarrow$	无极值点;最小值点为右端点,最大值点为左端点	
(15)	$y=k\sqrt{-x-a}-l\sqrt{x+b}$ $x\in[-b,-a]$	同(13)	$[-b,-a]\downarrow$	同(14)	
(16)	$y=-k\sqrt{-x-a}+l\sqrt{x+b}$ $x\in[-b,-a]$	同(14)	$[-b,-a]\uparrow$	同(13)	

函数 $y=kx\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的单调区间及值域

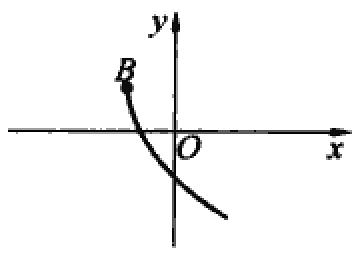
首先的约定,本文中未注明的字母均表示实数,用"↗","↘"分别表示"严格递增","严格递减".本文将研究无理函数 $y=kx\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的单调区间、定义域及值域、最值与极值、渐近线.

定理 1 下表中的 $k,l\in\mathbf{R}^+$.(图在下方,图(1) ~ 图(8))

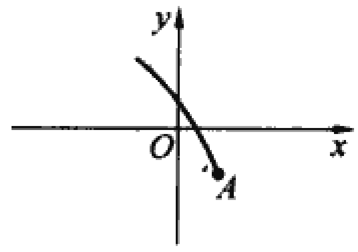
个次	函数及其定义域	值 域	单调区间	最值、极值点
(1)	$y=kx+l\sqrt{x+c}$, $x\in[-c,+\infty)$	$y\in[-kc,+\infty)$	$[-c,+\infty)$ ↗	无极值、最大值点;最小值点为 $A(-c,-kc)$
(2)	$y=-kx-l\sqrt{x+c}$, $x\in[-c,+\infty)$	$y\in(-\infty,kc]$	$[-c,+\infty)$ ↘	无极值点,最小值点;最大值点为 $B(-c,-kc)$
(3)	$y=-kx+l\sqrt{-x+c}$ $x\in(-\infty,c]$	同(1)	$(-\infty,c]$ ↘	无极值点,最大值点,最小值点为 $A(c,-kc)$
(4)	$y=kx-l\sqrt{-x+c}$, $x\in(-\infty,c)$	同(2)	$(-\infty,c]$ ↗	无极值点、最小值点;最大值点为 $B(c,kc)$
(5)	$y=kx+l\sqrt{-x+c}$, $x\in(-\infty,c]$	$y\in(-\infty,\frac{l^2+4k^2c}{4k}]$	$(-\infty,\frac{4k^2c-l^2}{4k^2}]$ ↗; $[\frac{4k^2c-l^2}{4k^2},c]$ ↘	无最小值、极小值点;最大值、极大值点均为 $B(\frac{4k^2c-l^2}{4k^2},\frac{4k^2c+l^2}{4k^2})$
(6)	$y=-kx-l\sqrt{-x+c}$, $x\in(-\infty,c]$	$y\in[-\frac{l^2+4k^2c}{4k},+\infty)$	$(-\infty,\frac{4k^2c-l^2}{4k^2}]$ ↘; $[\frac{4k^2c-l^2}{4k^2},c]$ ↗	无最大值、极大值点;最小值、极小值点均为 $A(\frac{4k^2c-l^2}{4k^2},-\frac{l^2+4k^2c}{4k})$
(7)	$y=-kx+l\sqrt{x+c}$, $x\in[-c,+\infty)$	同(5)	$[-c,\frac{l^2-4k^2c}{4k^2}]$ ↗; $[\frac{l^2-4k^2c}{4k^2},+\infty)$ ↘	无最小值、极小值点;最大值点,极大值点均为 $B(\frac{l^2-4k^2c}{4k^2},\frac{l^2+4k^2c}{4k})$
(8)	$y=kx-l\sqrt{x+c}$, $x\in[-c,+\infty)$	同(6)	$[-c,\frac{l^2-4k^2c}{4k^2}]$ ↘ $[\frac{l^2-4k^2c}{4k^2},+\infty)$ ↗	无最大值、极大值点;最小值、极小值点均为 $A(\frac{l^2-4k^2c}{4k^2},-\frac{l^2+4k^2c}{4k})$



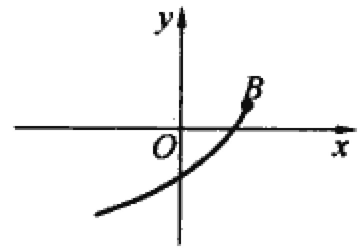
图(1)



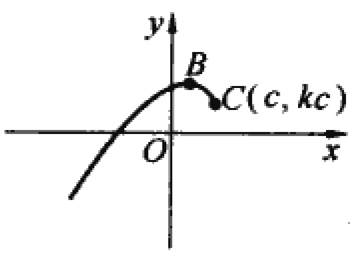
图(2)



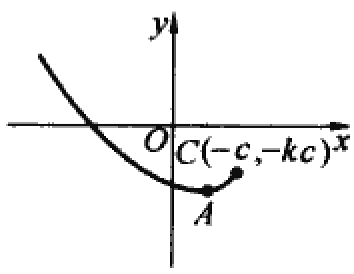
图(3)



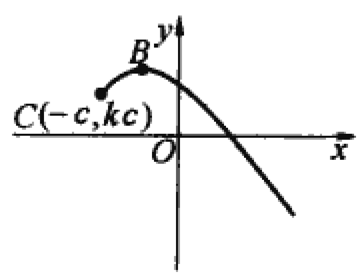
图(4)



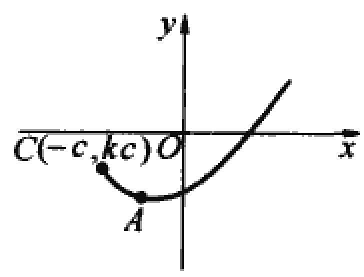
图(5)



图(6)



图(7)



图(8)

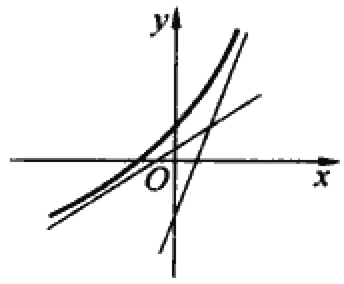
定理 1 的图

定理 2 下表中的 $k \geqslant 0, l > 0$.(图在表下方)

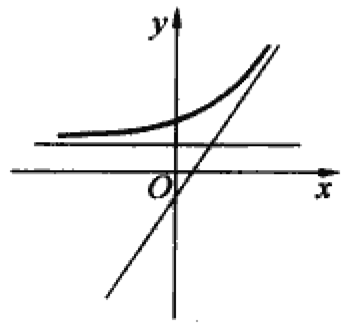
个次	函数及其定义域、渐近线		值域	单调区间	最值点与极值点
(1)	函数 $y = kx + l\sqrt{(x-h)^2+r^2}$ $(r \geqslant 0)$; $x \in (-\infty, +\infty)$; 渐近线为 $y = (k+l)x - lh$ $(x \to +\infty)$, $y = (k-l)x + lh$ $(x \to -\infty)$	1) $k > l$	$y \in (-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)\uparrow$	无
		2) $k = l$	$y \in (kh, +\infty)$	同上	无
		3) $k < l$	$y \in [kh + r\sqrt{l^2+k^2}, +\infty)$	$(-\infty, h - \frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}]\downarrow$; $[h - \frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}, +\infty)\uparrow$	无最大值、极大值点;最小值、极小值点均为 $A(h - \frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}, kh + r\sqrt{l^2-k^2})$
(2)	函数 $y = -kx - l\sqrt{(x-h)^2+r^2}$ $(r \geqslant 0)$; $x \in (-\infty, +\infty)$; 渐近线为 $y = -(k+l)x + lh$ $(x \to +\infty)$, $y = -(k-l)x - lh$ $(x \to -\infty)$	1) $k > l$	$y \in (-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)\downarrow$	无
		2) $k = l$	$y \in (-\infty, -kh)$	同上	无
		3) $k < l$	$y \in (-\infty, -kh - r\sqrt{l^2-k^2}]$	$(-\infty, h - \frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}]\uparrow$; $[h - \frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}, +\infty)\downarrow$	最大值、极大值点均为 $B(h - \frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}, -kh - r\sqrt{l^2-k^2})$;无最小值、极小值点

(3)	函数 $y=-kx+l\sqrt{(x+h)^2+r^2}$ $(r\geqslant 0)$; $x\in(-\infty,+\infty)$; 渐近线为 $y=-(k-l)x+lh$ $(x\to+\infty)$, $y=-(k+l)x-lh$ $(x\to-\infty)$	1) $k>l$	同(1)1)	$(-\infty,+\infty)\downarrow$	无
		2) $k=l$	同(1)2)	同上	无
		3) $k<l$	同(1)3)	$(-\infty,\frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}-h]\downarrow$; $[\frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}-h,+\infty)\uparrow$	无最大值、极大值点;最小值、极小值点均为 $A(\frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}-h,kh+r\sqrt{l^2-k^2})$
(4)	函数 $y=kx-l\sqrt{(x+h)^2+r^2}$ $(r\geqslant 0)$; $x\in(-\infty,+\infty)$; 渐近线为 $y=(k-l)x-lh$ $(x\to+\infty)$, $y=(k+l)x+lh$ $(x\to-\infty)$	1) $k>l$	同(2)1)	$(-\infty,+\infty)\uparrow$	无
		2) $k=l$	同(2)2)	同上	无
		3) $k<l$	同(2)3)	$(-\infty,\frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}-h]\uparrow$; $[\frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}-h,+\infty)\downarrow$	最大值、极大值点均为 $B(\frac{kr}{\sqrt{l^2-k^2}}-h,-kh-r\sqrt{l^2-k^2})$;无最小值、极小值点
(5)	函数 $y=kx+l\sqrt{(x-h)^2-r^2}$ $(r\geqslant 0)$; $x\in(-\infty,h-r]\cup[h+r,+\infty)$; 渐近线为 $y=(k+l)x-lh$ $(x\to+\infty)$, $y=(k-l)x+lh$ $(x\to-\infty)$	1) $k>l$	$y\in(-\infty,kh-r\sqrt{k^2-l^2})\cup[kh+kr,+\infty)$	$(-\infty,h-\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}}]\uparrow$; $[h-\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}},h-r]\downarrow$; $[h+r,+\infty)\uparrow$	无最值、极小值点;极大值点为 $B(h-\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}},kh-r\sqrt{k^2-l^2})$
		2) $k=l$	$y\in[kh-kr,kh)\cup[kh+kr,+\infty)$	$(-\infty,h-r]\downarrow$ $[h+r,+\infty)\uparrow$	无极值、最大值点;最小值点为 $C(h-r,kh-kr)$
		3) $k<l$	$y\in[kh-kr,+\infty)$	同上	同上
(6)	函数 $y=-kx-l\sqrt{(x-h)^2-r^2}$ $(r\geqslant 0)$; $x\in(-\infty,h-r]\cup[h+r,+\infty)$; 渐近线为 $y=-(k+l)x+lh$ $(x\to+\infty)$, $y=-(k-l)x-lh$ $(x\to-\infty)$	1) $k>l$	$(-\infty,-kh-kr]\cup[-kh+r\sqrt{k^2-l^2},+\infty)$	$(-\infty,h-\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}}]\downarrow$; $[h-\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}},h-r]\uparrow$; $[h+r,+\infty)\downarrow$	无最值、极大值点;极小值点为 $A(h-\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}},-kh+r\sqrt{k^2-l^2})$
		2) $k=l$	$(-\infty,-kh-kr]\cup(-kh,-kh+kr]$	$(-\infty,h-r]\uparrow$; $[h+r,+\infty)\downarrow$	无极值、最小值点;最大值点为 $C(h-r,-kh+kr)$
		3) $k<l$	$(-\infty,-kh+kr]$	同上	同上

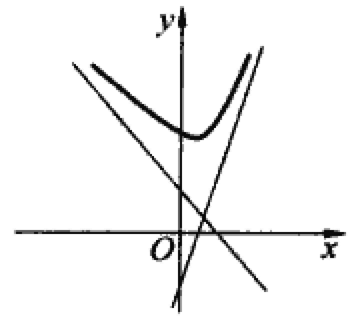
(7)	函数 $y=-kx+l\sqrt{(x+h)^2-r^2}$ $(r\geqslant 0)$; $x\in(-\infty,-h-r]\cup[-h+r,+\infty)$; 渐近线为 $y=-(k-l)x+lh$ $(x\to+\infty)$, $y=-(k+l)x-lh$ $(x\to-\infty)$	1) $k>l$	同(5)1)	$(-\infty,-h-r]\downarrow$; $[-h+r,-h+\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}}]\uparrow$; $[-h+\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}},+\infty)\downarrow$	无最值、极小值点;极大值点为 $B(-h+\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}},kh-r\sqrt{k^2-l^2})$
		2) $k=l$	同(5)2)	$(-\infty,-h-r]\downarrow$; $[-h+r,+\infty)\uparrow$	无极值、最大值点;最小值点为 $C(-h+r,kh-kr)$
		3) $k<l$	同(5)3)	同上	同上
(8)	函数 $y=kx-l\sqrt{(x+h)^2-r^2}$ $(r\geqslant 0)$; $x\in(-\infty,-h-r]\cup[-h+r,+\infty)$; 渐近线为 $y=(k-l)x-lh$ $(x\to+\infty)$, $y=(k+l)x+lh$ $(x\to-\infty)$	1) $k>l$	同(6)1)	$(-\infty,-h-r]\uparrow$; $[-h+r,-h+\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}}]\downarrow$; $[-h+\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}},+\infty)\uparrow$	无最值、极大值点;极小值点为 $A(-h+\frac{kr}{\sqrt{k^2-l^2}},-kh+r\sqrt{k^2-l^2})$
		2) $k=l$	同(6)2)	$(-\infty,-h-r]\uparrow$ $[-h+r,+\infty)\downarrow$	无极值、最小值点;最大值点为 $C(-h+r,-kh+kr)$
		3) $k<l$	同(6)3)	同上	同上
(9)	函数 $y=kx+l\sqrt{r^2-(x-h)^2}$ $(r>0)$; $x\in[h-r,h+r]$; 无渐近线	$y\in[kh-kr,kh+r\sqrt{k^2+l^2}]$		$[h-r,h+\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}}]\uparrow$ $[h+\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}},h+r]\downarrow$	无极小值点;极大值、最大值点均为 $B(h+\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}},kh+r\sqrt{k^2+l^2})$; 最小值点为 $C(h-r,kh-kr)$
(10)	函数 $y=-kx-l\sqrt{r^2-(x-h)^2}$ $(r>0)$; $x\in[h-r,h+r]$; 无渐近线	$y\in[-kh-r\sqrt{k^2+l^2},-kh+kr]$		$[h-r,h+\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}}]\downarrow$; $[h+\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}},h+r]\uparrow$	无极大值点;极小值、最小值点均为 $A(h+\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}},-kh-r\sqrt{k^2+l^2})$; 最大值点为 $C(h-r,-kh+kr)$
(11)	函数 $y=-kx+l\sqrt{r^2-(x+h)^2}$ $(r>0)$; $x\in[-h-r,-h+r]$; 无渐近线	同(9)		$[-h-r,-h-\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}}]\uparrow$; $[-h-\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}},-h+r]\downarrow$	无极小值点;极大、最大值点均为 $B(-h-\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}},kh+r\sqrt{k^2+l^2})$; 最小值点为 $C(-h+r,kh-kr)$
(12)	函数 $y=kx-l\sqrt{r^2-(x+h)^2}$ $(r>0)$; $x\in[-h-r,-h+r]$; 无渐近线	同(10)		$[-h-r,-h-\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}}]\downarrow$; $[-h-\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}},-h+r]\uparrow$	无极大值点;极小值、最小值点均为 $A(-h-\frac{kr}{\sqrt{k^2+l^2}},-kh-r\sqrt{k^2+l^2})$; 最大值点为 $C(-h+r,-kh+kr)$



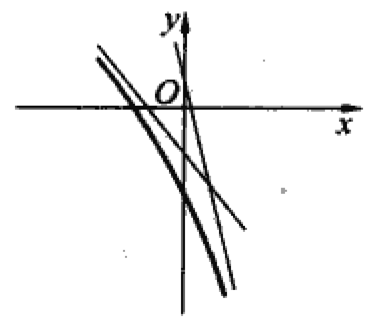
图(1)－1)



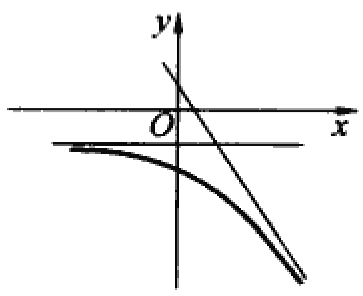
图(1)－2)



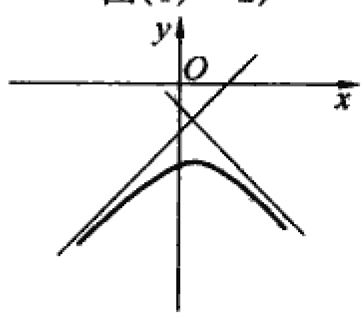
图(1)－3)



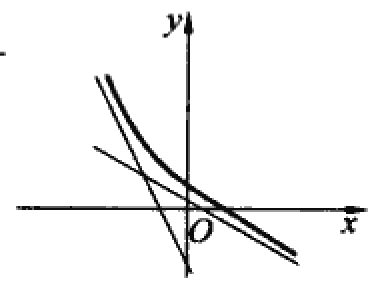
图(2)－1)



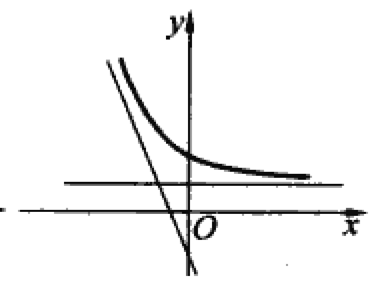
图(2)－2)



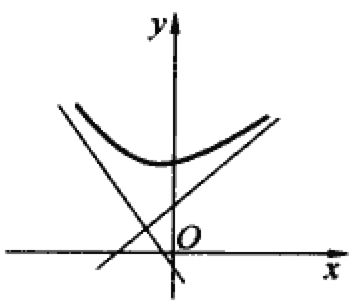
图(2)－3)



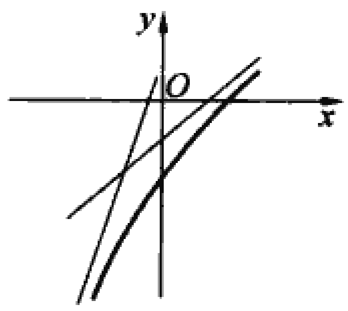
图(3)－1)



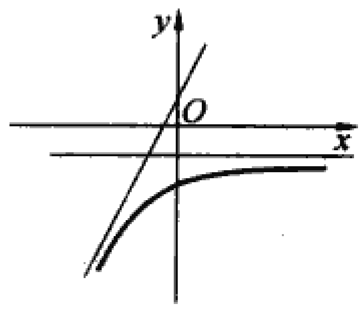
图(3)－2)



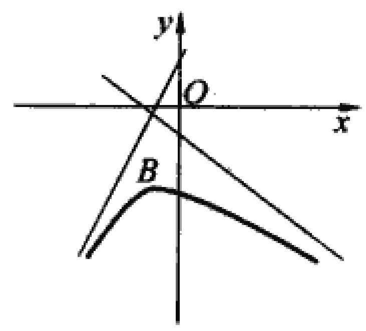
图(3)－3)



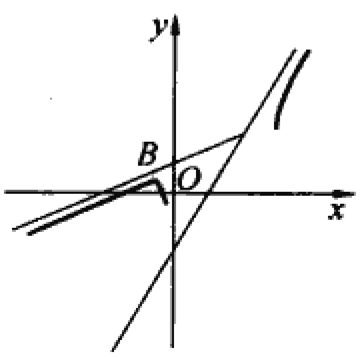
图(4)－1)



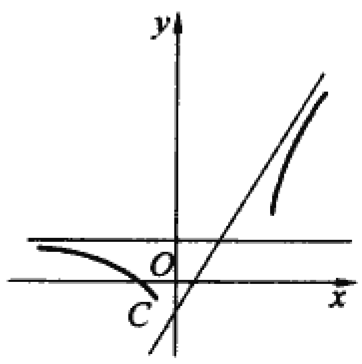
图(4)－2)



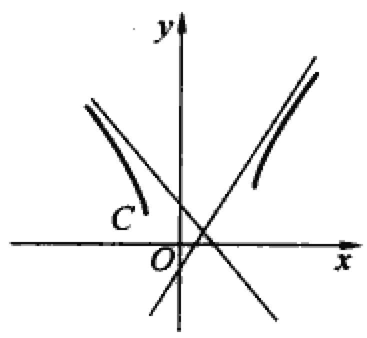
图(4)－3)



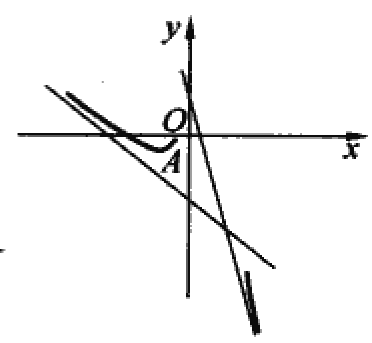
图(5)－1)



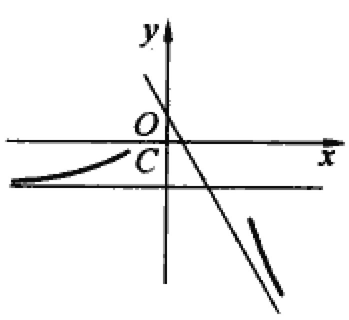
图(5)－2)



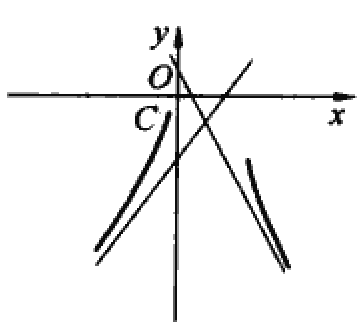
图(5)－3)



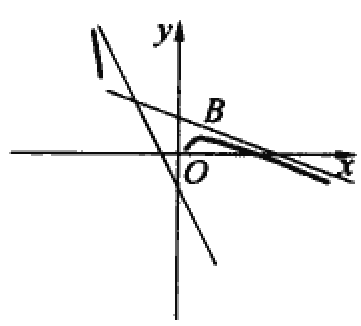
图(6)－1)



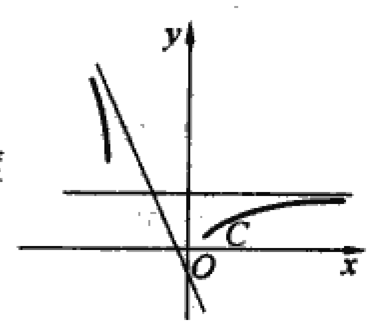
图(6)－2)



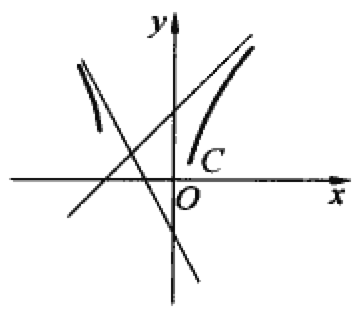
图(6)－3)



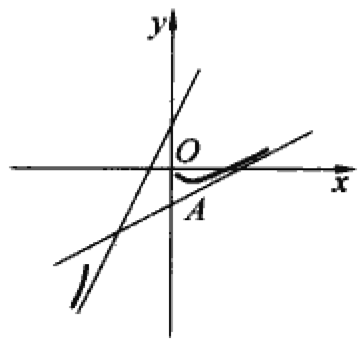
图(7)－1)



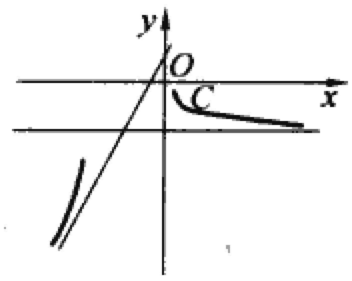
图(7)－2)



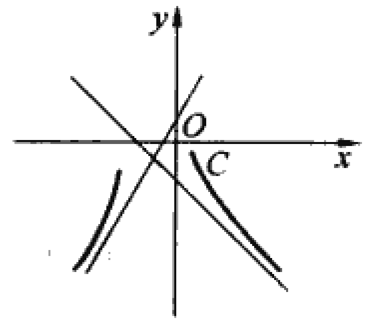
图(7) - 3



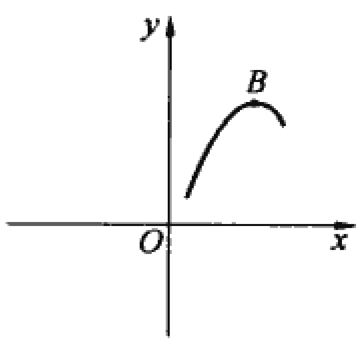
图(8) - 1



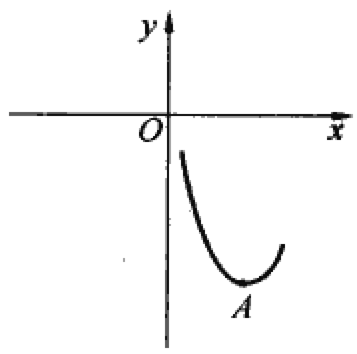
图(8) - 2



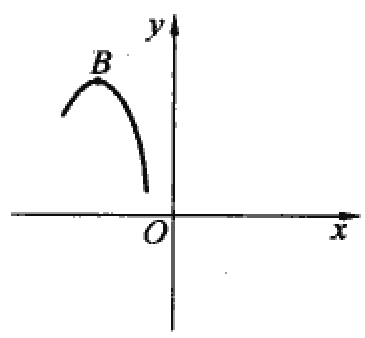
图(8) - 3



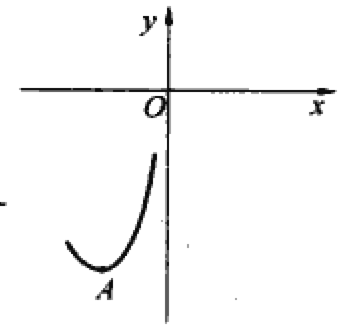
图(9)



图(10)



图(11)



图(12)

定理 2 的图

例 已知 $s \geqslant 0, 0 \leqslant p \leqslant q$,求函数 $y = x + \sqrt{(p+q-2x)^2 + s^2}$ 在 $[0, p]$ 上的最小值.

(这是文献[1]定理 1 的证明中需要解决的问题)

解 $y = x + 2\sqrt{(x - \frac{p+q}{2})^2 + (\frac{s}{2})^2}$

由定理 2(1)3) 可得:

函数 y 有最小值且最小值只可能在 $x = 0, p, \frac{p+q}{2} - \frac{s}{2\sqrt{3}}$ 时取得,所以

(1) 当 $s < \sqrt{3}(q-p)$ 时:当且仅当 $x = p$ 时,y 取最小值 $p + \sqrt{(p-q)^2 + s^2}$;

(2) 当 $\sqrt{3}(q-p) \leqslant s \leqslant \sqrt{3}(p+q)$ 时:当且仅当 $x = \frac{p+q}{2} - \frac{s}{2\sqrt{3}}$ 时,y 取最小值 $\frac{1}{2}(p + q + \sqrt{3}s)$;

(3) 当 $s > \sqrt{3}(p+q)$ 时:当且仅当 $x = 0$ 时,y 取最小值 $\sqrt{(p+q)^2 + s^2}$.

参考文献

[1] 张延卫.对一道几何极值问题的探讨[J].数学通讯,2000(1):29-30.

函数 $f(x)=\sqrt{(x-a)^2+b^2}\pm\sqrt{(x-p)^2+q^2}$ 的单调区间及值域

引理 1 若点 p 在 $\triangle ABQ$ 的内部(图 1),或点 P 在 $\triangle ABQ$ 的边 BQ 上(但 P,Q 不重合,见图 2),则 $PA+PB<QA+QB$.

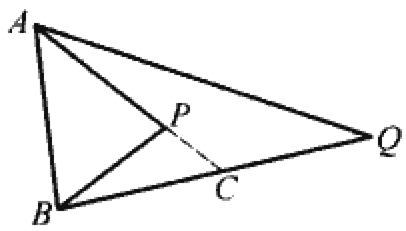


图 1

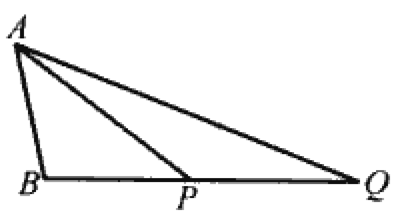


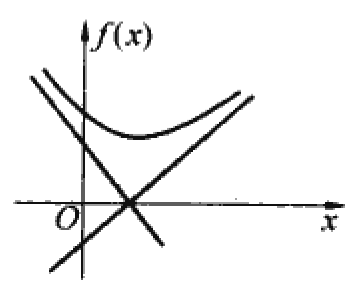
图 2

定理 1 对于函数 $f(x)=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-p)^2+q^2}$ $(b\geqslant 0,q\geqslant 0,b,q$ 不同时为 0),下表成立(图在下方):

定义域	渐近线	值 域	单调区间	最(极)值点
$(-\infty,+\infty)$	$f(x)=2x-a-p$ $(x\to+\infty)$, $f(x)=-2x+a+p$ $(x\to-\infty)$	$[\sqrt{(a-p)^2+(b+q)^2},+\infty)$	$(-\infty,\frac{aq+bp}{b+q}]\downarrow$; $[\frac{aq+bp}{b+q},+\infty)\uparrow$	无最大值、极大值点;最小值、极小值点均为 $(\frac{aq+bp}{b+q},\sqrt{(a-p)^2+(b+q)^2})$

证明 只证"单调区间"栏,并且只证:

若 $\frac{aq+bp}{b+q}\leqslant x_1<x_2$,则 $f(x_1)<f(x_2)$.



定理 1 图

在直角坐标系中,设 $A(a,b),B(p,-q),M(\frac{aq+bp}{b+q},0),c(x,0),P(x_1,0),Q(x_2,0)$.

由两点间距离公式,可得 $f(x)=CA+CB$.

先证 $q>0$ 时成立:由图 3 及引理 1,得 $PA+PB<QA+QB$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

再证 $q=0$ 时成立:由图 4 及引理 1 可证.

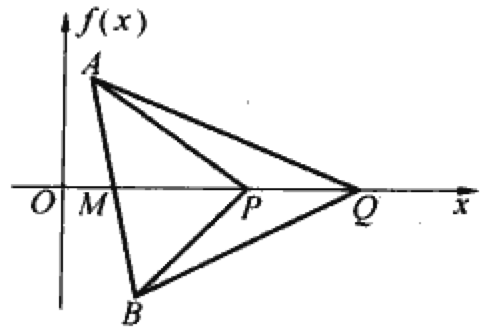


图 3

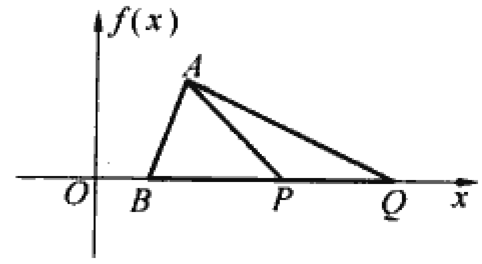


图 4

引理 2 (1) 在凸四边形 $ABPQ$ 中(图 5),有 $PA - PB > QA - QB$;

(2) 在 $\triangle ABQ$ 中,若 P 是边 BQ 上的点(但 P,Q 不重合,见图 6),则 $PA - PB > QA - QB$.

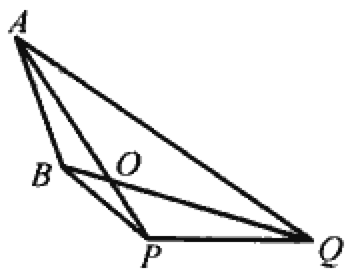


图 5

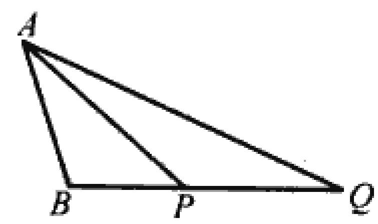
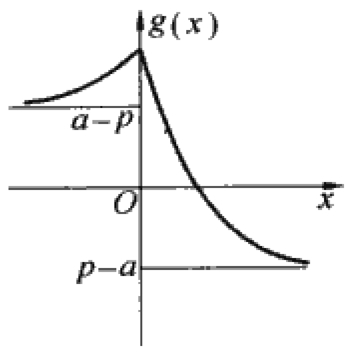


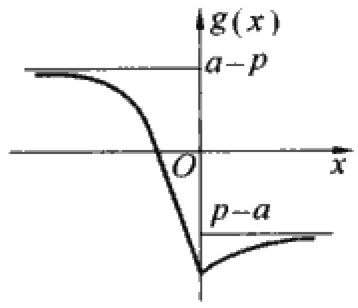
图 6

定理 2 对于函数 $g(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} - \sqrt{(x-p)^2 + q^2}$ ($b \geqslant 0$, $q \geqslant 0$; b,q 不同时为 0),下表成立(图在表下方):

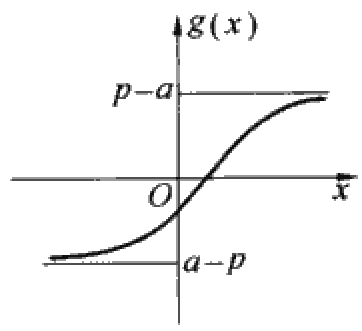
个次	条件	定义域	渐近线	值　域	单调区间	最(极)值点
(1)	$b > q \geqslant 0$	$(-\infty, +\infty)$	$g(x) = p - a$ $(x \to +\infty)$, $g(x) = a - p$ $(x \to -\infty)$	$(-\|p-a\|, \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2}]$	$(-\infty, \frac{bp-aq}{b-q}]\uparrow$; $[\frac{bp-aq}{b-q}, +\infty)\downarrow$	无最小值、极小值点;最大值、极大值点均为 $(\frac{bp-aq}{b-q}, \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2})$
(2)	$0 \leqslant b < q$	$(-\infty, +\infty)$	同上	$[-\sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2}, \|p-a\|)$	$(-\infty, \frac{bp-aq}{b-q}]\downarrow$; $[\frac{bp-aq}{b-q}, +\infty)\uparrow$	无最大值、极大值点;最小值、极小值点均为 $(\frac{bp-aq}{b-q}, -\sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2})$
(3)	$b = q \neq 0$ 且 $a < p$	$(-\infty, +\infty)$	同上	$(a-p, p-a)$	$(-\infty, +\infty)\uparrow$	无
(4)	$b = q \neq 0$ 且 $a > p$	$(-\infty, +\infty)$	同上	$(p-a, a-p)$	$(-\infty, +\infty)\downarrow$	无



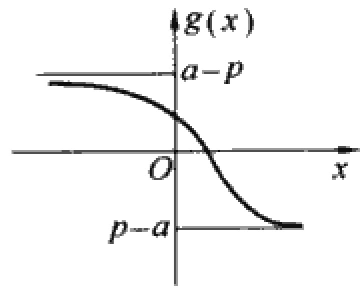
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)

定理 2 图

证明 只证(1),(3) 中的"单调区间"栏.

(1) 须证:若$\frac{bp-aq}{b-q} \leqslant x_1 < x_2$,则 $g(x_1) > g(x_2)$.

在平面直角坐标系中,设 $A(a,b)$,$B(p,q)$,$M\left(\frac{bp-aq}{b-q},0\right)$,$C(x,0)$,$P(x_1,0)$,$Q(x_2,0)$,有 $g(x) = CA - CB$.

由图 7 及引理2(1) 可证 $q > 0$时成立,由图 8 及引理 2(2) 可证 $q = 0$时成立.

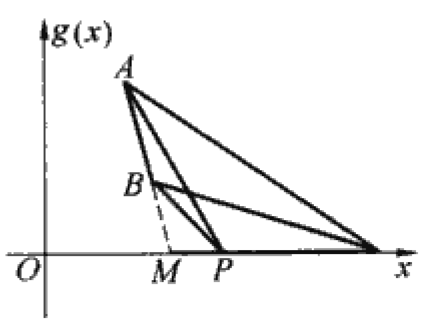


图 7

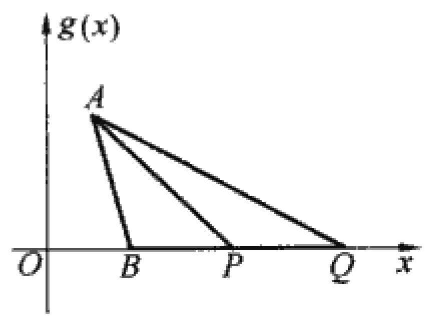


图 8

(3) 须证:若 $x_1 < x_2$,则 $g(x_1) < g(x_2)$.

在平面直角坐标系中,设 $A(a,b)$,$B(p,b)$,$C(x,0)$,$P(x_1,0)$,$Q(x_2,0)$,有 $g(x) = CA - CB$.由图 9 及引理 2(1) 可证结论成立.

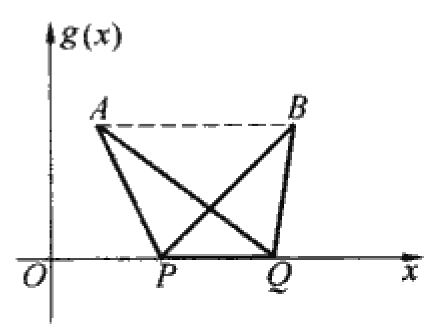


图 9

由"单调区间"及"渐近线"栏,可得"值域"栏.

例 求函数 $y = \sqrt{x^2+6x+73} - \sqrt{x^2-4x+8}$ 的极值.

解 原函数即 $y = \sqrt{(x+3)^2+8^2} - \sqrt{(x-2)^2+2^2}$

在定理 2(1) 中令 $a = -3$,$b = 8$,$p = q = 2$,可得当且仅当 $x = \frac{11}{3}$ 时 y 取到极大值,且极大值为$\sqrt{61}$;y 无极小值.

此例题即文献[1]的例 4(1),文献[1]的答案有误.

参考文献

[1] 冯光庭. 对几类无理函数极值问题的探讨[J]. 中学数学,2001(6):16-17.

方程 $a^x = \log_a x$ 解的个数及一类新型极限

在没有特别说明时，下文中方程的解均指实数解.

定义 1　本文中记 $g(x) = x^{\frac{x^{\frac{x}{x-1}}}{1-x}}$.

1　方程 $a^x = \log_a x$ 解的个数

定理 1　(1) 当 $0 < a < e^{-e} = 0.065\,988\,0\cdots$ 时，方程 $a^x = \log_a x$ 有且仅有三个解：一个是 $a^x = x$ 的唯一解 x_{12}，另两个是 $x_{11} = k^{\frac{1}{1-k}}$，$x_{13} = k^{\frac{k}{1-k}}$（其中 $a = g(k)$，$0 < k < 1$），且 $x_{11}, x_{12} \in (0, \frac{1}{e})$（$\frac{1}{e} = 0.367\,879\,4\cdots$），$x_{13} \in (\frac{1}{e}, 1)$（图 1）.

(2) 当 $e^{-e} \leqslant a < 1$ 时，$a^x = \log_a x$ 有唯一解 x_2，x_2 也是 $a^x = x$ 的唯一解，且 $x_2 \in [\frac{1}{e}, 1)$（图 2）. 特别的，当 $a = e^{-e}$ 时，$x_2 = \frac{1}{e}$.

(3) 当 $1 < a < e^{\frac{1}{e}} = 1.444\,667\,8\cdots$ 时，$a^x = \log_a x$ 有且仅有两个解 x_{31}, x_{32}，且 x_{31}, x_{32} 也是 $a^x = x$ 仅有的两个解，$x_{31} \in (a, e)$，$x_{32} \in (e, +\infty)$（图 3）.

(4) 当 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时，$a^x = \log_a x$ 有唯一解 $x_4 = e$（图 4），$x_4 = e$ 也是 $a^x = x$ 的唯一解.

(5) 当 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时，$a^x = \log_a x$ 无解（图 5）.

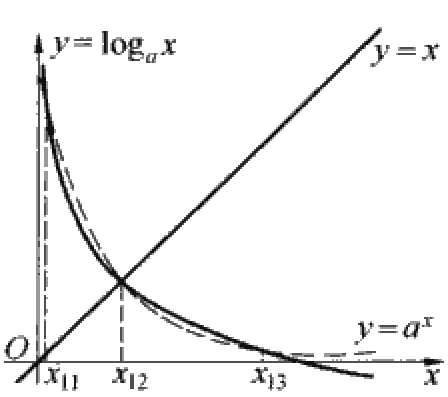


图 1

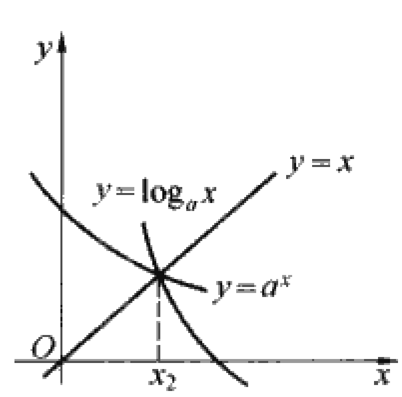


图 2

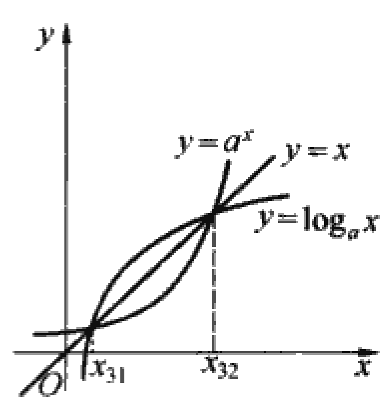


图 3

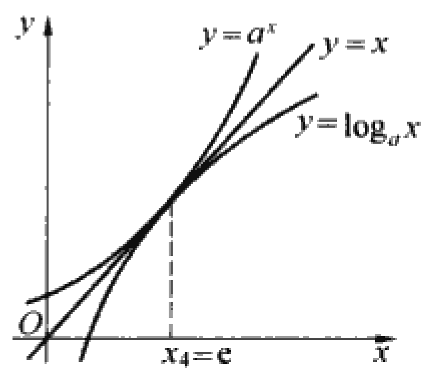


图 4

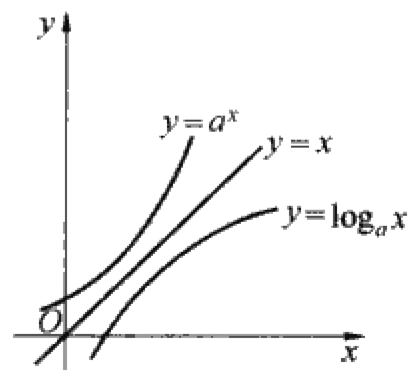


图 5

为证明定理 1,先给出 11 条引理.

引理 1[1] 若 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$,则

(1) 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$f(x)$ 递增;当 $x>\mathrm{e}$ 时,$f(x)$ 递减.

(2) 当且仅当 $x=\mathrm{e}$ 时,$f(x)$ 取到最大值,且最大值是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$.

引理 2[1] (1) 当 $0<a<1$ 时,方程 $a^x=x$ 有唯一解,且解 $x\in(0,\mathrm{e})$(从而得到解 $x=a^x<a^0=1$,所以解 $x\in(0,1)$).

(2) 当 $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时,$a^x=x$ 有且仅有两个解 x_1,x_2,且 $x_1\in(0,\mathrm{e})$, $x_2\in(\mathrm{e},+\infty)$.

(又由 $a>1$,得 $x=a^x>0$, $x=a^x>a^0=1$, $x=a^x>a^1$,所以 $x_1\in(a,\mathrm{e})$.)

(3) 当 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时,$a^x=x$ 有唯一解,且解 $x=\mathrm{e}$.

(4) 当 $a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时,$a^x=x$ 无解.

引理 3[2] 增函数与其反函数图象的交点在直线 $y=x$ 上.

引理 4 设 $y=x^{\frac{x}{x-1}}(0<x<1)$,则 $y'(1-x)=x^{\frac{x}{x-1}}\cdot\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}$.

引理 5 当 $0<x<1$ 时,$g'(x)=\dfrac{g(x)\cdot x^{\frac{1}{x-1}}}{(1-x)^3}(1-x+\sqrt{x}\ln x)(1-x-\sqrt{x}\ln x)$.

引理 6 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数.

证明 设 $f(x)=2-2\sqrt{x}+\ln x(0<x<1)$,有 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

由 $0<x<1$,得 $0<x<\sqrt{x}$,所以 $f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数,$f(x)<f(1)=0$,即

$$2-2\sqrt{x}+\ln x<0(0<x<1) \quad ①$$

又设 $h(x)=1-x+\sqrt{x}\ln x(0<x<1)$,有

$$h'(x)=\frac{2-2\sqrt{x}+\ln x}{2\sqrt{x}}$$

由①得 $h'(x)<0$,所以 $h(x)>h(1)=0$,即

$$1-x+\sqrt{x}\ln x>0(0<x<1) \quad ②$$

又在引理5中,有

$$g(x)>0,x^{\frac{1}{x-1}}>0,(1-x)^3>0 \quad ③$$

当 $0<x<1$ 时,有 $1-x>0,\sqrt{x}\ln x<0$,所以

$$1-x-\sqrt{x}\ln x>0(0<x<1) \quad ④$$

由②,③,④,得 $g'(x)>0$,即引理6成立.

引理7 (1) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=e^{-e}$.

证明 (1) 只需证 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{x}{x-1}}=1$,即

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x)^{\frac{1}{x-1}}=1,\text{又只需证}\lim_{x\to 0^+}x^x=1:$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0^+}x}=e^0=1$$

(2) 由 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^{-1}}{1}=1$

得 $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{\frac{x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^-}x\cdot\frac{\ln x}{x-1}}=e^1=e$.

所以 $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=e^{\lim\limits_{x\to 1^-}x\left(x^{\frac{x}{x-1}}\cdot\frac{\ln x}{x-1}\right)}=e^{-e}$.

由引理6,7,得

引理8 $\{g(x)\mid 0<x<1\}=(0,e^{-e})$.

引理9 (1) 当 $0<a<e^{-e}$ 时,方程 $a^x=x$ 有唯一解,且解 $x\in(0,\frac{1}{e})$.

(2) 当 $e^{-e}\leqslant a<1$ 时,$a^x=x$ 有唯一解,且解 $x\in[\frac{1}{e},1)$.

证明 (1) 由引理2(1)知,方程 $a^x=x$ 有唯一解,且解 $x\in(0,1)$.

又方程 $a^x=x$ 的解即 $x^{\frac{1}{x}}=a$ 的解,由引理1(1)可证解 $x\notin[\frac{1}{e},1)$,否则 $e^{-e}\leqslant a<1$,所以(1)成立.

(2) 同(1)可证.

引理 10 $\{k^{\frac{1}{1-k}} \mid 0 < k < 1\} = (0, \frac{1}{e})$.

证明 设 $h(k) = 1 - k + k\ln k (0 < k < 1)$,

有 $h'(k) = \ln k < 0$,所以 $h(k) > h(1) = 0$.

又设 $f(k) = k^{\frac{1}{1-k}} (0 < k < 1)$,有

$f'(k) = \frac{f(k)h(k)}{k(1-k)^2} > 0$,$f(k)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数.

又 $f(0) = 0$, $\lim\limits_{k \to 1^-} f(k) = e^{\lim\limits_{k\to 1^-} \frac{\ln k}{1-k}} = e^{\lim\limits_{k\to 1^-} \frac{k^{-1}}{-1}} = \frac{1}{e}$,所以引理 10 成立.

引理 11 $\{k^{\frac{k}{1-k}} \mid 0 < k < 1\} = (\frac{1}{e}, 1)$.

证明 设 $f(k) = k^{\frac{k}{1-k}} (0 < k < 1)$,用导数可证 $f(k)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数.

又由引理 7 的证明,可得 $\lim\limits_{k \to 0^+} f(k) = 1$, $\lim\limits_{k \to 1^-} f(k) = \frac{1}{e}$. 所以引理 11 成立.

定理 1 的证明

当 $a > 1$ 时,$y = a^x$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是增函数,由引理 3 知,方程 $a^x = \log_a x$ 的解就是 $a^x = x$ 的解.

再由引理 2(2),(3),(4) 知定理 1(3),(4),(5) 成立. 下面再证定理 1(1),(2) 成立.

显然,方程 $a^x = \log_a x (0 < a < 1)$ 的解 $x \in (0,1)$,下面求此方程在 $(0,1)$ 上的解.

有 $a^x = x^x \log_x a$.

设 $x\log_x a = k$,由 $a, x \in (0,1)$ 得 $k > 0$,所以 $a^x = x^k$, $a = x^{\frac{k}{x}}$.

方程 $a^x = \log_a x$, $a^{a^x} = x$, $(x^{\frac{k}{x}})^{x^k} = x$,

$$x^{kx^{k-1}} = x, x^{k-1} = \frac{1}{k}$$

得 $k = 1$,或 $x = k^{\frac{1}{1-k}} (k > 0 \text{ 且 } k \neq 1)$.

即 $a^x = x$,或 $x = k^{\frac{1}{1-k}} (k > 0$,且 $k \neq 1$,此时 $a = g(k)$——见定义 1).

可证 $k > 0$ 且 $k \neq 1$ 时,$g(k) = g(\frac{1}{k})$.

得 $a^x = x$, 或 $x = k^{\frac{1}{1-k}} (0 < k < 1$, 此时 $a = g(k))$, 或 $x = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{k}}} (\frac{1}{k} > 1$,此时 $a = g(\frac{1}{k}))$. 这里第三种情形即 $x = k^{\frac{k}{1-k}} (0 < k < 1$,此时 $a = g(k))$.

再由引理 8 ~ 11,可得定理 1(1),(2) 成立.

推论 1 (1) 函数 $y=(\frac{1}{16})^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ 图象交点的坐标分别是 $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$,$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$,$(0.364\,2\cdots,0.364\,2\cdots)$.

(2) 函数 $y=(\frac{1}{4})^x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 图象交点的坐标是 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

(3) 若 $a=n^{-n}$($n>\mathrm{e}$,可证 $f(x)=x^x$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上是增函数,所以此时 $0<n^{-n}<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$),则函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象有且仅有三个交点,这三个交点的坐标分别是 $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$,$(k^{\frac{1}{1-k}},a^{k^{\frac{1}{1-k}}})$,$(k^{\frac{k}{1-k}},a^{k^{\frac{k}{1-k}}})$(其中 $k=g^{-1}(n^{-n})$,因为 $0<n^{-n}<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$,$g(x)$ 是 $(0,1)$ 上的增函数,所以 $g^{-1}(n^{-n})$ 唯一存在).

推论 2 当 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\leqslant a<1$ 或 $a>1$ 时,方程 $a^x=\log_a x$ 与 $a^x=x$ 同解.

2 一类新型极限

先看杨之先生摘编的文献[3]:

引理 12 记 $a=a^{(1)},a^a=a^{(2)},\cdots,a^{a^{(n)}}=a^{(n+1)}$($n\in\mathbf{N}^*$,下同),则方程 $a^x=\log_a x$ 的解 x_0 满足:

(1) 当 $0<a<1$ 时,$x_0\in(a^{(2n-1)},a^{(2n)})$;

(2) 当 $a>1$ 时,$x_0\in(a^{(2n-1)},+\infty)$.

证明 (1) 当 $a\in(0,1)$ 时,由 $\log_a x=a^x$,得 $x=\log_a(\log_a x)$.

由于 $\log_a x=a^x>0$,知 $0<x<1$,

即 $0<\log_a(\log_a x)<1$,于是 $a<\log_a x<1$,

得 $a<x<a^a$,即 $a^{(1)}<x<a^{(2)}$.

进而由 $a^{(1)}<\log_a(\log_a x)<a^{(2)}$ 得,$a^{(3)}<x<a^{(4)}$.

继续下去,即得欲证.

(2) 当 $a\in(1,+\infty)$ 时,由于 $x>0$,即 $\log_a x=a^x>1$,进而有 $x>a$,$x=\log_a(\log_a x)>a$,$x>a^{(3)},\cdots,x>a^{(2n+1)}$.

(编者按:由于 $a>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty$,因此结论(2) 表明方程无解.)

引理 12 的结论及其证明均正确,但以上"编者按"有误:

当 $a>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty$ 正确.而此处显然有印刷错误,应为"$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}=+\infty$".当 $a>1$ 时,方程 $a^x=\log_a x$ 解的个数可见定理 1.关于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}$ 的正确结论为

定理 2 以下 x_{11},x_{13},x_2,x_{31} 的意义同定理 1.

(1) 当 $0<a<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ 时,$0<\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)}=x_{11}<\frac{1}{\mathrm{e}}<x_{13}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n)}<1$(由

此知$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)}$不存在).

(2) 当$e^{-e} \leqslant a < 1$时,$\frac{1}{e} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = x_2 < 1$.特别的,$\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-e})^{(n)} = \frac{1}{e}$.

(3) 当$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$时,$a < \lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = x_{31} < e$.

(4) 当$a = e^{\frac{1}{e}}$时,$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = e$.

(5) 当$a > e^{\frac{1}{e}}$时,$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = +\infty$.

为证明定理2,先给出3条引理.

引理13　(1) 当$0 < a < 1$时,$\{a^{(2n-1)}\}$是严格递增数列,$\{a^{(2n)}\}$是严格递减数列.

(2) 当$a > 1$时,$\{a^{(n)}\}$是严格递增数列.

(均可用数学归纳法及指数函数的单调性证出.)

引理14　方程$a^x = \log_a x$的解x_0满足(当以下极限存在时):

(1) 当$0 < a < 1$时,$x_0 \in [\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)}, \lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n)}]$.

(2) 当$a > 1$时,$x_0 \in [\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)}, +\infty)$.

(由引理12,13立得)

引理15　(1) 当$0 < a < 1$时,$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)}$,$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n)}$均存在.

(2) 当$1 < a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$时,$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)}$存在.

(3) 当$a > e^{\frac{1}{e}}$时,$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = +\infty$.

证明　(1) 因为$0 < a < 1$时,$a^{(2n-1)} < 1$,$a^{(2n)} > 0$,再由引理13(1)及"实数的连续性公理:单调有界数列必有极限"知(1)成立.

(2) 由引理13(2),只需证明$\{a^{(n)}\}$是有界数列.下证:

当$1 < a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$时,$a^{(n)} < e$($n = 1$时成立,下证$n \geqslant 2$时成立).

用数学归纳法可证:若$1 \leqslant a < b$,则$a^{(n)} < b^{(n)}$.所以:

$$a^{(n)} \leqslant (e^{\frac{1}{e}})^{(n)} = (e^{\frac{1}{e}})^{(e^{\frac{1}{e}})^{\cdots (e^{\frac{1}{e}})^{(e^{\frac{1}{e}})}}} \quad (n\text{个}e^{\frac{1}{e}}) < (e^{\frac{1}{e}})^{(e^{\frac{1}{e}})^{\cdots (e^{\frac{1}{e}})^{(e^{1})}}}$$

$(n-1\text{个}e^{\frac{1}{e}}) = e$

(3) 由引理13(2),只需证明$\{a^{(n)}\}$是无界数列.

假设$\{a^{(n)}\}$是有界数列,则$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = A < +\infty$.

由$a^{a^{(n)}} = a^{(n+1)}$得$\lim\limits_{n\to\infty} a^{a^{(n)}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{(n+1)}$,

即$a^A = A$,这与定理1(5)及推论2矛盾!所以(3)成立.

定理 2 的证明

由定理 1,引理 14,15 可证定理 2 成立.细加说明如下:

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)} = A$,又$\lim\limits_{n\to\infty} a^{a^{a^{(2n-1)}}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n+1)}$

得 $a^{a^A} = A, a^A = \log_a A$.

又设$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n)} = B$,得 $a^B = \log_a B$.

所以 $A, B \in \{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$.

由定理 1(1) 及引理 14(1) 知 $x_{11}, x_{12}, x_{13} \in [A, B]$,又 $x_{11} < x_{12} < x_{13}$,所以 $A = x_{11}, B = x_{13}$.

(2) 只需证明$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n)} = x_2$,同上可证.

(3) 因为$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)}$ 存在,所以$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)}$.

只需证$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)} = x_{31}$.

设$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)} = A$,可得 $a^A = \log_a A$.

由定理 1(3) 得 $A = x_{31}$ 或 $x_{32}(x_{31} < x_{32})$.

又由引理 14(2) 知,$x_{31} \in [A, +\infty)$,所以 $A = x_{31}$.

(4) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = A$,可得 $a^A = A$,又由定理 1(4) 知 $A = \mathrm{e}$.

(5) 即引理 15(3).

推论 3 当 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leqslant a \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = A$,其中 A 是方程$a^x = x$ 满足$x \leqslant \mathrm{e}$ 的解.

推论 4 (1) 当$0 < s < \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}(s^{-s})^{(n)} = x_{31}$,其中 x_{31} 是方程$(s^{-s})^x = x\left(x \neq \frac{1}{s}\right)$ 的解.

(2) 当$\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant s \leqslant \mathrm{e}$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}(s^{-s})^{(n)} = \frac{1}{s}$.

(3) 当$s > \mathrm{e}$时,$0 < \lim\limits_{n\to\infty}(s^{-s})^{(2n-1)} = x_{11} < \frac{1}{s} < \frac{1}{\mathrm{e}} < x_{13} = \lim\limits_{n\to\infty}(s^{-s})^{(2n)} < 1$,其中 x_{11}, x_{13} 是方程$(s^{-s})^x = \log_{s^{-s}} x$ 满足$x < \frac{1}{s}$ 及$x > \frac{1}{s}$ 的解.

为证明推论 4,先给出两条引理.

引理 16 对于函数 $y = x^{-x}(x > 0)$,有

(1) $y' = -x^{-x}(1 + \ln x)$.

(2) y 在$\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ 上是增函数,在$\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right)$ 上是减函数.

(3) 当且仅当 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$y_{\max} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

(4) $\lim_{x\to 0^+} x^{-x} = 1, \lim_{x\to +\infty} x^{-x} = 0.$

(5) 函数 $y = x^{-x}(x > 0)$ 的图象如图 6.

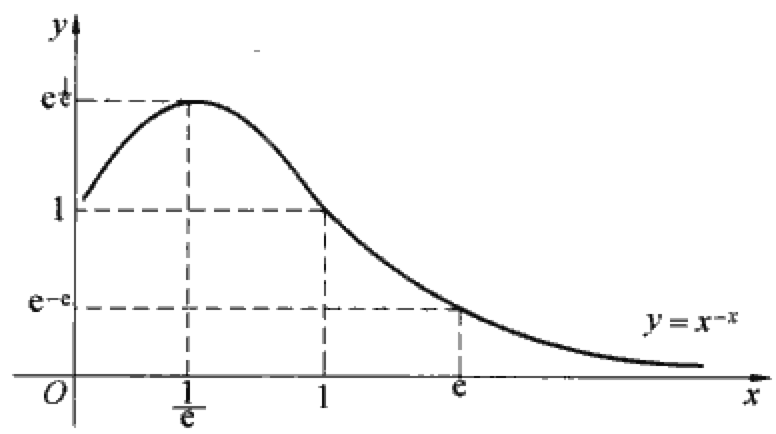


图 6

参见图 6,还可证出

引理 17 若 $s > 0$,则

(1)$0 < s^{-s} < e^{-e} \Leftrightarrow s > e.$

(2)$e^{-e} \leqslant s^{-s} < 1 \Leftrightarrow 1 < s \leqslant e.$

(3)$1 < s^{-s} < e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow 0 < s < \frac{1}{e}$ 或 $\frac{1}{e} < s < 1.$

(4)$s^{-s} < e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow s = \frac{1}{e}.$

(5)$s^{-s} \leqslant e^{\frac{1}{e}}.$

推论 4 的证明 注意到方程 $(s^{-s})^x = x(s > 0)$ 有一解 $x = \frac{1}{s}$. 再由定理 2,推论 3 及引理 17 可证出推论 4.

3 其他问题

问题 1 求出关于 a,x 的方程 $a^x = x(a > 0, a \neq 1)$ 的所有有理解.

猜想 1 问题 1 的答案是 $(a,x) = (n^{-n}, \frac{1}{n})(n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 2)$.

问题 2 求出关于 a,x 的方程 $a^{a^x} = x(a > 0, a \neq 1, a^x \neq x)$ 的所有有理解.

猜想 2 问题 2 的答案是 $(a,x) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{16}, \frac{1}{2})$.

问题 3 当 $n > e$ 时,求出 $g^{-1}(n^{-n})$ 的表达式($g(x)$ 见定义 1).

猜想 3 当 $n > e, n \in \mathbf{N}^*$ 时,$g^{-1}(n^{-n}) \notin \mathbf{Q}$.

定义 2 记 $f_1(x) = a^x(a > 0, a \neq 1), f_{n+1}(x) = a^{f_n(x)}(n \in \mathbf{N}^*)$.

问题 4 对于已知的 n,求出关于 x 的方程 $f_n(x) = x(n \in \mathbf{N}^*)$ 的所有解及其个数 $I_n(a)$.

定理 3　当 $a>1$ 时,关于 x 的方程 $f_n(x)=x(n\in\mathbf{N}^*)$ 的解就是关于 x 的方程 $a^x=x$ 的解.

证明　由文献[3]第 97 页定理立得.

问题 5　对于已知的 $n\geqslant 2$,求出 $I_n(a)=I_1(a)$ 的充要条件.

问题 6　求出关于 a,x 的方程 $f_n(x)=x(n\in\mathbf{N}^*)$ 的所有有理解.

猜想 4　问题 6 有 $(\frac{1}{16},\frac{1}{4}),(\frac{1}{16},\frac{1}{2}),(n^{-n},\frac{1}{n})(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2))$ 之外的解 (a,x).

问题 7　当 $0<a<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ 时,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n)}$ 何时为有理数,无理数,超越数?

问题 8　当 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}<a<1,1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}$ 何时为有理数,无理数,超越数?

猜想 5　问题 7 中的两个极限均可取到 $(0,1)$ 中的所有实数.

猜想 6　问题 8 中两种情形的极限分别可取到 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1),(1,\mathrm{e})$ 中的所有实数.

问题 9　请寻找比引理 2 更精确的结论. 比如,当 $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时,方程 $a^x=\log_a x$ 的解 $x_0\in(a^{(2n-1)},+\infty)$ 中的"$+\infty$"应当可以改进为有理数.

问题 10　由定理 2(3) 能否说是 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ a\to 1^+}}a^{(n)}=1$.

问题 11　如何求出推论 4 中的 x_{11},x_{13},x_{31}(s 是已知数).

由图 6 知,$\{s^{-s}\mid s>0\}=(0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$. 若解决了问题 5,由推论 4 就求出了定理 2 中的所有极限.

问题 12　用引理 12 的证明方法研究问题 4 中方程的解的范围.

问题 13　结合图 1 ~ 5 研究每个图中三个图象里 x,y 之间的不等式.

问题 14　用直线 $l:x+y=k$ 截图 3,图 5 中 $y=a^x,y=\log_a x$ 的图象,在图 3 中 $[x_{31},x_{32}]$ 的部分求出 k,使在 l 上截得的线段最长,在图 5 中使在 l 上截得的线段最短.

参考文献

[1] 周华生. 讨论 $a^x=x$ 根的另一途径[J]. 数学通报,2001(10):39.

[2] 李建武. 关于方程 $a^x=\log_a x$ 解的范围[J]. 中学数学教学参考,2002(12):59.

[3] 佩捷. 高中代数(中学数学解题方法 500 招丛书)[M]. 哈尔滨:哈尔滨出版社,1994.

三次方程根的情况的简明结论①

由“实系数一元 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次方程的虚根成对出现”知,实系数一元三次方程的根有且只有两种情形:

(1) 有三个实根;

(2) 有一个实根和两个共轭虚根.

本文用导数研究这两种情况在何时出现.

先看首项系数是正数的一元三次方程

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a>0,b,c,d\in\mathbf{R})$$

的根的情形.

得
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

方程 $f'(x)=0$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$.

(1) 当 $\Delta=0$ 时.

可设 $f'(x)=3a(x-h)^2$,从而又得 $f(x)=a(x-h)^3+k$(k 是常数).

当 $k=0$ 时,方程 $f(x)=0$ 有三个相等的实根;当 $k\neq0$,方程 $f(x)=0$ 有一个实根和两个共轭虚根.

(2) 当 $\Delta<0$ 时.

得 $x\in\mathbf{R}$ 时均有 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,此时 $f(x)$ 的图象如图 1 所示,又 $f(-\infty)=-\infty$,$f(+\infty)=+\infty$,得方程 $f(x)=0$ 的实根 α 是一重根或三重根(绝不会是二重根).若是三重根,则

$$f(x)=a(x-\alpha)^3$$

此时得方程 $f'(x)=3a(x-\alpha)^2=0$ 的判别式 $\Delta=0$,与 $\Delta<0$ 矛盾!所以此时方程 $f(x)=0$ 有一个实根和两个共轭虚根.

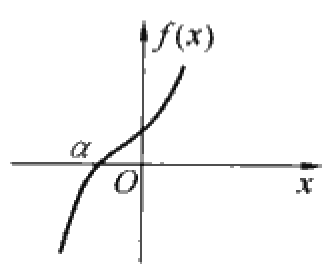


图 1

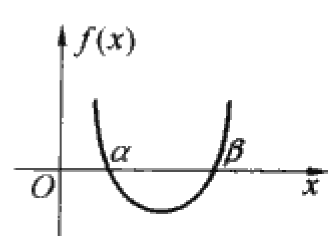


图 2

① 原载于《中学数学》(2007 年第 10 期).

(3) 当 $\Delta > 0$ 时.

设 $f'(x) = 0$ 的两个实根为 $\alpha,\beta(\alpha < \beta)$,此时 $f'(x)$ 的图象如图 2 所示,易知 $f(\alpha),f(\beta)$ 分别是 $f(x)$ 的极大值,极小值. 再由 $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$ 及 $f(x)$ 的单调性可以画出 $f(x)$ 的图象:

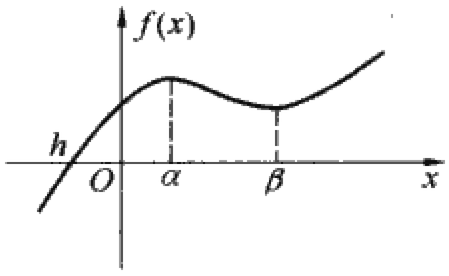


图 3

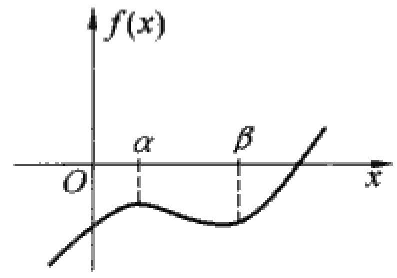


图 4

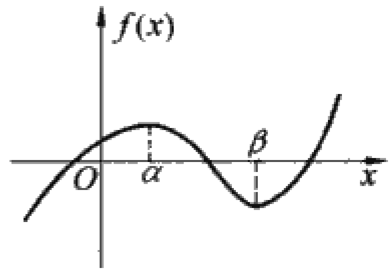


图 5

① 当 $f(\alpha)\cdot f(\beta) > 0$ 时,又分两种情形:

当 $f(\alpha)\cdot f(\beta) \in \mathbf{R}^+$ 时,$f(x)$ 的图象如图 3 所示($f(h) = 0$),此时方程 $f(x) = 0$ 有唯一实根(且此根 $h \in (-\infty,\alpha)$)和两个共轭虚根(易知 h 不会是二重根;若 h 是三重根,得 $\Delta = 0$,与 $\Delta > 0$ 矛盾).

当 $f(\alpha),f(\beta) \in \mathbf{R}^-$ 时,$f(x)$ 的图象如图 4 所示,此时方程 $f(x) = 0$ 有唯一实根(且此根在$(\beta, +\infty)$内),还有两个共轭虚根.

② 当 $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ 时,$f(x)$ 的图象如图 5 所示,此时方程 $f(x) = 0$ 有三个相异实根,它们分别在$(-\infty,\alpha),(\alpha,\beta),(\beta, +\infty)$内.

③ 当 $f(\alpha)\cdot f(\beta) = 0$ 时,$f(x)$ 的图象如图 6 所示,此时方程 $f(x) = 0$ 有三个实根,若 $f(\alpha)$(或 $f(\beta)$) $= 0$,则 α(或 β)是二重根,另一个在$(\beta, +\infty)$(或$(-\infty,\alpha)$)内.

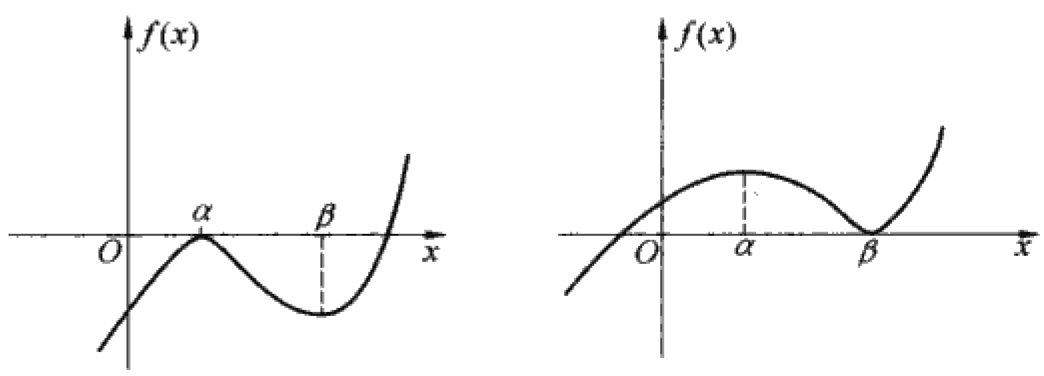


图 6

再看首项系数是负数的一元三次方程

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0(a < 0,b,c,d \in \mathbf{R})$$

的根的情形.

得 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$,方程 $f'(x) = 0$ 的判别式 $\Delta = 4(b^2 - 3ac)$.

(i) 当 $\Delta = 0$ 时,可得与 ① 相同的结论.

(ii) 当 $\Delta < 0$ 时，得 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，进而也得到与(2)相同的结论.

(iii) 当 $\Delta > 0$ 时，设 $f'(x) = 0$ 的两个实根为 $\alpha,\beta(\alpha < \beta)$，可得 $f(\alpha),f(\beta)$ 分别是 $f(x)$ 的极小值，极大值.

(a) 当 $f(\alpha)\cdot f(\beta) > 0$ 时，又分两种情形：

当 $f(\alpha),f(\beta)\in\mathbf{R}^-$ 时，方程 $f(x)=0$ 有唯一实根(且此根在 $(-\infty,\alpha)$ 内)和两个共轭虚根；

当 $f(\alpha),f(\beta)\in\mathbf{R}^+$ 时，方程 $f(x)=0$ 有唯一实根(且此根在 $(\beta,+\infty)$ 内)和两个共轭虚根.

(b) 当 $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ 时，可得与2)相同的结论.

(c) 当 $f(\alpha)\cdot f(\beta) = 0$ 时，也得与3)相同的结论.

综上所述，得

定理 对于一元三次方程 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + dx = 0(a\in\mathbf{R}^*, b, c, d\in\mathbf{R})$，设方程 $f'(x) = 0$ 的判别式 $\Delta = 4(b^2 - 3ac)$，则方程 $f(x) = 0$ 的根的各种情形是：

(1) 方程 $f(x) = 0$ 有三个不同的实根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$ 且 $f(x)$ 的两个极值异号(此时，设 $f(x)$ 的两个极值点分别为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，则三个根分别在 $(-\infty,\alpha)$，(α,β)，$(\beta,+\infty)$ 内)；

(2) 方程 $f(x) = 0$ 有一个二重实根和一个一重实根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$ 且 $f(x)$ 有一个极值为0(此时极值点就是二重实根)；

(3) 方程 $f(x) = 0$ 有三重实根 $\Leftrightarrow \Delta = 0$(即 $b^2 = 3ac$)且 $b^3 = 27a^2d \Leftrightarrow f(x)$ 是完全立方式(此时三重根为 $-\dfrac{b}{3a}$)；

(4) 方程 $f(x) = 0$ 有一个实根和两个共轭虚根 $\Leftrightarrow$ 除①，②，③之外的所有情形.

例 1 讨论方程 $f(x) = x^3 + px + 1 = 0(p\in\mathbf{R})$ 的根的情况.

解 方程 $f'(x) = 3x^2 + p = 0$ 的判别式 $\Delta = -12p$.

(1) 当 $\Delta > 0$ 且 $f(x)$ 的两个极值异号，即 $p < -\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 时，原方程有三个相异实根；

(2) 当 $\Delta > 0$ 且 $f(x)$ 有一个极值为0，即 $p = -\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 时，原方程有一个二重根 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ 和一个一重实根 $(-\sqrt[3]{4})$；

(3) $f(x)$ 不会是完全立方式，所以原方程不会有三重实根；

(4) 其余的情形，即 $p > -\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 时，原方程有一个实根和两个共轭虚根.

例 2 (2007 年全国卷(Ⅱ)压轴题)已知函数 $f(x)=x^3-x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,f(t))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a>0$,如果过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线,证明: $-a<b<f(a)$.

证明 (1) 所求切线方程为 $y=(3t^2-1)x-2t^3$.

(2) 如果有一条切线过点 (a,b),则存在 t,使 $b=(3t^2-1)a-2t^3$.

于是,若过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(t)$ 的三条切线,则方程 $g(t)=2t^3-3at^2+a+b=0$ 有三个相异实根.由定理(1),得

$$g'(t)=6t^2-6at=0 \text{ 的判别式 } \Delta=36a^2>0;$$

$f(x)$ 的两个极值异号,即 $g(0)\cdot g(a)=(b+a)(b-f(a))<0$,也即 $-a<b<f(a)$(因为 $a>0$).

进而可得:过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线 $\Leftrightarrow -a<b<f(a)$.

方程 $x^x = x$ 的实数解的简洁解法

谈祥柏，杨京玉著《趣味代数300题》(中国青年出版社1998年出版)一书第160页有一道名为“一团漆黑”的题：

“试解方程 $x^x = x$.

这里面连一个已知数都没有，不是一团漆黑吗?”

该书第204页给出的解答是：

用两端取对数的方法来解这个方程

$$x\lg x = \lg x, (x-1)\lg x = 0$$

所以

$$x = 1$$

经检验知 $x = 1$ 是原方程的根.

奇怪的是 $x = -1$ 也是原方程的根，可是它不能通过解方程的正常途经而得到.

以上解答体现了趣味性，但不是完整的解答.

赵慈庚先生主编的《初等数学研究》(北京师范大学出版社1990年出版)一书第99～100页收录了芝原的文章《指数方程 $x^x = x$ 的解法》，该文用较长篇幅求出了方程 $x^x = x$ 的所有实数解(只有两个：$x = \pm 1$).

下面给出该方程的一种简洁解法，主要是求 $x^x = x$ 的负数解.

当 $x < 0$ 时，设 $x = -y(y > 0)$，得

$$(-y)^{-y} = -y, (-1)^{-y} \cdot y^{-y} = (-1)^1 \cdot y^1$$

$$\frac{y^{-y}}{y^1} = \frac{(-1)^1}{(-1)^{-y}}$$

$$y^{-y-1} = (-1)^{1+y} \qquad ①$$

$$\frac{y^0}{y^{-y-1}} = \frac{1^{1+y}}{(-1)^{1+y}}$$

$$y^{y+1} = (-1)^{1+y} \qquad ②$$

由①，②，得

$$y^{1+y} = y^{-y-1}, y^{2y+2} = 1$$

因为 $y > 0$，由指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的性质可得 $y = 1$ 或 $2y + 2 = 0$，所以 $y = 1, x = -1$.

问题 设 $g_n(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}$ (n 个 x，$n \in \mathbf{N}^*$，$x \in \mathbf{R}^*$)，求方程 $g_n(x) =$

$x(n \geqslant 3)$ 的解.

当 $x > 0$ 时,若 $g_n(x) = x$,得

$$g_{n-1}(x)\lg x = \lg x$$

所以 $x = 1$ 或 $g_{n-1}(x) = 1$.

若 $g_{n-1}(x) = 1$,得 $g_{n-2}(x)\lg x = 0$,

又 $g_{n-2}(x) > 0$,所以 $x = 1$.

要解决问题,只需求出 $g_n(x) = x(n \geqslant 3)$ 的负数解.

笔者还求出了方程 $x^{ax} = x$ 的解:

(1) 当 $a = 0$ 时,$x = 1$;

(2) 当 $a = \dfrac{q}{p}$(p,q 均为奇数)时,$x = \pm 1, \dfrac{1}{a}$;

(3) 其他情形,$x = 1, \dfrac{1}{a}$.

两道题的完整解答

文献[1]介绍了两条定理及其应用：

定理 1 增函数与其反函数图象的交点必在直线 $y = x$ 上.

定理 2 若函数 $y = f(x)$ 是某区间上的连续函数，且有反函数，则函数 $y = f(x)$ 的图象与其反函数的图象有公共点 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$ 有实数解.

题 1 已知函数 $y = \sqrt{x - a}$ 的图象与其反函数的图象有公共点，求实数 a 的取值范围.

解 由定理 1，得

$$\begin{cases} y = \sqrt{x - a} \\ y = x \end{cases} \text{有解} \Leftrightarrow x^2 = x - a \text{ 有解} \Leftrightarrow \Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant \frac{1}{4}$$

题 2 若函数 $y = \sqrt{a - x}$ 的图象与其反函数的图象有公共点，求实数 a 的取值范围.

解 由定理 2，得

函数 $y = \sqrt{a - x}$ 的图象与其反函数的图象有公共点 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{a - x} \\ y = x \end{cases}$ 有解 $\Leftrightarrow \Delta \geqslant 0$.

题 2 的解答有些简略，将后两步写得完整些，即

$$\begin{cases} y = \sqrt{a - x} \\ y = x \end{cases} \text{有解} \Leftrightarrow \sqrt{a - x} = x \text{ 有解} \Leftrightarrow x^2 = a - x \text{ 有解} \Leftrightarrow \Delta = 1 + 4a \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -\frac{1}{4}.$$

应当指出的是：“$a \geqslant -\frac{1}{4}$”并不是题 2 的答案. 反例：当 $-\frac{1}{4} \leqslant a < 0$ 时，$y = \sqrt{a - x}$ 的图象与其反函数 $y = a - x^2$ 的图象没有公共点（因为前者 $y \geqslant 0$，后者 $y < 0$）.

题 2 的正确答案应为“$a \geqslant 0$”，证明如下：

由定理 2 知，题 2 中所求 a 的取值范围即“使方程 $\sqrt{a - x} = x$ 有实数解的实数 a 的取值范围”，但“$\sqrt{a - x} = x$ 有解 $\Leftrightarrow x^2 = a - x$ 有解”是不成立的（因为两边平方后可能产生增根，解无理方程必须检验），所以文献[1]对题 2 的解

答有误.

若$\sqrt{a-x}=x$有解,则$x^2=a-x$有解,得$\Delta=1+4a\geqslant 0$,所以$a\geqslant -\frac{1}{4}$.

当$a\geqslant -\frac{1}{4}$时,方程$x^2=a-x$的两个根为

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2},x_2=\frac{-1-\sqrt{4a+1}}{2}$$

检验:因为$x_2<0$,所以x_2不是方程$\sqrt{a-x}=x$的根.

当$x=x_1=\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}$时,$\sqrt{a-x}=\frac{|\sqrt{4a+1}-1|}{2}$

所以当且仅当$\sqrt{4a+1}-1\geqslant 0$即$a\geqslant 0$时,x_1才是方程$\sqrt{a-x}=x$的根.

因而,题2的答案应为"$a\geqslant 0$".

对于题1的解答,"答案正确,但过程不严谨",因为"$\sqrt{x-a}=x$有解$\Leftrightarrow x^2=x-a$有解"不是显而易见的,而应改为

"$\sqrt{x-a}=x$有解$\Leftrightarrow x^2=x-a$有$x\geqslant 0$且$x\geqslant a$的解$\Leftrightarrow x^2=x-a$有解"

(第二个"$\Leftrightarrow$"中的"$\Leftarrow$"证明如下——可证$x^2=x-a$有解时,一定有$x\geqslant 0$且$x\geqslant a$的解:因为$x-a=x^2\geqslant 0$,所以$x\geqslant a$;设$x^2=x-a$的两个解是x_1,x_2,则$x_1+x_2=1$,所以x_1,x_2不能全是负数,即必有$x\geqslant 0$的解).

下面再解答题1,题2的一般情形:

题3 若函数$y=\sqrt{x-a}$的图象与其反函数的图象有公共点,求出所有的公共点.

解 由定理1知,只需解方程

$$\sqrt{x-a}=x$$
$$x-a=x^2$$

当且仅当$a\leqslant\frac{1}{4}$时,此方程有解:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},x_2=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

检验:由$a\leqslant\frac{1}{4}$可得$x_1\geqslant 0$且$x_1\geqslant a$,所以当$a\leqslant\frac{1}{4}$时,$x_1=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$是方程$\sqrt{x-a}=x$的根;

当且仅当$a\geqslant 0$时,$x_2\geqslant 0$且$x_2\geqslant a$,所以当且仅当$a\geqslant 0$时,$x_2=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$是方程$\sqrt{x-a}=x$的根.

故得结论：

(1) 当 $a<0$ 或 $a=\frac{1}{4}$ 时，两个图象有唯一的公共点$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$；

(2) 当 $0\leqslant a<\frac{1}{4}$ 时，两个图象有且仅有两个公共点$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$与$\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$；

(3) 当 $a>\frac{1}{4}$ 时，两个图象没有公共点.

题 4 若函数 $y=\sqrt{a-x}$ 的图象与其以函数的图象有公共点，求出所有的公共点.

解 因为函数 $y=\sqrt{a-x}(x\leqslant a)$ 的反函数是 $y=a-x^2(x\geqslant 0)$，所以这两个函数图象交点的横坐标 x 满足 $0\leqslant x\leqslant a$（因而当 $a\geqslant 0$ 两图象才有可能有交点）.

解方程

$$\sqrt{a-x}=a-x^2(0\leqslant x\leqslant a) \qquad ①$$

得

$$(x^2+x-a)(x^2-x-a+1)=0$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2},x_2=\frac{-1-\sqrt{4a+1}}{2}.$$

$$x_3=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2},x_4=\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}$$

检验：当 $a\geqslant 0$ 时，x_1 是方程 ① 的解，此时得交点$\left(\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2},\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)$；

x_2 不是方程 ① 的根（因为 $x_2<0$，所以 x_2 不满足 $0\leqslant x_2\leqslant a$，也得 x_2 不可能是两图象交点的横坐标）；

当且仅当$\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant 1$时，$x_3=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}$是方程 ① 的解，此时得交点$\left(\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2},\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}\right)$；

当且仅当$\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant 1$时，$x_4=\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}$是方程 ① 的解，此时得交点$\left(\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2},\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}\right)$.

故得结论:

(1) 当 $a<0$ 时,两图象没有交点;

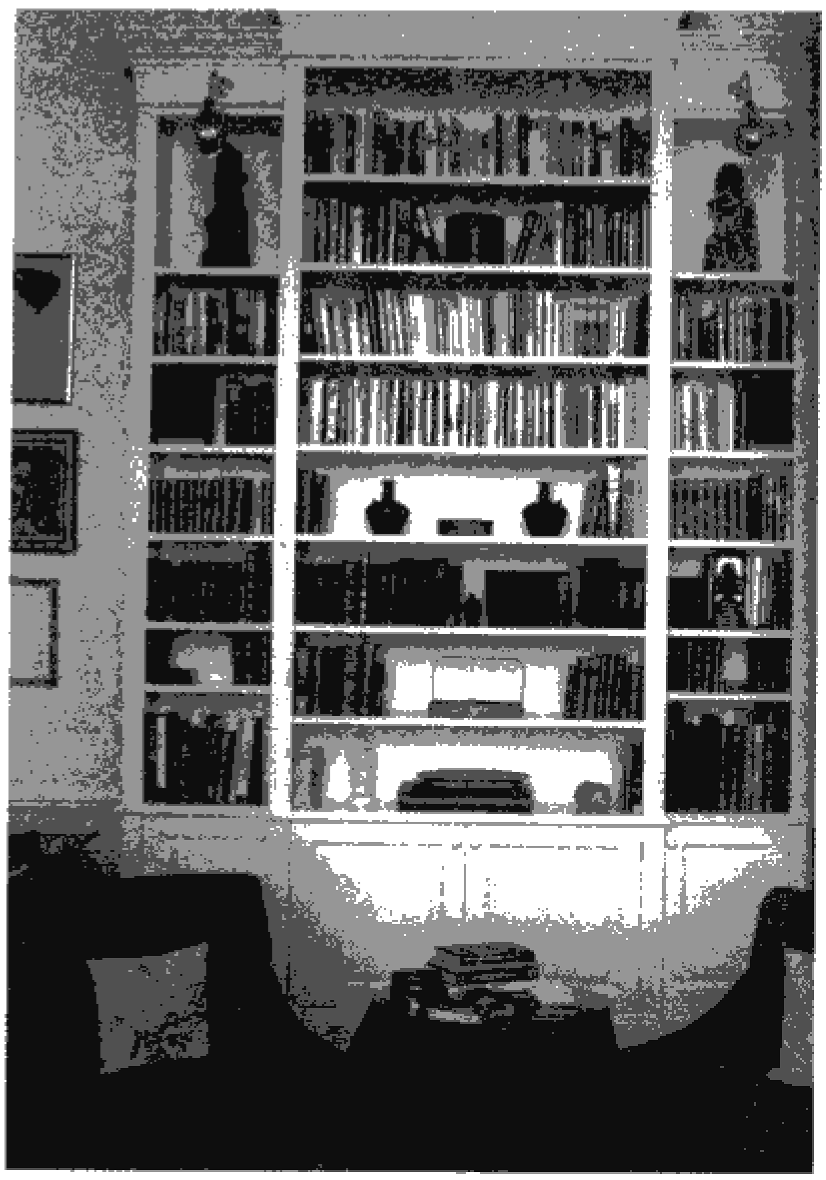
(2) 当 $0\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$ 或 $a>1$ 时,两图象有唯一交点$\left(\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2},\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)$;

(3) 当 $\frac{3}{4}<a\leqslant 1$ 时,两图象有且仅有三个交点$\left(\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2},\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2},\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2},\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}\right)$.

参考文献

[1] 徐鸿迟.略述一类求参数取值范围问题的共同解法[J].数学通报,2003(1):32.

数　　列



$\sum_{i=1}^{n} i^k (k \in \mathbf{N}^*)$ 的一个求和公式及其他

已有众多文献给出前 n 个正整数的 $k(k \in \mathbf{N}^*$,下同) 次幂和 $\sum_{i=1}^{n} i^k$ 的求法及性质,如文献[1] ~ [9],注释① 和② 及文献[1] 末列出的前八种文献.本文按文献[7]的方法给出 $\sum_{i=1}^{n} i^k$ 的一个组合表示的求和公式,并由此证得一高中生在注释 ② 中发现而未证明的求 $\sum_{i=1}^{n} i^k$ 的方法是正确的.

1 一个求和公式

引理 设 $f(n)$ 是关于 n 的 k 次多项式,则其差分表左边一列数为 c_1, $c_2, \cdots, c_{k+1}, 0, 0, \cdots (c_{k+1} \neq 0)$,且 $\sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{j=1}^{k+1} c_j C_{n+1}^{j}$.(即文献[7] 的定理 5)

先看文献[7] 的例 1 中计算 $\sum_{i=1}^{n} i^4$ 的方法.

写出 $f(n) = n^4$ 的差分表:

	$f(0)$		$f(1)$		$f(2)$		$f(3)$		$f(4)$		$f(5)$		$\cdots$
第一行	0		1		16		81		256		625		$\cdots$
第二行		1		15		65		175		369		$\cdots$	
第三行			14		50		110		194		$\cdots$		
第四行				36		60		84		$\cdots$			
第五行					24		24		$\cdots$				

由差分表的左边一列数立得

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = C_{n+1}^{2} + 14C_{n+1}^{3} + 36C_{n+1}^{4} + 24C_{n+1}^{5} \quad ①$$

下面再用这种方法来计算 $\sum_{i=1}^{n} i^k$.

作出 $f(n) = n^k$ 的差分表:

---

① JERRY J A. 利用微积分求整数的方幂和.魏启宣,译.数学通报,1988(3).
② 李博文.我这样求连续自然数方幂的和.中学生数学,2004(3 上).

第一行的通项 $a_{1n}=n^k(n\geqslant 0)$;

第二行的通项 $a_{2n}=a_{1n}-a_{1,n-1}=n^k-(n-1)^k(n\geqslant 1)$;

第三行的通项 $a_{3n}=a_{2n}-a_{2,n-1}=n^k-2(n-1)^k+(n-2)^k(n\geqslant 2)$;

… …

可以证明,第 m 行的通项

$$a_{mn}=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j C_{m-1}^j(n-j)^k(n\geqslant m-1,\text{约定 } C_0^0=1) \qquad ②$$

对 m 用数学归纳法来证:

容易验证 $m=1$ 时成立.

假设 m 时成立,下证 $m+1$ 时成立:

$$\begin{aligned}a_{m+1,n}=a_{mn}-a_{m,n-1}=&\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j C_{m-1}^j(n-j)^k-\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j C_{m-1}^j(n-j-1)^k=\\&n^k+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j C_{m-1}^j(n-j)^k-\sum_{j-1=0}^{m-1}(-1)^{j-1}C_{m-1}^{j-1}(n-j)^k=\\&n^k+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j C_{m-1}^j(n-j)^k-\\&\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j C_{m-1}^{j-1}(n-j)^k+(-1)^m(n-m)^k=\\&n^k+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j C_m^j(n-j)^k+(-1)^m(n-m)^k=\\&\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_m^j(n-j)^k(n\geqslant m)\end{aligned}$$

即 $m+1$ 时也成立,所以结论 ② 成立.

由 ② 得 $f(n)=n^k$ 的差分表左边一列数的通项是

$$\begin{aligned}b_1=0,b_m=a_{m,m-1}=&\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j C_{m-1}^j(m-j-1)^k=\\&\sum_{j=0}^{m-2}(-1)^j C_{m-1}^j(m-j-1)^k(m\geqslant 2)\end{aligned} \qquad ③$$

由引理,立得

定理 1 $\sum\limits_{i=1}^{n}i^k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_{i+1}C_{n+1}^{i+1}=\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=0}^{i-1}(-1)^j C_i^j(i-j)^k C_{n+1}^{i+1}$.

2 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}i^k$ 的又一种方法的证明

高中生李博文在注释 ② 中发现了以下求 $\sum\limits_{i=1}^{n}i^k$ 的方法(虽未给出证明,这

对于一个高中生也是难能可贵的，下面的表述略有改动）.

先写出下面的三角形数表：

1				
1	2			
1	6	6		
1	14	36	24	
1	30	150	240	120
…	…	…	…	…

其特点是：每行第一个数都为 1，从第二行起，每行第二个数是它肩上两数和的 2 倍，第三个数是它肩上两数和的 3 倍，……（约定最后一个数右肩上的数为 0）.

由第 k 行即可直接写出 $\sum_{i=1}^{n} i^k$ 的表达式，比如由第四行可得式 ①.

下面来证明这种方法是正确的.

设以上三角形数表第 m 行第 n 个元素是 $G_{mn}(m,n\in\mathbf{N}^*,m\geqslant n)$，它由递推公式

$$G_{m1}=1,G_{mn}=n(G_{m-1,n-1}+G_{m-1,n})(2\leqslant n\leqslant m,\text{约定 }G_{m-1,m}=0)\quad ④$$

确定.

定理 2　$G_{mn}=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^jC_n^j(n-j)^m(n=1,2,\cdots,m)$.

证明　用双重归纳法[9]来证极为方便. 但双重归纳法并不常见，下面仍对 n 用一般的数学归纳法来证.

由 $G_{m1}=1$ 可验证 $n=1$ 时成立.

假设 n 时成立，下证 $n+1$ 时成立：

由 ④ 得　$G_{m,n+1}=(n+1)(G_{m-1,n}+G_{m-1,n+1})$

又由"n 时成立"，得

$$G_{m,n+1}=(n+1)\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^jC_n^j(n-j)^{m-1}+G_{m-1,n+1}\right]$$

由此递推公式确定的数列 $\{G_{m,n+1}\}_{m\geqslant n+1}$ 是唯一确定的（因为三角形数表 $\{G_{i,j}\}$ 中的每一个数都是确定的），而通项 $G_{m,n+1}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^jC_{n+1}^j(n-j+1)^m$ 适合该递推式：

$$(n+1)\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^jC_n^j(n-j)^{m-1}+G_{m-1,n+1}\right]=$$

$$(n+1)\left[-\sum_{j-1=0}^{n-1}(-1)^jC_n^{j-1}(n-j+1)^{m-1}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^jC_{n+1}^j(n-j+1)^{m-1}\right]=$$

$(n+1)[(n+1)^{m-1}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^jC_{n+1}^j(n-j+1)^{m-1}-$

$\sum_{j=1}^{n}(-1)^jC_n^{j-1}(n-j+1)^{m-1}]=$

$(n+1)^m+(n+1)\sum_{j=1}^{n}(-1)^jC_n^j(n-j+1)^{m-1}=$

$(n+1)^m+\sum_{j=1}^{n}(-1)^jC_{n+1}^j(n-j+1)^m=\sum_{j=0}^{n}(-1)^jC_{n+1}^j(n-j+1)^m=G_{m,n+1}$

得 $n+1$ 时成立,所以定理 2 成立.

定理 3 $G_{kn}=b_{n+1}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_n^i(n-i)^k(n=1,2,\cdots,k)$.

由定理 1,3,即得注释 ② 的求法是正确的:

定理 4 $\sum_{i=1}^{n}i^k=\sum_{i=1}^{k}G_{ki}C_{n+1}^{i+1}$.

3 其他问题

由 ④ 可得

$G_{11}=1,G_{nn}=nG_{n-1,n-1}(n\geqslant 2)$;

$G_{21}=1,G_{n,n-1}=(n-1)(G_{n-1,n-2}+G_{o-1,n-1})(n\geqslant 3)$;

$G_{31}=1,G_{n,n-2}=(n-2)(G_{n-1,n-3}+G_{n-1,n-2})(n\geqslant 4)$;

$G_{41}=1,G_{n,n-3}=(n-3)(G_{n-1,n-4}+G_{n-1,n-3})(n\geqslant 5)$.

由它们可分别求出 $G_{nn},G_{n,n-1},G_{n,n-2},G_{n,n-3}$ 的表达式,再由定理 3,得

定理 5 (1) $G_{nn}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_n^i(n-i)^n=n!(n\geqslant 1)$;

(2) $G_{n,n-1}=\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^iC_{n-1}^i(n-i-1)^n=C_n^2(n-1)!(n\geqslant 2)$;

(3) $G_{n,n-2}=\sum_{i=0}^{n-3}(-1)^iC_{n-2}^i(n-i-2)^n=\frac{3n-5}{4}C_n^3(n-2)!(n\geqslant 3)$;

(4) $G_{n,n-3}=\sum_{i=0}^{n-4}(-1)^iC_{n-3}^i(n-i-3)^n=\frac{n-3}{2}C_n^4(n-2)!(n\geqslant 4)$.

定理 5 给出了定理 3 中 $G_{nm}(m=n,n-1,n-2,n-3)$ 时表达式的化简,请问:

问题 定理 3 右边的和式能化简吗?

文献[8]第 77 页第 76 题给出的结论是

$$\sum_{i=1}^{n}i^4=C_n^1+15C_n^2+50C_n^3+60C_n^4+24C_n^5$$

实际上,还有以下一般的结论:

定理 6　可设 $f(n)=n^k$ 的差分表的第 $r(r\in\mathbf{N}^*)$ 斜列是 $b_{1r}^{(k)},b_{2r}^{(k)},\cdots,b_{k+1,r}^{(k)},0,0,\cdots(b_{k+1,r}^{(k)}\neq 0)$,且 $\sum\limits_{i=r-1}^{n+r-1}i^k=\sum\limits_{i=1}^{k+1}b_{ir}^{(k)}C_{n+1}^{i}$.

证明　显然 $f(n)=(n+r-1)^k$ 的差分表的第一斜列就是 $g(n)=n^k$ 的差分表的第 r 斜列,所以由引理得

$$\sum_{i=r-1}^{n+r-1}i^k=\sum_{i=0}^{n}f(i)=\sum_{i=1}^{k+1}b_{ir}^{(k)}C_{n+1}^{i}$$

用定理 1 的证法也可求出 $b_{ir}^{(k)}$ 的表达式.

参考文献

[1] 黄益驹,李鸿祥. n 个数的一种求和公式及其应用[J]. 数学通讯,1989(3):3-5.

[2] 褚学璞. 一个幂和定理摘译[J]. 数学通讯,1997(1):33-34.

[3] 刘会成. 自然数的方幂和的一个性质的证明[J]. 数学通讯,1994(2):20-22.

[4] 汪军龙. 求自然数方幂和的一个公式[J]. 湖南数学通讯,1994(6):45-封底.

[5] 陈永林,储慧,张文军. 关于方幂和的一个性质及其初等证法. 数学通讯,1996(3):32-33.

[6] 哈尔滨数学普及工作委员会. 数学奥林匹克之星的升起[M]. 哈尔滨:哈尔滨出版社,1994.

[7] 张慧欣. 前 n 个正整数的 k 次方的和的组合表示[J]. 数学通报,2003(12):42-43.

[8] 徐利治,王兴华. 数学分析的方法及例题选讲(修订版)[M]. 北京:高等教育出版社,1983.

[9] 陈传理. 高中数学竞赛名师讲座[M]. 武汉:华中师范大学出版社,1993.

求 $S_k(n)$ 表达式的较好方法

已有较多文献给出正整数的方幂和 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k$ 的性质及求法,比如文献[1]及其列举的七种文献,文献[1]的定理给出了 $S_k(n)$ 的一个性质,由此得到了用确定较少未知系数的待定系数法(当 $k\geqslant 2$ 时,须确定 $\left[\frac{k}{2}\right]-1$ 个待定系数)求 $S_k(n)$ 的表达式(应把文献[1]定理(2)的等式中第二处"q"改为"g").事实上,已有比此好得多的方法,兹介绍如下.

定理 1[2] $S_k(n)=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\omega_i}{i!}\cdot\frac{k!}{(k+2-i)!}n^{k+2-i}$,其中 $k\in\mathbf{N},\omega_1=1$, $\omega_{m+1}=(m+1)[1-\sum_{i=1}^{m}\frac{\omega_i}{i!}\cdot\frac{m!}{(m-i+2)!}](m\in\mathbf{N}^*)$,且有 $\omega_{2m+2}=0(m\in\mathbf{N}^*)$.

文献[2]给出了 $i=1\sim 19$ 时 ω_i 值(但文献[2]中 ω_{19} 的值有误应作如下改动):

ω_1	ω_2	ω_3	ω_5	ω_7	ω_9	ω_{11}	ω_{13}	ω_{15}	ω_{17}	ω_{19}
1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{691}{210}$	$\frac{35}{2}$	$-\frac{3\,617}{30}$	$\frac{43\,867}{42}$

笔者还算得 $\omega_{21}=-\frac{1\,222\,277}{110}$.

由定理 1,得

$$S_{2k+1}(n)=\frac{1}{2k+2}n^{2k+2}+\frac{1}{2}n^{2k+1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_{2i+1}}{(2i+1)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{(2k+2-2i)!}n^{2k+2-2i} \quad ①$$

$$S_{2k}(n)=\frac{1}{2k+1}n^{2k+1}+\frac{1}{2}n^{2k}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_{2i+1}}{(2i+1)!}\cdot\frac{(2k)!}{(2k+1-2i)!}n^{2k+1-2i} \quad ②$$

$$\omega_{2m+1}=(2m+1)\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2m+1}-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\omega_{2i+1}}{(2i+1)!}\cdot\frac{(2m)!}{(2m+1-2i)!}\right]$$

(其中 $m\in\mathbf{N}^*,m\geqslant 2$) ③

证明　可得$S_{2k+1}(n)=\sum_{i=1}^{2k+2}\frac{\omega_i}{i!}\cdot\frac{(2k+1)!}{(2k+3-i)!}n^{2k+3-i}=$

$$\frac{1}{2k+2}n^{2k+2}+\frac{1}{2}n^{2k+1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_{2i+1}}{(2i+1)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{(2k+2-2i)!}n^{2k+2-2i}+$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_{2i+2}}{(2i+2)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{(2k+1-2i)!}n^{2k+1-2i}=\text{式①的右边}.$$

即式①成立.同理可证②,③成立.

也可把定理1改述为

定理2　$S_k(n)=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{C_k^{i-1}}{k+2-i}a_{i-1}n^{k+2-i}$,其中$a_i$是多项式$S_i(n)$的一次项系数,当$m\in\mathbf{N}^*$时,有

$$a_m=1-\sum_{i=1}^{m}\frac{C_m^{i-1}}{m+2-i}a_{i-1},a_0=1,a_{2m+1}=0,a_{m-1}=\frac{\omega_m}{m}$$

由$i=1\sim19$时ω_i的值可得$i=0\sim18$时a_i的值:

a_0	a_1	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}	a_{14}	a_{16}	a_{18}
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2\,730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3\,617}{510}$	$\frac{43\,867}{798}$

由定理2,易证

$$S_{2k+1}(n)=\frac{1}{2k+2}n^{2k+2}+\frac{1}{2}n^{2k+1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{C_{2k+1}^{2i}}{2k+2-2i}a_{2i}n^{2k+2-2i}\quad④$$

$$S_{2k}(n)=\frac{1}{2k+1}n^{2k+1}+\frac{1}{2}n^{2k}+\sum_{i=1}^{k}\frac{C_{2k}^{2i}}{2k+1-2i}a_{2i}n^{2k+1-2i}\quad⑤$$

$$a_{2m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2m+1}-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{C_{2m}^{2i}}{2m+1-2i}a_{2i}(m\in\mathbf{N}^*,m\geqslant2)\quad⑥$$

也可由①,②,③分别证得④,⑤,⑥.

例　求$S_7(n)$和$S_8(n)$.

解　由④或①可得

$$S_7(n)=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\sum_{i=1}^{3}\frac{C_7^{2i}}{8-2i}a_{2i}n^{8-2i}=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2=$$

$$\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

由⑤或②可得

$$S_8(n)=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\sum_{i=1}^{4}\frac{C_8^{2i}}{9-2i}a_{2i}n^{9-2i}=$$

$$\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n=$$

$$\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

用 ω_i,或 a_i 的递推公式计算出 $S_k(n)$ 的系数,由定理 1,2 的方法就得到了 $S_k(n)$ 的表达式,这种方法比文献[1]的方法简洁得多,但需记忆定理 1 或定理 2,是不很困难的,若能记忆表中 ω_i 或 a_i 的值就更好了.

由 ④,⑤,⑥ 可以计算出

$$S_{2k}(n)=\frac{1}{2k+1}n^{2k+1}+\frac{1}{2}n^{2k}+\frac{1}{6}kn^{2k-1}-\frac{1}{180}k(k-1)(2k-1)n^{2k-3}+\cdots=$$
$$S_2(n)\cdot\frac{1}{2k+1}[3n^{2k-2}+3(k-1)n^{2k-3}+(k-1)(k-3)n^{2k-4}-\frac{3}{2}(k-1)(k-2)n^{2k-5}-\cdots] \quad ⑦$$

$$S_{2k+1}(n)=\frac{1}{2k+2}n^{2k+2}+\frac{1}{2}n^{2k+1}+\frac{1}{12}(2k+1)n^{2k}-\frac{1}{360}k(2k+1)(2k-1)n^{2k-2}+\cdots=$$
$$S_3(n)\cdot\frac{1}{2k+2}[4n^{2k-2}+4(k-1)n^{2k-3}+\frac{2}{3}(k-1)(2k-7)n^{2k-4}-\frac{8}{3}(k-1)(k-2)n^{2k-5}-\cdots] \quad ⑧$$

由 ⑦,⑧,得

定理 3 关于 n 的多项式 $\frac{S_{2k}(n)}{S_2(n)},\frac{S_{2k+1}(n)}{S_3(n)}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ 若按降幂排列,则前两项系数之比为 $1:(k-1)$.

定理 4① $S'_k(n)=kS_{k-1}(n)+t_k$,其中 $k\in\mathbf{N}^*$,$S_0(n)=n$,t_k 是 $S_k(n)$ 的一次项系数,$S'_k(n)$ 表示 $S_k(n)$ 的导数.

从而,有

定理 4′ $S_k(n)=k\int S_{k-1}(n)\mathrm{d}n+t_kn$,其中 $k\in\mathbf{N}^*$,$\int S_{k-1}(n)\mathrm{d}n$ 表示 $S_{k-1}(n)$ 的积分,t_k 是 $S_k(n)$ 的一次项系数.

用此法笔者得到了 $S_k(n)(k=1\sim 20)$ 的表达式(文献[3]也得到了以下部分结果,但其中有印刷错误):

$$S_1(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n+1);$$

$$S_2(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

① JERRY J A.利用微积分求整数的方幂和.魏启宣,译.数学通报,1988(3).

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2;$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1);$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1);$$

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1);$$

$$S_7(n) = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2);$$

$$S_8(n) = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3);$$

$$S_9(n) = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3);$$

$$S_{10}(n) = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n = \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5);$$

$$S_{11}(n) = \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^8 + \frac{11}{6}n^6 - \frac{11}{8}n^4 + \frac{5}{12}n^2 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10);$$

$$S_{12}(n) = \frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^9 + \frac{22}{7}n^7 - \frac{33}{10}n^5 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{691}{2\,730}n = \frac{1}{2\,730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1\,050n^7-1\,190n^6+2\,310n^5+1\,420n^4-3\,285n^3-287n^2+2\,073n-691);$$

$$S_{13}(n) = \frac{1}{14}n^{14} + \frac{1}{2}n^{13} + \frac{13}{12}n^{12} - \frac{143}{60}n^{10} - \frac{143}{28}n^8 - \frac{143}{20}n^6 + \frac{65}{12}n^4 - \frac{691}{420}n^2 = \frac{1}{420}n^2(n+1)^2(30n^{10}+150n^9+125n^8-400n^7-326n^6+1\,052n^5+367n^4-1\,786n^3+202n^2+1\,382n-691);$$

$$S_{14}(n)=\frac{1}{15}n^{15}+\frac{1}{2}n^{14}+\frac{7}{6}n^{13}-\frac{91}{30}n^{11}+\frac{143}{18}n^{9}-\frac{143}{10}n^{7}+\frac{91}{6}n^{5}-\frac{691}{90}n^{3}+\frac{7}{6}n=$$
$$\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(3n^{12}+18n^{11}+24n^{10}-45n^{9}-81n^{8}+144n^{7}+182n^{6}-345n^{5}-217n^{4}+498n^{3}+44n^{2}-315n+105);$$

$$S_{15}(n)=\frac{1}{16}n^{16}+\frac{1}{2}n^{15}+\frac{5}{4}n^{14}-\frac{91}{24}n^{12}+\frac{143}{12}n^{10}-\frac{429}{16}n^{8}+\frac{455}{12}n^{6}-\frac{691}{24}n^{4}+\frac{35}{4}n^{2}=$$
$$\frac{1}{48}n^{2}(n+1)^{2}(3n^{12}+18n^{11}+21n^{10}-60n^{9}-83n^{8}+226n^{7}+203n^{6}-632n^{5}-226n^{4}+1\,084n^{3}-122n^{2}-840n+420);$$

$$S_{16}(n)=\frac{1}{17}n^{17}+\frac{1}{2}n^{16}+\frac{4}{3}n^{15}-\frac{14}{3}n^{13}+\frac{52}{3}n^{11}-\frac{143}{3}n^{9}+\frac{260}{3}n^{7}-\frac{1\,382}{15}n^{5}+\frac{140}{3}n^{3}-\frac{3\,617}{510}n=\frac{1}{510}n(n+1)(2n+1)(15n^{14}+$$
$$105n^{13}+175n^{12}-315n^{11}-805n^{10}+1\,365n^{9}+2\,755n^{8}-4\,845n^{7}-6\,275n^{6}+11\,835n^{5}+7\,485n^{4}-17\,145n^{3}-1\,519n^{2}+10\,851n-3\,617);$$

$$S_{17}(n)=\frac{1}{18}n^{18}+\frac{1}{2}n^{17}+\frac{17}{12}n^{16}-\frac{17}{3}n^{14}+\frac{221}{9}n^{12}-\frac{2\,431}{30}n^{10}+\frac{1\,105}{6}n^{8}-\frac{11\,747}{45}n^{6}+\frac{595}{3}n^{4}-\frac{3\,617}{60}n^{2}=\frac{1}{180}n^{2}(n+1)^{2}\times$$
$$(10n^{14}+70n^{13}+105n^{12}-280n^{11}-565n^{10}+1\,410n^{9}+2\,165n^{8}-5\,740n^{7}-5\,271n^{6}+16\,282n^{5}+7\,857n^{4}-27\,996n^{3}+3\,147n^{2}+21\,702n-10\,851);$$

$$S_{18}(n)=\frac{1}{19}n^{19}+\frac{1}{2}n^{18}+\frac{3}{2}n^{17}-\frac{34}{5}n^{15}+34n^{13}-\frac{663}{5}n^{11}+\frac{1\,105}{3}n^{9}-\frac{23\,494}{35}n^{7}+714n^{5}-\frac{3\,617}{10}n^{3}+\frac{43\,867}{798}n=$$
$$\frac{1}{3\,990}n(n+1)(2n+1)(105n^{16}+840n^{15}+1\,680n^{14}-2\,940n^{13}-9\,996n^{12}+16\,464n^{11}+48\,132n^{10}-80\,430n^{9}-167\,958n^{8}+292\,152n^{7}+380\,576n^{6}-71\,6940n^{5}-454\,036n^{4}+1\,039\,524n^{3}+92\,162n^{2}-658\,005n+219\,335);$$

$$S_{19}(n)=\frac{1}{20}n^{20}+\frac{1}{2}n^{19}+\frac{19}{12}n^{18}-\frac{323}{40}n^{16}+\frac{323}{7}n^{14}-\frac{4\,199}{20}n^{12}+\frac{4\,199}{6}n^{10}-\frac{223\,193}{140}n^{8}+2\,261n^{6}-\frac{68\,723}{40}n^{4}+\frac{833\,473}{1\,596}n^{2}=$$

$$\frac{1}{15\,960}n^2(n+1)^2(798n^{16}+6\,384n^{15}+11\,704n^{14}-29\,792n^{13}-80\,997n^{12}+191\,786n^{11}+433\,865n^{10}-1\,059\,516n^9-1\,665\,635n^8+4\,390\,786n^7+4\,053\,403n^6-12\,497\,592n^5-4\,502\,221n^4+21\,502\,034n^3-2\,416\,287n^2-16\,669\,460n+8\,334\,730);$$

$$S_{20}(n)=\frac{1}{21}n^{21}+\frac{1}{2}n^{20}+\frac{5}{3}n^{19}-\frac{19}{2}n^{17}+\frac{1\,292}{21}n^{15}-323n^{13}+\frac{41\,990}{33}n^{11}-\frac{223\,193}{63}n^9+6\,460n^7-\frac{68\,723}{10}n^5+\frac{4\,167\,365}{1\,197}n^3-\frac{174\,611}{330}n=$$

$$\frac{1}{131\,670}n(n+1)(2n+1)(3\,135n^{18}+28\,215n^{17}+65\,835n^{16}-112\,860n^{15}-489\,060n^{14}+790\,020n^{13}+3\,109\,920n^{12}-5\,059\,890n^{11}-15\,229\,830n^{10}+25\,374\,690n^9+53\,322\,930n^8-92\,671\,740n^7-120\,890\,540n^6+227\,671\,680n^5+144\,231\,850n^4-330\,183\,615n^3-29\,278\,373n^2+209\,009\,367n-69\,669\,789).$$

猜想 1　若 $k\in\mathbf{N},k\geqslant 2$,则

(1) 关于 n 的多项式$\frac{S_{2k}(n)}{S_2(n)}$的常数项与一次项系数之比为 $-1:3$;

(2) 关于 n 的多项式$\frac{S_{2k+1}(n)}{S_3(n)}$的常数项与一次项系数之比为 $-1:2$.

猜想 2　若 $k\in\mathbf{N},k\geqslant 2$,则

(1) $\frac{S_{2k}(n)}{S_2(n)},\frac{S_{2k+1}(n)}{S_3(n)}$除以$\frac{S_4(n)}{S_2(n)}$的余式均为非零常数;

(2) $\frac{S_{2k}(n)}{S_2(n)},\frac{S_{2k+1}(n)}{S_3(n)}$除以$\frac{S_5(n)}{S_3(n)}$的余式均为非零常数.

猜想 3　若 $k\in\mathbf{N},k\geqslant l\geqslant 2$,则

(1) $\frac{S_{2k}(n)}{S_2(n)},\frac{S_{2k+1}(n)}{S_3(n)}$除以$\frac{S_{2t}(n)}{S_2(n)}$的余式均为 n 的 $2t-4$ 次多项式;

(2) $\frac{S_{2k}(n)}{S_2(n)},\frac{S_{2k+1}(n)}{S_3(n)}$除以$\frac{S_{2t+1}(n)}{S_3(n)}$的余式均为 n 的 $2t-4$ 次多项式.

参考文献

[1] 陈永林,储慧,张文军.关于方幂和的一个性质及其初等证法[J].数学通讯,1996(3):32-33.

[2] 汪军龙.求自然数方幂和的一个公式[J].湖南数学通讯,1994(6):45-封底.

[3] 哈尔滨数学会普及工作委员会.数学奥林匹克之星的升起[M].哈尔滨:哈尔滨出版社,1994.

正整数方幂和的求法及性质

1 已有的结论

已有较多文献给出正整数的方幂和 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k(k,n\in \mathbf{N}^*)$ 的求法及性质,如文献[1]~[4]及文献[1]列举的前八种文献,这里举出以下结论.

引理 1 (1) $\sum_{i=1}^{k} C_{k+1}^{i} S_i(n)=(n+1)^{k+1}-n-1$;

(2) $\sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} S_{2i+1}(n)=\frac{1}{2}[(n+1)^{2k}+n^{2k}-1]$;

(3) $\sum_{i=1}^{k} C_{2k+1}^{2i} S_{2i}(n)=\frac{1}{2}[(n+1)^{2k+1}+n^{2k+1}-2n-1]$.

证明 (1) 即文献[2]的预备命题一.

(2) 见文献[3]第 22 页左栏头两行.

(3) 见文献[3]第 20 页右栏第 2~4 行.

引理 2[2]
$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+B_1n^k+B_2\cdot\frac{k}{2!}n^{k-1}+B_4\cdot\frac{k(k-1)(k-2)}{4!}n^{k-3}+B_6\cdot\frac{k(k-1)\cdots(k-4)}{6!}n^{k-5}+\cdots=-n^k+\sum_{i=0}^{k}\frac{B_iC_k^i}{k-i+1}n^{k-i+1}$$

其中 $B_0=1,B_1=-\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},B_3=0,B_4=-\frac{1}{30},B_5=0,\cdots,B_k=0$($k$ 是大于 1 的奇数),$B_n=C_n^0B_0+C_n^1B_1+C_n^2B_2+\cdots+C_n^nB_n$.

引理 3[4] $S_k(n)=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\omega_i}{i!}\cdot\frac{k!}{(k+2-i)}n^{k+2-i}$,其中 $k\in\mathbf{N},\omega_1=1$, $\omega_{m+1}=(m+1)[1-\sum_{i=1}^{m}\frac{\omega_i}{i!}\cdot\frac{m!}{(m-i+2)!}](m\in\mathbf{N}^*)$,且有 $\omega_{2m+2}=0(m\in\mathbf{N}^*)$.

文献[4]给出了 $i=1\sim19$ 时 ω_i 的值(但文献[4]中 ω_{19} 的值有误应作如下改动):

ω_1	ω_2	ω_3	ω_5	ω_7	ω_9	ω_{11}	ω_{13}	ω_{15}	ω_{17}	ω_{19}
1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{691}{210}$	$\frac{35}{2}$	$-\frac{3\,617}{30}$	$\frac{43\,867}{42}$

笔者还算得 $\omega_{21}=-\frac{1\,222\,277}{110}$.

推论 1　$S_k(n)$ 是 n 的 $k+1$ 次多项式,可设

$$S_k(n)=\sum_{i=1}^{k+1}x_in^i \qquad ①$$

其中

$$x_{k+1}=\frac{1}{k+1},x_k=\frac{1}{2}.$$

引理 4[5]　$S_{2k-1}(n)=f(n(n+1))(k\geqslant 2),S_{2k}(n)=(2n+1)g(n(n+1))(k\geqslant 1)$,其中 $f(n),g(n)$ 均为 n 的 k 次缺常数项多项式.

引理 5[3]　$S_2(n)\mid S_{2k}(n);S_3(n)\mid S_{2k+1}(n)$,这里 $k\in\mathbf{N}^*$,整除均值多项式的整除.

虽然已有 $S_k(n)$ 的递推公式求法(引理 1),待定系数求法(引理 4,推论 1)及直接表达式(引理 2,3),但均较繁,所以仍有很多文献在研究 $S_k(n)$ 的求法,笔者也作出了以下研究,还给出了多项式 $S_k(n)$ 的系数的性质.

2　$S_k(n)$ 的一个表达式

定义 1　$f(n)=\sum\limits_{i=0}^{l}a_in^i$ 是关于 n 的 $l(l\in\mathbf{N})$ 次多项式,规定它的微商 $f'(n)=\sum\limits_{i=0}^{l}ia_in^{i-1}$,积分$\int f(n)\mathrm{d}n=\sum\limits_{i=0}^{l}\frac{a_i}{i+1}n^{i+1}$.

该定义当然来源于《微积分》,但这里的$f(n)$是任意数集上的多项式.可以验证《微积分》中关于微商,积分的一般性质在这里仍成立(参见注释① 第 190 页).

定义 2　设 $f(n)$ 是多项式,$l\in\mathbf{N}$,规定

(1)$f^{(0)}(n)=f(n),f^{(l+1)}(n)=(f^{(l)}(n))',f^{(l)}(n)$叫做$f(n)$的 l 阶微商;

(2)$\int^{(0)}f(n)\mathrm{d}n=f(n),\int^{(l+1)}f(n)\mathrm{d}n=\int(\int^{(l)}f(n)\mathrm{d}n)\mathrm{d}n,\int^{(l)}f(n)\mathrm{d}n$ 叫做$f(n)$的 l 阶积分.

可证得$\int^{(l)}n\mathrm{d}n=\frac{1}{(l+1)!}n^{l+1}(l\in\mathbf{N})$.

引理 6　当 $k\geqslant 2$ 时,$S_k(n)$ 的一次项系数

$$a_k=(k+1)!\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i(1^k+2^k+\cdots+i^k)}{(i+1)(i+1)!(k-i)!}$$

证明　在 ① 中令 $n=1,2,\cdots,k+1$,得

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=1\\x_1\cdot 2+x_2\cdot 2^2+\cdots+x_{k+1}\cdot 2^{k+1}=1^k+2^k\\\qquad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\x_1\cdot(k+1)+x_2\cdot(k+1)^2+\cdots+x_{k+1}\cdot(k+1)^{k+1}=1^k+2^k+\cdots+(k+1)^k\end{cases}$$

① JERRY J A. 利用微积分求整数的方幂和.魏启宣,译.数学通报,1988(3).

由线性方程组的行列式解法(Cramer 规则,见注释 ① 的第 157 页),可求出 x_1,即 $S_k(n)$ 的一次项系数 a_k.这里要用到 Vandermonde 行列式(见注释 ① 的第 149 页):

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}^2 & \cdots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i)$$

$$\text{设 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k+1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$(k+1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^k \end{vmatrix} =$$

$$(k+1)! \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} (j-i) = (k+1)!\,k!\cdots 1!$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1^k & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1^k + 2^k & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{k-1} & 2^k & 2^{k+1} \\ 1^k + 2^k + 3^k & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^{k-1} & 3^k & 3^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^k + 2^k + \cdots + (k+1)^k & (k+1)^2 & (k+1)^3 & \cdots & (k+1)^{k-1} & (k+1)^k & (k+1)^{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1^k & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{k+1} \\ 1^k + 2^k & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^k + 2^k + \cdots + k^k & (k+1)^2 & (k+1)^3 & \cdots & (k+1)^{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & i^2 & i^3 & \cdots & i^{k+1} \\ 1 & (i+1)^2 & (i+1)^3 & \cdots & (i+1)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (k+1)^2 & (k+1)^3 & \cdots & (k+1)^{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^k \sum_{j=i+1}^{k+1} (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (j-1)^2 & (j-1)^3 & \cdots & (j-1)^{k+1} \\ (j+1)^2 & (j+1)^3 & \cdots & (j+1)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (k+1)^2 & (k+1)^3 & \cdots & (k+1)^{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^k \sum_{j=i+1}^{k+1} (-1)^{j+1} \frac{[(k+1)!]^2}{j^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & j-1 & (j-1)^2 & \cdots & (j-1)^{k-1} \\ 1 & j+1 & (j+1)^2 & \cdots & (j+1)^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^k \sum_{j=i+1}^{k+1} (-1)^{j+1} \frac{[(k+1)!]^2}{j^2} \cdot \frac{k!}{k+1-j} \cdot \frac{(k-1)!}{k-j} \cdot \cdots \cdot \frac{j!}{1} (j-2)! \cdot \cdots \cdot 1! =$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^k \sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{(-1)^{j+1}(k+1)!(k+1)!k! \cdot \cdots \cdot 1}{(j-1)!j^2(k+1-j)!} =$$

$$(k+1)!D \sum_{i=1}^{k} i^k \sum_{j=i}^{k} \frac{(-1)^j}{(j+1)(j+1)!(k-j)!}$$

所以　$a_k = x_1 = \frac{D_1}{D} = (k+1)! \sum_{i=1}^{k} i^k \sum_{j=i}^{k} \frac{(-1)^j}{(j+1)(j+1)!(k-j)!}$

以下证明

$$\sum_{i=1}^{k} i^k \sum_{j=i}^{k} \frac{(-1)^j}{(j+1)(j+1)!(k-j)!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^i(1^k+2^k+\cdots+i^k)}{(i+1)(i+1)!(k-i)!} \quad ②$$

成立,则引理 6 成立.

式②的左边 $= 1^k \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j}{(j+1)(j+1)!(k-j)!} +$

$2^k \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{(j+1)(j+1)!(k-j)!} + \cdots +$

$k^k \sum_{j=k}^{k} \frac{(-1)^j}{(j+1)(j+1)!(k-j)!} =$

$1^k \cdot \frac{(-1)^j}{(j+1)(j+1)!(k-j)!}\Big|_{j=1} + (1^k+2^k) \cdot \frac{(-1)^j}{(j+1)(j+1)!(k-j)!}\Big|_{j=2} + \cdots +$

$(1^k+2^k+\cdots+k^k) \cdot \frac{(-1)^j}{(j+1)(j+1)!(k-j)!}\Big|_{j=k} =$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i(1^k+2^k+\cdots+i^k)}{(i+1)(i+1)!(k-i)!}=\text{式②右边}.$$

引理7(注释①)　$S'_k(n)=kS_{k-1}(n)+a_k$,其中 $k\in\mathbf{N}^*$,$S_0(n)=n$,a_k 是 $S_k(n)$ 的一次项系数,$S'_k(n)$ 表示 $S_k(n)$ 的导数.

由引理3也可证得引理7.

引理7′　$S_k(n)=k\int S_{k-1}(n)\mathrm{d}n+a_kn$,其中 $k\in\mathbf{N}^*$,$\int S_{k-1}(n)\mathrm{d}n$ 表示 $S_{k-1}(n)$ 的积分,a_k 是 $S_k(n)$ 的一次项系数.

引理7′给出了一种求 $S_k(n)$ 的有效方法 — 积分法.

定理1　(1)$S_k(n)=\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k+1-i}a_in^{k+1-i}$,其中 a_i 是多项 $S_i(n)$ 的一次项系数,$a_0=1$;

(2)当 $k\geqslant 2$ 时,

$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{k}\frac{(i+1)!C_k^i}{k+1-i}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^j(1^i+2^i+\cdots+j^i)}{(j+1)(j+1)!(i-j)!}n^{k+1-i}$$

证明　(1)先对 l 用数学归纳法证明

$$S_k(n)=A_k^l\int^{(l)}S_{k-l}(n)\mathrm{d}n+\sum_{i=0}^{l-1}A_k^ia_{k-i}\int^{(i)}n\mathrm{d}n\,(l\leqslant k)\qquad③$$

由引理7′知 $l=1$ 时成立.

假设 l 时成立,又由引理7′,得

$$S_{k-l}(n)=(k-l)\int S_{k-l-1}(n)\mathrm{d}n+a_{k-l}n$$

所以 $S_k(n)=A_k^l\int^{(l)}[(k-l)\int S_{k-l-1}(n)\mathrm{d}n+a_{k-l}n]\mathrm{d}n+\sum\limits_{i=0}^{l-1}A_k^ia_{k-i}\int^{(i)}n\mathrm{d}n=$

$$A_k^{l+1}\int^{(l+1)}S_{k-l-1}(n)\mathrm{d}n+A_k^la_{k-l}\int^{(l)}n\mathrm{d}n+\sum_{i=0}^{l-1}A_k^ia_{k-i}\int^{(i)}n\mathrm{d}n=$$

$$A_k^{l+1}\int^{(l+1)}S_{k-l-1}(n)\mathrm{d}n+\sum_{i=0}^{l}A_k^ia_{k-i}\int^{(i)}n\mathrm{d}n$$

得 $l+1$ 时成立,所以③成立.

在③中令 $l=k$,由 $S_0(n)=n$,得

$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{k}A_k^ia_{k-i}\int^{(i)}n\mathrm{d}n=\sum_{i=0}^{k}\frac{A_k^i}{(i+1)!}a_{k-i}n^{i+1}=$$

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{i+1}a_{k-i}n^{i+1}=\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k-i+1}a_in^{k-i+1}$$

(2)由(1)和引理6可得.

3　多项式 $S_k(n)$ 系数的性质

定理 2　设 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{k+1}x_in^i$,则

(1) 有对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,有 $\sum_{i=1}^{k+1}x_in^i=\sum_{i=1}^{n}i^k$,特别的,$\sum_{i=1}^{k+1}x_i=1$;

(2) 当 $m\in\mathbf{N}^*$ 且 $m<\frac{k}{2}$ 时,$x_{k-2m}=0$;

(3) 当 $m\in\mathbf{N}^*$ 时,$S_{2m+1}(n)$ 的一次项系数 $x_1=0$.

定理 3　当 $l\in\mathbf{N}^*$ 时,$S_k^{(l)}(n)=kS_{k-1}^{(l-1)}(n)$

证明　由定理 1(1),可得

$$S_k^{(l)}(n)=\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k+1-i}a_iA_{k-i+1}^{l}n^{k+1-i-l}$$

$$S_{k-1}^{(l-1)}(n)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{k-1}^i}{k-i}a_iA_{k-i}^{l-1}n^{k+1-i-l}=\sum_{i=0}^{k}\frac{C_{k-1}^i}{k-i}a_iA_{k-i}^{l-1}n^{k+1-i-l}$$

从而可证定理 3 成立.

由定理 3,还可得

对于任意的 $l\in\mathbf{N}^*$,有 $\frac{S_k^{(l)}(n)}{k!}=\frac{S_{k+1}^{(l+1)}(n)}{(k+1)!}=\frac{S_{k+2}^{(l+2)}(n)}{(k+2)!}=\cdots$

定理 4　当 $k\in\mathbf{N}$ 时,设 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{k+1}x_in^i$,$S_{k-1}(n)=\sum_{i=1}^{k}y_in^i$,则 $ky_i=(i+1)x_{i+1}(i=1,2,\cdots,k)$.

证明　由引理 7,得 $\sum_{i=1}^{k+1}ix_in^{i-1}=\sum_{i=1}^{k}ky_in^i+a_k$,所以 $ky_i=(i+1)x_{i+1}(i=1,2,\cdots,k)$.

定理 5　下面的 $k\in\mathbf{N}^*$,整除均值数的整除:

(1) 若 $a=n,n+1$,或 $2n+1$,$2\nmid a$,a 的非 1 最小正约数大于 $2k+1$,则 $a\mid S_{2k}(n)$;

(2) 若 $b=n$,或 $n+1$,b 的非 1 最小正约数大于 $k+1$,则 $b^2\mid S_{2k+1}(n)$.

证明　(1) 由文献[3] 第 21 页中的表达式,可得

$S_{2k}(n)=\frac{A}{a_0}$,$a_0=2\times1\times3\times5\times\cdots\times(2k+1)$,且均有 $a\mid A$.

由题设可得 $(a,a_0)=1$. 可设 $A=aA_0$,得 $S_{2k}(n)=a\cdot\frac{A_0}{a_0}$.

因为 $S_{2k}(n)\in\mathbf{N}^*$,$(a,a_0)=1$,所以 $\frac{A_0}{a_0}\in\mathbf{N}^*$,$a\mid S_{2k}(n)$.

(2) 由文献[3] 第 22 页中 $S_{2k+1}(n)$ 的表达式,可得

$S_{2k+1}(n)=\frac{B}{b_0}$, $b_0=2\times2\times4\times6\times\cdots\times(2k+2)=2^{k+2}(k+1)!$,且均有 $b^2\mid B$.

由题设可得 $(b,b_0)=1$, 所以 $(b^2,b_0)=1$. 可设 $B=b^2B_0$, 得 $S_{2k+1}(n)=b^2\cdot\frac{B_0}{b_0}$.

因为 $S_{2k+1}(n)\in\mathbf{N}^*$, $(b^2,b_0)=1$,所以$\frac{B_0}{b_0}\in\mathbf{N}^*$, $b^2\mid S_{2k+1}(n)$.

推论 2 这里 $k\in\mathbf{N}^*$,整除均值数的整除:

(1) 若 $a=n,n+1$,或 $2n+1$, a 是素数, $a>2k+1$,则 $a\mid S_{2k}(n)$;

(2) 若 $b=n$,或 $n+1$, b 是素数, $b>k+1$,则 $b^2\mid S_{2k+1}(n)$.

定义 3 设 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{k+1}e_in^i$($e_i$ 是仅与 k 有关的常数, $i=1,2,\cdots,k+1$; $k,n\in\mathbf{N}^*$),我们规定 $S_k(x)=\sum_{i=1}^{k+1}e_ix^i$,这里 $x\in\mathbf{C}$($\mathbf{C}$ 为复数集).

如 $S_1(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$,所以 $S_1(2.3)=3.795$.

可把引理 4 改述为

引理 4′ $S_{2k-1}=f(x(x+1))(k\geqslant2)$, $S_{2k}=(2x+1)g(x(x+1))(k\geqslant1)$,其中 $x\in\mathbf{C}$, $f(x)$, $g(x)$ 均为 x 的 k 次缺常数项多项式.

由引理 4′ 容易验证(以下 $k\in\mathbf{N}^*$, $x,a\in\mathbf{C}$,整除均值多项式的整除):

定理 6 (1)$S_{2k-1}(a)=S_{2k-1}(-a-1)$;(2)$S_{2k}(a)=-S_{2k}(-a-1)$.

推论 3 (1)$x+a\mid S_{2k-1}(x)-S_{2k-1}(a-1)$;(2)$x+a\mid S_{2k}(x)+S_{2k}(a-1)$.

推论 4 (1)$x+2\mid S_{2k-1}(x)-1$;(2)$x+2\mid S_{2k}(x)+1$;(3)$x+2\mid S_k(x)+S_{k+1}(x)$.

参考文献

[1] 黄益驹,李鸿祥. n 个数的一种求和公式及其应用[J]. 数学通讯,1989(3)3-5.

[2] 褚学璞. 一个幂和定理摘译[J]. 数学通讯,1997(1):33-34.

[3] 刘会成. 自然数的方幂和的一个性质的证明[J]. 数学通讯,1994(2):20-22.

[4] 汪军龙. 求自然数方幂和的一个公式[J]. 湖南数学通讯,1994(6):45- 封底.

[5] 陈永林,储慧,张文军. 关于方幂和的一个性质及其初等证法[J]. 数学通讯,1996(3):32-33.

[6] 熊庭煌. 高等代数[M]. 武汉:中国地质大学出版社,1989.

一道复习参考题的变式

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(上)》(2003年人民教育出版社)复习参考题三B组第4题可以变成各种问题:

设等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前n项和分别是S_n,T_n且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+2}{n+3}(n\in\mathbf{N}^*)$,求:

(1) $\frac{a_5}{b_5}$;(2) $\frac{a_n}{b_n}$;(3) $\frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}$;(4) $\frac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}$;(5) $\frac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}$;

(6) $\frac{a_7}{b_9}$;(7) $\frac{a_n}{b_m}$;(8) $\frac{\sqrt{3}a_1-a_9}{a_5+2b_7-b_4}$;(9) $\frac{2a_1^3-a_3^2b_5}{a_2b_7^2+b_3^3}$;(10) $\frac{\sqrt[5]{2a_1^{10}-a_3^3b_5^7}}{\sqrt[3]{a_2^2b_7^4+b_3^6}}$.

解　(1) $\frac{a_5}{b_5}=\frac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)}{\frac{9}{2}(b_1+b_9)}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{7\times9+2}{9+3}=\frac{65}{12}$.

(2) 同(1)得$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{14n-5}{2n+2}$.

(3) $\frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\frac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\frac{S_{21}}{T_{21}}=\frac{149}{24}$.

(4) $\frac{a_1+a_{12}+a_{14}}{b_3+b_7+b_{17}}=\frac{a_1+(a_1+11d_1)+(a_1+13d_1)}{(b_1+2d_2)+(b_1+6d_2)+(b_1+16d_2)}=$

$\frac{a_1+8d_1}{b_1+8d_2}=\frac{S_{17}}{T_{17}}=\frac{121}{20}$($d_1$,$d_2$分别是等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公差).

(5) $\frac{a_2+a_5+a_{17}+a_{22}}{b_8+b_{10}+b_{12}+b_{16}}=\frac{2a_{12}+2a_{11}}{2b_{12}+2b_{11}}=\frac{a_1+a_{22}}{b_1+b_{22}}=\frac{S_{22}}{T_{22}}=\frac{156}{25}$.

(6) 由于等差数列的前n项和是“an^2+bn(a,b是常数)”型,又$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+2}{n+3}(n\in\mathbf{N}^*)$,所以可不妨设

$$S_n=kn(7n+2),T_n=kn(n+3)(\text{常数 }k\neq0)$$

进而,得

$$a_n=k(14n-5),b_n=k(2n+2)(\text{常数 }k\neq0)\qquad ①$$

所以

$$\frac{a_7}{b_9}=\frac{k(14\times7-5)}{k(2\times9+2)}=\frac{93}{20}$$

(7) $\dfrac{a_n}{b_m}=\dfrac{14n-5}{2m+2}$(用①).

(8) $\dfrac{\sqrt{3}a_1-a_9}{a_5+2b_7-b_4}=\dfrac{9\sqrt{3}-121}{65+32-10}=\dfrac{9\sqrt{3}-121}{87}$(用①).

(9) $\dfrac{2a_1^3-a_3^2b_5}{a_2b_7^2+b_3^3}=\dfrac{2\times9^3-37^2\times12}{23\times16^2+8^3}=-\dfrac{1\,497}{640}$.

(10) $\dfrac{\sqrt[5]{2a_1^{10}-a_3^3b_5^7}}{\sqrt[3]{a_2^2b_7^4+b_3^6}}=\dfrac{\sqrt[5]{2\times9^{10}-37^2\times12^7}}{\sqrt[3]{23^2\times16^4+8^6}}=-\dfrac{\sqrt[5]{1\,808\,015\,001\,822}}{32\cdot\sqrt[3]{1\,466}}$

实际上,这些问题都可由结论①轻松的解决,当然(1)～(5)的解法更具有技巧性.由①还可解决(8),(9),(10)的一般情形:分子,分母是 a_i,b_j 的齐次式的分式的值均可求得(当然要注意该分式要有意义).

看一个递推数列通项的求法

文献[1]用迭代法解答了下面的一道例题:

例　求由以下递推式确定的数列$\{u_n\}_{n\geqslant 0}$的通项公式:

$$u_n^3u_{n-1}-2u_{n-1}^2-u_n^3u_{n-2}+2u_{n-1}u_{n-2}=0(n\geqslant 2),u_0=1$$

解　得$(u_n^3-2u_{n-1})(u_{n-1}-u_{n-2})=0(n\geqslant 2)$　①

(1) 当$u_n^3-2u_{n-1}=0$时,$u_n=2^{\frac{1}{3}}u_{n-1}^{\frac{1}{3}}$,反复利用该式,得

$$u_n=2^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}}u_{u-2}^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}}u_{n-2}^{\frac{1}{3^2}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}}u_{n-3}^{\frac{1}{3^3}}=\cdots=$$

$$2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}u_0^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})}$$

$$u_n=2^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})}\qquad ②$$

(2) 当$u_{n-1}-u_{n-2}=0$时,有$u_{n-1}=c$.由$u_0=1$有$c=1$.

$$u_n=1\qquad ③$$

以上解答是错误的,并且其错误有一定的隐蔽性和代表性,所以有必要在这里剖析其错误.

在原题中令$n=2$,得

$$(u_2^3-2u_1)(u_1-1)=0$$

$$u_1=1\text{ 或 }u_2^3=2u_1$$

u_1,u_2均不能确定(可以取任意实数甚至复数),而由②,③得$u_1=1$或$\sqrt[3]{2}$,$u_2=1$或$2^{\frac{4}{9}}$.

错误之一是,由①不能得到$u_n^3-2u_{n-1}=0(n\geqslant 2)$恒成立或$u_{n-1}-u_{n-2}=0(n\geqslant 2)$恒成立,比如$2\leqslant n\leqslant 10$时,后者成立而$n\geqslant 11$时前者成立;错误之二是,即使前者恒成立,也只能得到

$$u_n=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}}u_1^{\frac{1}{3^{n-1}}}=2^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{n-1}})}u_1^{\frac{1}{3^{n-1}}}(n\in\mathbf{N}^*)$$

只有当$u_1=2^{\frac{1}{3}}$时,才有$u_n=2^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})}(n\in\mathbf{N}^*)$.

定理　在条件①下,若又有$u_1\neq 0,\pm\sqrt{2},u_0$,则

(1) $u_n^3=2u_{n-1}(n\geqslant 2)$;

(2) 若 $u_n \in \mathbf{R}(n \in \mathbf{N}^*)$,则 $u_n = 2^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{n-1}})}u_1^{\frac{1}{3^{n-1}}}(n \in \mathbf{N}^*)$

证明 (1) 用第二数学归纳法来证.

当 $n = 2$ 时成立:在 ① 中令 $n = 2$ 再由 $u_1 \neq u_0$ 得 $u_2^3 = 2u_1$.

假设 $n = 2,3,\cdots,k(k \geqslant 2)$ 时均成立,得

$$u_2^3 = 2u_1, u_3^3 = 2u_2, \cdots, u_{k-1}^3 = 2u_{k-2}, u_k^3 = 2u_{k-1}$$

若 $u_k = u_{k-1}$;得 $u_{k-1} = 0, \pm\sqrt{2}$;再由 $u_{k-1}^3 = 2u_{k-2}$ 得 $u_{k-2} = 0, \pm\sqrt{2}$;$\cdots$;最后可得 $u_1 = 0, \pm\sqrt{2}$.这与题设矛盾!所以 $u_k \neq u_{k-1}$.再在 ① 中令 $n = k + 1$ 可得 $u_{k+1}^3 = 2u_k$.得 $n = k + 1$ 时成立.所以结论(1) 成立.

(2) 当 $u_1 = 0$ 时,由(1) 得 $u_n = 0(n \in \mathbf{N}^*)$ 此时结论(2) 成立.

当 $u_1 \neq 0$ 时,由(1) 得

$$|u_n|^3 = 2|u_{n-1}|$$

$$3\ln|u_n| = \ln|u_{n-1}| + \ln 2$$

$$\ln|u_n| - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{3}(\ln|u_{n-1}| - \frac{1}{2}\ln 2)$$

$$|u_n| = 2^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{n-1}})}|u_1|^{\frac{1}{3^{n-1}}}.$$

由(1) 知 u_n 与 u_{n-1} 同号,所以 u_n 与 u_1 同号,得结论(2) 成立.

参考文献

[1] 胡端平,鲁晓成.组合数学[M].武汉:武汉大学出版社,2001.

$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ 的推广

众所周知:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)(n \in \mathbf{N}^*) \qquad ①$$

还可得:

$1^3 = 1,$

$2^3 = 3 + 5,$

$3^3 = 7 + 9 + 11,$

$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19,$

…

注意到右边的项数是左边幂的底数,右边的平均数是左边底数的平方,所以以上各式均成立.还可得到一般的情形:

$$n^3 = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \cdots + (n^2 + n - 1)(n \in \mathbf{N}^*) \qquad ②$$

$1^4 = 1,$

$2^4 = 7 + 9,$

$3^4 = 25 + 27 + 29,$

$4^4 = 13 + 15 + 17 + 19,$

…

$$n^4 = (n^3 - n + 1) + (n^3 - n + 3) + \cdots + (n^3 + n - 1)(n \in \mathbf{N}^*) \qquad ③$$

由 ②,③,可以猜想:

$$n^k = (n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + \cdots + (n^{k-1} + n - 1)(n, k \in \mathbf{N}^*, k \geqslant 2) \qquad ④$$

仅用 ① 就可给出 ④ 的简洁证明:

④ 的右边 $= [(n^{k-1} - n) + 1] + [(n^{k-1} - n) + 3] + \cdots + [(n^{k-1} - n) + (2n - 1)] =$
$n(n^{k-1} - n) + [1 + 3 + \cdots + (2n - 1)] =$
$n^k - n^2 + n^2 = n^k =$ ④ 的左边.

读者可能已经体会到了数学发现的乐趣,但科学的探索是无止境的,请你们再思考:正整数幂 $n^k(n, k \in \mathbf{N}^*, k \geqslant 2)$ 还能表示成其他的等差数列的前几项和吗?有一般的公式吗?比如,下式成立:

$$n + (n + 1) + \cdots + (3n - 2) = (2n - 1)^2$$

两类分式递推数列通项的又一初等求法

文献[1],[2]分别用一种初等方法——待定系数法求出了由递推式

$$a_{n+1}=\frac{ca_n+d}{aa_n+b} \qquad ①$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+d}{2a_n+b} \qquad ②$$

确定的数列$\{a_n\}$的通项公式,本文再给出它们的另外初等求法.

定理1 当 $ad\neq bc$ 时,若 α,β 是方程

$$ax^2+(b-c)x-d=0 \qquad ③$$

的两个复数根,且 a_1 不是②的根,则由①确定的数列$\{a_n\}$满足$\{\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}\}$是等比数列,且$\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}(\frac{c-a\beta}{c-a\alpha})^{n-1}$.

(当 $ad=bc$ 时,由①易求出通项 a_n;在定理1中当③有两个不等根时,用定理1的结论易求出通项 a_n;在定理1中当③有两个等根时,只能用文献[1]的方法求出通项 a_n.)

证明 先证$\frac{c}{a}$不是(3)的根(易知 $a\neq0$):否则可得 $ad=bc$.所以 $\alpha,\beta\neq\frac{c}{a}$.

再证 a_n 不是③的根:因为 a_1 不是③的根,所以只需证 $a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$不是③的根.

假设某个 a_{n+1} 是③的根,得

$$d=aa_{n+1}^2+(b-c)a_{n+1}$$

$$d-ba_{n+1}=a_{n+1}(aa_{n+1}-c)$$

由此还可得 $aa_{n+1}-c\neq0$:

否则 $aa_{n+1}=c,ba_{n+1}=d;ada_{n+1}=bca_{n+1}$.

若 $a_{n+1}=0$,得 $c=d=0$,与 $ad\neq bc$ 矛盾!所以 $a_{n+1}\neq0$,得 $ad=bc$,矛盾!所以 $aa_{n+1}-c\neq0$.

由①,得 $aa_{n+1}a_n+ba_{n+1}=ca_n+d$

$$(aa_{n+1}-c)a_n = d - ba_{n+1} = a_{n+1}(aa_{n+1}-c)$$

$$a_{n+1} = a_n$$

进而得 $a_{n+1} = a_1$，由假设知 a_1 是 ③ 的根，又与题设矛盾！所以 a_n 不是 ③ 的根，$a_n \neq \alpha, \beta$.

(要证明定理 1，须先证定理 1 的结论中的所有“分母不为 0”，文献[2] 指出了文献[1] 的此种错误.)

下面证明 $\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha} \Big/ \dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha} = \dfrac{c-a\beta}{c-a\alpha}$ 即可：

$$\text{左边} = \frac{\dfrac{ca_n+d}{ca_n+b}-\beta}{\dfrac{ca_n+d}{ca_n+b}-\alpha} \cdot \frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} = \frac{(c-a\beta)a_n+(d-b\beta)}{(c-a\alpha)a_n+(d-b\alpha)} \cdot \frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} = \frac{c-a\beta}{c-a\alpha}$$

(最后一步：由 α, β 是 ③ 的根，得 $d-b\beta = -\beta(c-a\beta), d-b\alpha = -\alpha(c-a\alpha)$.)

例 1　(2007 年全国卷(Ⅰ)理科压轴题) 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 2, a_{n+1} = (\sqrt{2}-1)(a_n+2)(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若数列$\{b_n\}$中 $b_1 = 2, b_{n+1} = \dfrac{3b_n+4}{2b_n+3}(n \in \mathbf{N}^*)$，证明：$\sqrt{2} < b_n \leqslant a_{4n-3}$.

解　(1) 用待定系数法易求得

$$a_n = (2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^{n-1} + \sqrt{2}$$

(2) 在定理 1 中含 $a = 2, b = c = 3, d = 4$，得方程 ③ 即

$$2x^2 - 4 = 0$$

其两个根为 $\alpha = \sqrt{2}, \beta = -\sqrt{2}$，得

$$\frac{b_n+\sqrt{2}}{b_n-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$b_n = \frac{4}{(4+3\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)^{4n-4}-\sqrt{2}} + \sqrt{2}$$

所以$\sqrt{2} < b_n$. 又 $a_{4n-3} = (2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^{4n-4} + \sqrt{2}$，由此易证得 $b_n \leqslant a_{4n-3}$(等价于 $1 \geqslant (\sqrt{2}-1)^{4n-4}$).

定理 2　若 α, β 是方程

$$x^2 + bx - d = 0 \qquad ④$$

的两个实数根，且 a_1 不是 ④ 的根，则由 ② 确定的数列$\{a_n\}$满足

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\left(\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}\right)^2 \quad ⑤$$

$$\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\left(\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}\right)^{2^{n-1}} \quad ⑥$$

(当 a_1 是 ④ 的根时,可用数学归纳法证得 $a_n=a_1$(见文献[2]);当 $\alpha\neq\beta$ 时,由 ⑥ 可求出通项 a_n;当 $\alpha=\beta$ 时,只能用文献[2] 的方法求通项 a_n.)

证明 可得 $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{(a_n-\alpha)^2}{2a_n+b}$,$a_{n+1}-\beta=\dfrac{(a_n-\beta)^2}{2a_n+b}$

同它们及数学归纳法可证 $a_n\neq\alpha,\beta$.

从而可得 ⑤,⑥ 成立.

例 2 (2007 年广东卷理科压轴题) 已知函数 $f(x)=x^2+x-1$,α,β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根($\alpha>\beta$),$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数,设 $a_1=1$,$a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求 α,β 的值;

(2) 证明:$a_n>\alpha(n\in\mathbf{N}^*)$;

(3) 记 $b_n=\ln\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$,求数列$\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解 (1)$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$,$\beta=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$.

(2) 得 $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+1}{2a_n+1}$

在定理 2 中令 $a_1=b=d=1$,此时方程 ④ 即 $f(x)=0$,由 ⑥ 可求得

$$a_n=\frac{\sqrt5}{\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^{2^n}-1}+\alpha$$

所以结论(2) 显然成立.

(3) 由 ⑥,得 $b_n=\ln\left|\dfrac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}\right|^{2^{n-1}}=2^{n-1}\ln\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}$

所以$\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,可得其前 n 项和 $S_n=(2^{n+2}-4)\ln\dfrac{\sqrt5+1}{2}$.

例 3 (2007 年四川卷理科倒数第二题) 已知函数 $f(x)=x^2-4$,设曲线 $y=f(x)$ 在点$(x_n,f(x_n))$ 处的切线与 x 轴的交点为$(x_{n+1},0)(n\in\mathbf{N}^*)$,其中 x_1 为 正实数.

(1) 用 x_n 表示 x_{n+1};

(2) 求证:对一切正整数 n, $x_{n+1} \leqslant x_n$ 的充要条件是 $x_1 \leqslant 2$;

(3) 若 $x_1 = 4$,记 $a_n = \lg \frac{x_n + 2}{x_n - 2}$,证明数列 $\{a_n\}$ 成等比数列,并求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解　(1) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n}(x_n \neq 0)$.

(2) 略.

(3) 得 $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$, $x_1 = 4$.

在定理 2 中令 $a_n = x_n$, $a_1 = d = 4$, $b = 0$,此时方程④即 $t^2 - 4 = 0$,其两个根为 $\alpha = 2$, $\beta = -2$,由⑥,得

$$\frac{x_n + 2}{x_n - 2} = \left(\frac{x_1 + 2}{x_1 - 2}\right)^{2^{n-1}} = 3^{2^{n-1}}$$

$$a_n = \lg \frac{x_n + 2}{x_n - 2} = 2^{n-1} \lg 3$$

所以 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,易求得 $x_n = \frac{2(3^{2^{n-1}} + 1)}{3^{2^{n-1}} - 1}$.

参考文献

[1] 包志秀. 妙求 $a_n = \frac{c \cdot a_{n-1} + d}{a \cdot a_{n-1} + b}$ 的通项[J]. 数学通讯,2006(9):19-20.

[2] 甘志国. 两类递推数列通项的求法[J]. 数学通讯,2006(17):21-22.

一类数列通项的求法与三道高考题

文献[1]用一种初等方法——待定系数法求出了由递推式

$$a_{n+1}=\frac{ca_n+d}{aa_n+b}$$

确定的数列$\{a_n\}$的通项公式.文献[2]用待定系数法也求出了由递推式

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+d}{2a_n+b} \quad ①$$

确定的数列$\{a_n\}$的通项公式:

(1)当$a_1^2+ba_1-d=0$时,可用数学归纳法证得$a_n=a_1$.

(2)当$a_1^2+ba_1-d\neq 0$时,设$a_n=b_n+t$,其中t满足

$$t^2+bt-d=0 \quad ②$$

进而,得$b_{n+1}=\dfrac{b_n^2}{2b_n+b'}$(其中$b'=b+2t$).

可用数学归纳法证得$b_n\neq 0$,所以

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{2}{b_n}+\frac{b'}{b_n^2}$$

设$\dfrac{1}{b_n}=c_n$,得$c_{n+1}=2c_n+b'c_n^2$

$$b'c_{n+1}+1=(b'c_n+1)^2$$

$$b'c_n+1=(b'c_1+1)^{2^{n-1}}$$

进而,求得

$$a_n=\frac{b+2t}{\left(\dfrac{a_1+b+t}{a_1-t}\right)^{2^{n-1}}-1}+t\text{(其中 }t\text{ 满足②)} \quad ③$$

此时还可证得

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{(a_n-\alpha)^2}{2a_n+b},a_{n+1}-\beta=\frac{(a_n-\beta)^2}{2a_n+b}$$

(用它们和数学归纳法可证$a_n\neq\alpha,\beta$)

所以
$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\left(\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}\right)^2$$

$$\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\left(\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}\right)^{2^{n-1}} \quad ④$$

由式 ④ 也可求出通项公式 a_n.

用以上结论,我们来解答 2007 年的三道理科高考题.

例 1 (广东 · 21) 已知函数 $f(x)=x^2+x-1$, α,β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根($\alpha>\beta$), $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数,设 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求 α,β 的值;

(2) 证明: $a_n>\alpha(n\in\mathbf{N}^*)$;

(3) 记 $b_n=\ln\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解 (1) $\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) 得 $a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2a_n+1}$

在式 ① 中令 $a_1=b=d=1$,在结论(2) 的式 ③ 中选 $t=\alpha$,得

$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n}-1}+\alpha$$

所以结论(2) 显然成立.

(3) 由结论 ④,得

$$b_n=\ln\left|\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}\right|^{2^{n-1}}=2^{n-1}\ln\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}$$

所以 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,可得其前 n 项和 $S_n=(2^{n+2}-4)\times\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

例 2 (四川 · 21) 已知函数 $f(x)=x^2-4$,设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)(n\in\mathbf{N}^*)$,其中 x_1 为正实数.

(1) 用 x_n 表示 x_{n+1};

(2) 求证:对一切正整数 n, $x_{n+1}\leqslant x_n$ 的充要条件是 $x_1\geqslant 2$;

(3) 若 $x_1=4$,记 $a_n=\lg\frac{x_n+2}{x_n-2}$,证明数列 $\{a_n\}$ 成等比数列,并求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解 (1) $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}(x_n\neq 0)$.

(2) 略.

(3) 得 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+4}{2x_n},x_1=4$.

在式①中令 $a_n=x_n,a_1=d=4,b=0$,此时方程②即 $t^2-4=0$,其两个根为 $\alpha=2,\beta=-2$,由结论④,得

$$\frac{x_n+2}{x_n-2}=\left(\frac{x_1+2}{x_1-2}\right)^{2^{n-1}}=3^{2^{n-1}}$$

$$a_n=\lg\frac{x_n+2}{x_n-2}=2^{n-1}\lg 3$$

所以 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,易求得 $x_n=\dfrac{4}{3^{2^{n-1}}-1}+2$.

我们再来看 2007 年高考全国卷(Ⅰ)理科压轴题:

例 3　已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=2,a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)(a_n+2)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 中 $b_1=2,b_{n+1}=\dfrac{3b_n+4}{2b_n+3}(n\in\mathbf{N}^*)$,证明:$\sqrt{2}<b_n\leqslant a_{4n-3}$.

解　(1) 用待定系数法易求得

$$a_n=(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^{n-1}+\sqrt{2}$$

(2) 下面用文献[1]的方法来求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

令 $b_n=c_n+\sqrt{2}$,得

$$c_{n+1}=\frac{(3-2\sqrt{2})c_n}{2c_n+2\sqrt{2}+3}$$

可以两边取倒数后,求得

$$b_n=\frac{4}{(4+3\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)^{4n-4}-\sqrt{2}}+\sqrt{2}$$

又
$$a_{4n-3}=(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^{4n-4}+\sqrt{2}$$

易证得 $b_n\leqslant a_{4n-3}$(等价于 $1\geqslant(\sqrt{2}-1)^{4n-4}$).

从以上三道高考题的解法说明,我们应重视用待定系数法求数列的通项公式.

参考文献

[1] 包志秀,妙求 $a_n=\dfrac{c\cdot a_{n-1}+d}{a\cdot a_{n-1}+b}$ 的通项[J].数学通讯,2006(9):19-20.

[2] 甘志国.两类递推数列通项的求法[J].数学通讯,2006(17):21-22.

对一道联考压轴题的研究

湖北省部分重点中学2007届高三第二次联考《理科数学试卷》的压轴题是：

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$有如下关系：$a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n}), b_n=\frac{a_n+1}{a_n-1}$.

(1) 求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 令$c_n=\frac{a_n-1}{a_{n+1}-1}$，求数列$\{c_n\}$的通项公式；

(3) 设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，当$n\geqslant 2$时，求证：$S_n<n+\frac{4}{3}$.（笔者注：$n=1$时也成立）

解　(1) 由$b_n=\frac{a_n+1}{a_n-1}$，得$a_n=\frac{b_n+1}{b_n-1}$，代入$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$，得$\frac{b_{n+1}+1}{b_{n+1}-1}=\frac{b_n^2+1}{b_n^2-1}, 1+\frac{2}{b_{n+1}-1}=1+\frac{2}{b_n^2-1}, b_{n+1}=b_n^2$.

又由$b_1=3$及数学归纳法可证$b_n>0$.

所以，得$\lg b_{n+1}=2\lg b_n, \lg b_n=(\lg b_1)\cdot 2^{n-1}, b_n=3^{2^{n-1}}$.

(2) $a_n=\frac{3^{2^{n-1}}+1}{3^{2^{n-1}}-1}, c_n=3^{2^{n-1}}+1$.

(3) $a_n=1+\frac{2}{3^{2^{n-1}}-1}$，题意即证：

数列$\left\{\frac{1}{3^{2^{n-1}}-1}\right\}$的前$n$项和$T_n<\frac{2}{3}$.

而
$$\frac{2}{3}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4})^2+\cdots$$

所以只需证$\frac{1}{3^{2^{n-1}}-1}\leqslant\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{n-1}=\frac{1}{2^{2n-1}}$，即

$$3^{2^{n-1}}-1\geqslant 2^{2n-1}$$

只需证 $2^{n-1} \geqslant 2n - 1$,这用数学归纳法极易获证.

问题 设 $t_n = \dfrac{1}{3^{2^{n-1}} - 1}(n \in \mathbf{N}^*)$,求数列$\{t_n\}$的前 n 项和 T_n 的上确界 α(由单调有界数列必有极限知 α 存在:$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$,由下文知 $\alpha < \dfrac{55\ 783}{87\ 440}$),$\alpha$ 是有理数还是无理数?

易证$(2^t - 1)(n - t) < 2^{n-1}(n, t \in \mathbf{N}^*)$.

当 $n < t$ 时显然成立.下面用数学归纳法证 $n \geqslant t + 1$ 时成立:

(1)$n = t + 1$ 时成立:$2^t - 1 < 2^t$

(2) 假设 $n = k(k \geqslant t + 1)$ 时成立:$(2^t - 1)(k - t) < 2^{k-1}$.

得$(2^t - 1)(k + 1 - t) = (2^t - 1)(k - t) + (2^t - 1) < 2^{k-1} + 2^{k-1}$(因为$k \geqslant t + 1$,所以 $2^t - 1 < 2^{k-1}$)

得 $n = k + 1$ 时成立,所以要证结论成立.

得
$$\frac{1}{3^{2^{n-1}} - 1} < \frac{1}{3^{(2^t-1)(n-t)}}(n \geqslant t + 1, n, t \in \mathbf{N}^*)$$

选 $t = 2$,可得 $T_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + (\dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{27^2} + \cdots + \dfrac{1}{27^{n-2}} + \cdots) = \dfrac{69}{104}$(此结果比 $T_n < \dfrac{2}{3}$ 要精确).

选 $t = 3$,可得 $T_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{80} + [\dfrac{1}{3^7} + (\dfrac{1}{3^7})^2 + \cdots + (\dfrac{1}{3^7})^{n-3} + \cdots] = \dfrac{55\ 783}{87\ 440}$(此结果比 $T_n < \dfrac{69}{104}$ 要精确).

用这种方法求 T_n 的上界时,t 越大,得到的上界越精确(因为未被放大的项数在增加),但右边式子的前 t 项和很难求.盼望读者能用新的方法求出 T_n 的上确界 α.

对 2003 年全国高考卷理科数学压轴题的研究

1　压轴题及其参考解答

2003 年普通高考全国卷理科数学压轴是一道很新颖的题：

22.(1) 设$\{a_n\}$是集合$\{2^t+2^s \mid 0 \leqslant s < t$,且$s,t \in \mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排列成的数列，即$a_1=3, a_2=5, a_3=6, a_4=9, a_5=10, a_6=12, \cdots$.

将数列$\{a_n\}$的各项按照上小下大，左小右大的原则写成如下的三角形数表：

$$
\begin{array}{c}
3 \\
5 \quad 6 \\
9 \quad 10 \quad 12 \\
— \quad — \quad — \quad — \\
— \quad — \quad — \quad — \quad — \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{array}
$$

1) 写出这个三角形数表第四行、第五行的各数；

2) 求a_{100}.

(2) 设$\{b_n\}$是集合$\{2^t+2^s+2^r \mid 0 \leqslant r < s < t$,且$r,s,t \in \mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排列成的数列.已知$b_k=1\ 160$,求$k$.

解　(1)1) 第四行：17　18　20　24；

第五行：33　34　36　40　48.

2) 解法一：设$a_{100}=2^{t_0}+2^{s_0}$,只需确定整数t_0, s_0.

数列$\{a_n\}$中小于2^{t_0}的项构成的子集为

$$\{2^t+2^s \mid 0 \leqslant s < t < t_0\}$$

其元素个数为$C_{t_0}^2=\frac{1}{2}t_0(t_0-1)$

依题意，得$\frac{1}{2}t_0(t_0-1) < 100$

满足此式的最大整数$t_0=14$.

又$100-C_{14}^2=s_0+1$,得$s_0=8$.

所以 $a_{100}=2^{14}+2^{8}=16\ 640$.

解法二:n 为 a_n 的下标.

三角形数表第一行第一个元下标为 1,

第二行第一个元下标为$\frac{2\cdot(2-1)}{2}+1=2$,

……

第 t 行第一个元下标为$\frac{t(t-1)}{2}+1$,第 t 行第s 个元下标为$\frac{t(t-1)}{2}+s$,该元等于 $2^{t}+2^{s-1}$.

据此可判断 a_{100} 所在的行:

因为$\frac{14\cdot(14-1)}{2}<100\leqslant\frac{15\cdot(15-1)}{2}$,所以 a_{100} 是第 14 行的第 9 个元

$$a_{100}=2^{14}+2^{9-1}=16\ 640$$

(2) $b_k=1\ 160=2^{10}+2^{7}+2^{3}$,

令 $M=\{c\in B\mid c<1\ 160\}$(其中 $B=\{2^{t}+2^{s}+2^{r}\mid 0\leqslant r<s<t\}$),

因为 $M=\{c\in B\mid c<2^{10}\}\cup\{c\in B\mid 2^{10}<c<2^{10}+2^{t}\}\cup\{c\in B\mid 2^{10}+2^{7}<c<2^{10}+2^{7}+2^{3}\}$.

所以可由此求出 M 的元素个数:

$\{c\in B\mid c<2^{10}\}=\{2^{t}+2^{s}+2^{r}\mid 0\leqslant r<s<t<10\}$,其元素个数为 C_{10}^{3};

$\{c\in B\mid 2^{10}<c<2^{10}+2^{7}\}=\{2^{10}+2^{s}+2^{r}\mid 0\leqslant r<s<7\}$,其元素个数为 C_{7}^{2};

$\{c\in B\mid 2^{10}+2^{7}<c<2^{10}+2^{7}+2^{3}\}=\{2^{10}+2^{7}+2^{r}\mid 0\leqslant r<3\}$,其元素个数为 C_{3}^{1}.

所以 $k=C_{10}^{3}+C_{7}^{2}+C_{3}^{1}+1=145$.

2 一般情形的结论

由以上解法可得

定理 1 设$\{A_n\}$是集合$\{a^{n_1}+\cdots+a^{n_k}\mid 0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k,n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbf{N}\}(a\geqslant 2)$中的所有元素从小到大排列成的数列,则

(1) 若满足 $C_m^k<n$ 的最大整数 m 为 n_k,

满足 $C_m^{k-1}<n-C_{n_k}^{k}$ 的最大整数 m 为 n_{k-1},

满足 $C_m^{k-2}<n-C_{n_k}^{k}-C_{n_{k-1}}^{k-1}$ 的最大整数 m 为 n_{k-2},

……

满足 $C_m^{1}<n-C_{n_k}^{k}-C_{n_{k-1}}^{k-1}-\cdots-C_{n_2}^{2}$ 的最大整数 m 为 n_1,

则 $A_n = a^{n_1} + \cdots + a^{n_k}$.

(2) 若 $A_n = a^{n_1} + \cdots + a^{n_k}(0 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k, n_1, n_2, \cdots, n_k \in \mathbf{N})$，则 $n = 1 + C_{n_1}^1 + C_{n_2}^1 + \cdots + C_{n_k}^k$.

注　也可将定理1(1)中的"$C_m^k < n, C_m^{k-1} < n - C_{n_k}^k, \cdots, C_m^{k-2} < n - C_{n_k}^k - C_{n_{k-1}}^{k-1}, C_m^1 < n - C_{n_k}^k - C_{n_{k-1}}^{k-1} - \cdots - C_{n_2}^2$"分别改为等价的式子"$C_m^k + 1 \leqslant n$, $C_m^{k-1} + 1 \leqslant n - C_{n_k}^k, C_m^{k-2} + 1 \leqslant n - C_{n_k}^k - C_{n_{k-1}}^{k-1}, \cdots, C_m^1 + 1 \leqslant n - C_{n_k}^k - C_{n_{k-1}}^{k-1} - \cdots - C_{n_2}^2$".

推论　设$\{A_n\}$为集合$\{a^{n_1} + a^{n_2} \mid 0 \leqslant n_1 < n_2, n_1, n_2 \in \mathbf{N}\}(a \geqslant 2)$中所有的元素从小到大排列成的数列，则 $A_n = a^{n_1} + a^{n_2}$，其中 $n_2 = \left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]$，$n_1 = n - 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}\right]$("[ ]"表示取整，下同).

3　再研究

3.1　压轴题22.(1)的另外解法

设 $a_n = 2^{t_n} + 2^{s_n}(0 \leqslant s_n < t_n, s_n, t_n \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}^*)$，则有序数对$(s_n, t_n)$的序列即

$$(0,1);(0,2),(1,2);(0,3),(1,3),(2,3);\cdots$$

从而得到两个数列：

$\{S_n\}$：0；0，1；0，1，2；…

$\{t_n\}$：1；2，2；3，3，3；…

本书中"全体奇合数组成数列的一个通项公式"部分已给出了它们的通项的求法，结果为

定理 2　(1) $S_n = n - 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}\right]$；

(2) $t_n = \left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]$.

3.2　压轴题22.(1)的类似问题

问题　设$\{a'_n\}$是集合$\{2^t + 2^s \mid 0 \leqslant s \leqslant t, s, t \in \mathbf{N}\}$中所有的元素从小到大排列成的数列，求通项 a'_n.

解　设 $a'_n = 2^{t'_n} + 2^{s'_n}(0 \leqslant s'_n \leqslant t'_n, s'_n, t'_n \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}^*)$，则有序数对$(s'_n, t'_n)$的序列即

$$(0,0);(0,1),(1,1);(0,2),(1,2),(2,2);\cdots$$

从而得到两个数列：

$\{s'_n\}$：0；0，1；0，1，2；…

$\{t'_n\}$:0;1,1;2,2,2;…

得 $s'_n = s_n, t'_n = t_n - 1$.

$a'_n = 2^{t'_n} + 2^{s'_n}$,其中 $s'_n = n - 1 - \frac{1}{2}[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}]\cdot[\frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}]$, $t'_n = [\frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}]$.

二阶递归数列通项的初等求法

满足 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$(p,q 为常数,$q\neq 0$,a_1,a_2 已知)的数列$\{a_n\}$叫做二阶递归数列.在大学数学《组合数学》[1] 中虽有专门的方法求其通项,但这种题型已涉及高考中(见2006年福建卷文科压轴题),所以在高中阶段研究此类数列通项的求法很有必要(本文的求法很简洁).

1　当 $p^2+4q=0$ 时

例1　在数列$\{a_n\}$中,$a_1=5,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n(n\in \mathbf{N}^*)$,求$\{a_n\}$的通项公式.

解　当 $x\neq 2$ 时,得

$$a_{n+2}-xa_{n+1}=(2-x)a_{n+1}+3a_n=(2-x)(a_{n+1}-\frac{3}{x-2}a_n) \qquad ①$$

令 $x=\frac{3}{x-2}$,得 $x^2-2x-3=0,x=-1,3$.

选 $x=-1$,得

$$a_{n+2}+a_{n+1}=3(a_{n+1}+a_n)$$

所以$\{a_{n+1}+a_n\}$是首项为 $a_1+a_2=7$,公比为3的等比数列,得

$$a_{n+1}+a_n=7\cdot 3^{n-1} \qquad ②$$

又在①中选 $x=3$,得$\{a_{n+1}-3a_n\}$是公比为 -1 的等比数列,求得

$$a_{n+1}-3a_n=-13\cdot(-1)^{n-1} \qquad ③$$

由②,③,得

$$a_n=\frac{7}{12}\cdot 3^n-\frac{13}{4}(-1)^n$$

下面给出一般情形的解法:

当 $x\neq p$ 时,得

$$a_{n+2}-xa_{n+1}=(p-x)a_{n+1}+qa_n=(p-x)(a_{n+1}-\frac{q}{x-p}a_n) \qquad ④$$

令 $x=\frac{q}{x-p}$,得

$$x^2-px-q=0(由 q\neq 0,得 x\neq p) \qquad ⑤$$

由 $p^2+4q\neq 0$,知方程⑤有两个不相等的复数根 $x_0,p-x_0(p\neq 2x_0)$.

在④中令 $x = x_0, p - x_0$,得

$$a_{n+2} - x_0a_{n+1} = (p - x_0)(a_{n+1} - x_0a_n)$$

$$a_{n+1} - x_0a_n = (a_2 - x_0a_1)(p - x_0)^{n-1} \qquad ⑥$$

在④中令 $x = p - x_0$,可得

$$a_{n+1} - (p - x_0)a_{n+1} = [a_2 - (p - x)a_1]x_0^{n-1} \qquad ⑦$$

由⑥,⑦,得

$$a_n = \frac{[a_2 - (p - x_0)a_1]x_0^{n-1} - (a_2 - x_0a_1)(p - x_0)^{n-1}}{2x_0 - p}$$

(其中 x_0 是方程⑤的一个根,已证 $2x_0 - p \neq 0$).

2 当 $p^2 + 4q = 0$ 时

例 2 在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 当 $x \neq 4$ 时,得

$$a_{n+2} - xa_{n+1} = (4 - x)a_{n+1} - 4a_n = (4 - x)\left(a_{n+1} - \frac{4}{4 - x}a_n\right)$$

令 $x = \frac{4}{4 - x}$,得 $x^2 - 4x + 4 = 0, x = 2$.

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^{n-1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{4}$$

说明 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 0,公差为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列,得

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{4}(n - 1), a_n = 2^{n-2}(n - 1)$$

下面给出一般情形的解法:

由 $p^2 + 4q = 0$,得

$$a_{n+2} = pa_{n+1} - \frac{p^2}{4}a_n(p \text{ 为非零常数}, a_1, a_2 \text{ 已知})$$

当 $x \neq p$ 时

$$a_{n+2} - xa_{n+1} = (p - x)a_{n+1} - \frac{p^2}{4}a_n = (p - x)\left[a_{n+1} - \frac{p^2}{4(p - x)}a_n\right]$$

令 $x = \frac{p^2}{4(p - x)}$,得 $(2x - p)^2 = 0, x = \frac{p}{2}$.

所以 $$a_{n+2} - \frac{p}{2}a_{n+1} = \frac{p}{2}\left(a_{n+1} - \frac{p}{2}a_n\right)$$

$$a_{n+1}-\frac{p}{2}a_n=(a_2-\frac{p}{2}a_1)(\frac{p}{2})^{n-1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{(\frac{p}{2})^{n+1}}-\frac{a_n}{(\frac{p}{2})^n}=\frac{4a_2-2pa_1}{p^2}$$

$$\frac{a_n}{(\frac{p}{2})^n}=\frac{2a_1}{p}+\frac{4a_2-2pa_1}{p^2}(n-1)$$

$$a_n=[(a_2-\frac{1}{2}pa_1)n+(pa_1-a_2)](\frac{p}{2})^{n-2}$$

参考文献

[1] BRUALDI R A. 组合学导引[M].李盘林,王天明,译.武汉:华中理工大学出版社,1982.

已知等比数列中的任意两项求通项

1　一道题解答的错误

[苏]C.E.里亚平,И.B.巴兰诺娃,З.Г.波尔丘戈娃编,盛世雄译,1980年上海教育出版社出版的《初等代数习题集》(以下简称《习题集》)第282页第46题是:

46.在等比数列中,已知:$a_{m+n}=A$,$a_{m-n}=B$,求 a_m 和 a_n.

该书第443页的"解答和提示"为"$a_m=\sqrt{AB}$",这个解答有误,反例:当 $A=B=-1$,$n=2$ 时,得 $-1=a_{m+2}=a_{m-2}q^4=-q^4$($q$ 表示公比,下同),所以 $q^2=1$,因而 $a_m=\dfrac{a_{m+2}}{q^2}=-1$.而按"解答和提示"得 $a_m=1$,说明原解答有误.本文末将给出该题的完整解答.

2　已知等比数列中的任意两项求通项

上述题46属于等比数列中的一个基本问题——已知等比数列中的任意两项求通项:

问题　在等比数列$\{a_n\}$中,已知 a_s,a_t($a_sa_t\neq 0,s\neq t$),求通项 a_n.

2.1　问题在实数范围内的解

有 $a_s=a_tq^{s-t}$,$q^{s-t}=\dfrac{a_s}{a_t}$,所以

(1) 当 $s-t$ 是奇数时,$q=\left(\dfrac{a_s}{a_t}\right)^{\frac{1}{s-t}}$,$a_n=a_sq^{n-s}=a_s\left(\dfrac{a_s}{a_t}\right)^{\frac{n-s}{s-t}}$.

(2) 当 $s-t$ 是偶数时:

1) 又 $a_sa_t<0$ 时,q 不存在,即所求 a_n 也不存在.

2) 又 $a_sa_t>0$ 时,$q=\pm\left(\dfrac{a_s}{a_t}\right)^{\frac{1}{s-t}}$,$a_n=a_sq^{n-s}=(\pm 1)^{n-s}a_s\left(\dfrac{a_s}{a_t}\right)^{\frac{n-s}{s-t}}$.

2.2　问题在复数范围内的解

同上也得 $q^{s-t}=\dfrac{a_s}{a_t}$.

(1) 当 $a_sa_t>0$ 时

得 $q^{s-t}=\dfrac{a_s}{a_t}(\cos 0+i\sin 0)$,$q=\left(\dfrac{a_s}{a_t}\right)^{\frac{1}{s-t}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{s-t}+i\sin\dfrac{2k\pi}{s-t}\right)$($k=0$,

$1,\cdots,s-t-1)$,

$$a_n = a_s q^{n-s} = a_s\left(\frac{a_s}{a_t}\right)^{\frac{n-s}{s-t}}\left[\cos\frac{2k(n-s)\pi}{s-t} + i\sin\frac{2k(n-s)\pi}{s-t}\right](k = 0,1,\cdots,s-t-1)$$

(2) 当 $a_s a_t < 0$ 时

得 $q^{s-t} = -\frac{a_s}{a_t}(\cos\pi + i\sin\pi)$, $q = \left(-\frac{a_s}{a_t}\right)^{\frac{1}{s-t}}\left(\cos\frac{2k+1}{s-t}\pi + i\sin\frac{2k+1}{s-t}\pi\right)(k = 0,1,\cdots,s-t-1)$,

$$a_n = a_s q^{n-s} = a_s\left(-\frac{a_s}{a_t}\right)^{\frac{n-s}{s-t}}\left[\cos\frac{(2k+1)(n-s)\pi}{s-t} + i\sin\frac{(2k+1)(n-s)\pi}{s-t}\right](k = 0,1,\cdots,s-t-1)$$

3　题46的完整解答

3.1　在实数范围内的解

在2.1节中令 $s = m+n$, $t = m-n$, $a_s = A$, $a_t = B$. 因为 $s-t = 2n$ 是偶数,所以由2.1节中的结论(2),得

(1) 当 $AB \leqslant 0$ 时,所求 a_m, a_n 均不存在.

(2) 当 $AB > 0$ 时,通项 $a_{n_1} = (\pm 1)^{n_1-m-n}A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{n_1-m-n}{2n}}$,

令 $n_1 = m$, 得 $a_m = (\pm 1)^n A\sqrt{\frac{B}{A}}$

令 $n_1 = n$, 得 $a_n = (\pm 1)^m A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{m}{2n}}$

进而可得,当 $AB > 0$ 时:

$$a_m = \begin{cases} \sqrt{AB} & (m\text{ 为偶数}, A, B \in \mathbf{R}^+) \\ -\sqrt{AB} & (m\text{ 为偶数}, A, B \in \mathbf{R}^-) \\ \pm\sqrt{AB} & (n\text{ 为奇数}, AB > 0) \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} \sqrt[2n]{A^{2n-m}B^m} & (m\text{ 为偶数}, A, B \in \mathbf{R}^+) \\ -\sqrt[2n]{A^{2n-m}B^m} & (m\text{ 为偶数}, A, B \in \mathbf{R}^-) \\ \pm\sqrt[2n]{A^{2n-m}B^m} & (m\text{ 为奇数}, AB > 0) \end{cases}$$

3.2　在复数范围内的解

由2.2节的结论,可得

(1) 当 $AB > 0$ 时,通项 $a_{n_1} = A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{n_1-m-n}{2n}}\left[\cos\frac{k(n_1-m-n)\pi}{n} + \right.$

$i\sin\frac{k(n_1-m-n)\pi}{n}](k=0,1,\cdots,2n-1)$.

令 $n_1=m$,得 $a_m=\pm\sqrt{AB}(\cos k\pi-i\sin k\pi)(k=0,1,\cdots,2n-1$. 当 $A,B\in\mathbf{R}^+$ 时取"+";当 $A,B\in\mathbf{R}^-$ 时取"-").

令 $n_1=n$,得 $a_n=\pm\sqrt[2n]{A^{2n-m}B^m}(\cos\frac{mk\pi}{n}-i\sin\frac{mk\pi}{n})(k=0,1,\cdots,2n-1$. 当 $A,B\in\mathbf{R}^+$ 时取"+";当 $A,B\in\mathbf{R}^-$ 时取"-").

(2) 当 $AB<0$ 时,通项 $a_{n_1}=A(-\frac{A}{B})^{\frac{n_1-m-n}{2n}}[\cos\frac{(2k+1)(n_1-m-n)\pi}{2n}+i\sin\frac{(2k+1)(n_1-m-n)\pi}{2n}](k=0,1,\cdots,2n-1)$.

令 $n_1=m$,得 $a_m=\pm\sqrt{-AB}(\cos\frac{2k+1}{2}\pi-i\sin\frac{2k+1}{2}\pi)(k=0,1,\cdots,2n-1$. 当 $A>0,B<0$ 时取"+";当 $A<0,B>0$ 时取"-"),

令 $n_1=n$,得 $a_n=\pm\sqrt[2n]{(-1)^mA^{2n-m}B^m}[\cos\frac{m(2k+1)\pi}{2n}-i\sin\frac{m(2k+1)\pi}{2n}](k=0,1,\cdots,2n-1$. 当 $A>0,B<0$ 时取"+";当 $A<0,B>0$ 时取"-").

4 另一题解答的类似错误

《习题集》第 285 页第 75 题是:

75. 数 $2,\sqrt{6},4.5$ 能不能是等比数列或等差数列的项?

《习题集》第 444 页的"解答和提示"为:

不可能是等差数列的项;可能是等比数列的项:$q=\sqrt[2n-2m]{\frac{6}{4.5^2}}$.

即使在实数范围内,上述解答也有误,应为 $q^{n-m}=\frac{\sqrt{6}}{4.5}=\frac{2}{9}\sqrt{6}$,$q$ 可能取到负值,而原解答中的 $q>0$.

一类二元二次方程的解与一类二阶递归数列的项的联系

1 二阶常系数线性齐次递归数列

本文把数列拓广为“定义域是 $\mathbf{Z}$ 上的函数值”. 二阶常系数线性齐次递归数列是指由递推关系“$f_{k+2} = af_k + bf_{k+1}$($a, b, f_1, f_2$ 是已知数, $a \neq 0, k \in \mathbf{Z}$(下文中均有此约定))”确定的数列 $\{f_k\}$[1]. 本文把此数列 $\{f_k\}$ 记作 $EJ(a, b; f_1, f_2)$.

著名的 Fibonacci 数列 $\{F_k\}$:

$$\cdots, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$$

就是二阶常系数线性齐次递归数列 $EJ(1,1;1,1)$.

2 一个问题

注释① 证明了二元二次不定方程

$$x^2 + xy - y^2 = -1$$

的全部正整数解为 (F_{2n}, F_{2n+1})($n \in \mathbf{N}^*$, 下文中均有 $n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{F_k\}$ 即 $EJ(1,1;1,1)$ ①

文献[2]证明了方程 $x^2 + xy - y^2 = -11$ 的全部正整数解为

$$(1,4), (5,9), (14,23), \cdots, (g_{2n-1}, g_{2n}), \cdots$$

$$(2,5), (7,12), (19,31), \cdots, (h_{2n-1}, h_{2n}), \cdots$$

其中数列 $\{g_k\}$ 即 $EJ(1,1;1,4)$, $\{h_k\}$ 即 $EJ(1,1;2,5)$. ②

在结论 ① 中, 我们说方程 $x^2 + xy - y^2 = -1$ 只有一类 EJ 正整数解; 在结论 ② 中, 我们说方程 $x^2 + xy - y^2 = -11$ 只有两类 EJ 正整数解.

结论 ①, ② 给出了两个二元二次不定方程的正整数解与相应的二阶常系数线性齐次递归数列的项之间的密切联系, 本文提出

问题 1 找出所有的形如

$$ux^2 + vxy + wh^2 = h \text{(常数 } u, v, w, h \text{ 不同时为 0)} \quad ③$$

的二元二次方程, 使其恒有解 (f_{2k-1}, f_{2k}), 其中数列 $\{f_k\}$ 是不为周期数列的二阶常系数线性齐次递归数列 $EJ(a, b; f_1, f_2)$($\{f_k\}$ 是周期数列的充要条件见文献[3]).

---

① 赵毅, 杨飞. 关于“魔八方”的解的唯一性的证明. 数学通讯, 2001(4).

3 问题1的部分解决

定理1 对于以下六类形如③的二元二次方程和形如 $EJ(a,b;f_1,f_2)$ 的数列$\{f_k\}$,相应的方程恒有解($\pm f_{2k-1}$, $\pm f_{2k}$)(这里"±"有序,下同)(并可能还有其他的解):

(1) 方程 $x^2+bxy-y^2=h(b\neq 0)$ 若有解(f_1,f_2),则恒有解($\pm f_{2k-1}$, $\pm f_{2k}$)和($\pm f_{2k-1}$, $\mp f_{2k-2}$),其中数列$\{f_k\}$ 即 $EJ(1,b;f_1,f_2)$;

(2) 方程 $x^2-bxy+y^2=h(b\neq 0)$ 若有解(f_1,f_2),则恒有解($\pm f_{2k-1}$, $\pm f_{2k}$)和($\pm f_{2k-1}$, $\pm f_{2k-2}$),其中数列$\{f_k\}$ 即 $EJ(-1,b;f_1,f_2)$;

(3) 方程$(b+1)^2x^2-2(b+1)xy+y^2=h(b\neq 0,-1)$若有解$(f_1,f_2)$,则恒有解($\pm f_{2k-1}$, $\pm f_{2k}$)和($\pm f_{2k-1}$, $\pm[2(b+1)f_{2k-1}-f_{2k}]$),其中数列$\{f_k\}$ 即 $EJ(b+1,b;f_1,f_2)$;

(4) 方程$(b-1)^2x^2-2(b-1)xy+y^2=h(b\neq 0,1)$若有解$(f_1,f_2)$,则恒有解($\pm f_{2k-1}$, $\pm f_{2k}$)和($\pm f_{2k-1}$, $\pm[2(b-1)f_{2k-1}-f_{2k}]$),其中数列$\{f_k\}$ 即 $EJ(1-b,b;f_1,f_2)$;

(5) 方程$(bi-1)^2x^2+2(b+i)xy-y^2=h(b\neq 0,-i;i$是虚数单位$)$若有解$(f_1,f_2)$,则恒有解($\pm f_{2k-1}$, $\pm f_{2k}$)和($\pm f_{2k-1}$, $\pm[2(b+i)f_{2k-1}-f_{2k}]$),其中数列$\{f_k\}$ 即 $EJ(bi-1,b;f_1,f_2)$;

(6) 方程$(bi+1)^2x^2+2(b-i)xy-y^2=h(b\neq 0,i)$若有解$(f_1,f_2)$,则恒有解($\pm f_{2k-1}$, $\pm f_{2k}$)和($\pm f_{2k-1}$, $\pm[2(b-i)f_{2k-1}-f_{2k}]$),其中数列$\{f_k\}$ 即 $EJ(-bi-1,b;f_1,f_2)$.

证明 只需证上述六个结论中的每个方程均有($\pm A$, $\pm B$)和($\pm A$, $\pm C$)两种类型的解.请注意:

方程③若有解(x,y),则必有解$(-x,-y)$.

关于 y 的一元二次方程 $y^2-py+q=0$ 若有解 y_1,则必有解 $p-y_1$.

所以只需证明:上述六个结论中的每个方程均有解(f_{2k-1},f_{2k})即可,这均可用数学归纳法证得.下面给出统一的分析法证明(以下证明也揭示了定理1的发现过程):

由题设,得

若(x,y)是方程③的解,则$(ax+by,ay+b(ax+by))=(ax+by,abx+(a+b^2)y)$也是③的解,所以

$$ux^2+vxy+wy^2=u(ax+by)^2+v(ax+by)[abx+(a+b^2)y]+w[abx+(a+b^2)y]^2$$

$$[(a^2-1)u+a^2bv+a^2b^2w]x^2+[2abu+(a^2+2ab^2-1)v+(2a^2b+2ab^3)w]xy+[b^2u+(ab+b^3)v+(a^2+2ab^2+b^4-1)w]y^2=0$$

当以下条件满足时,上式成立:

$$\begin{cases}(a^2-1)u+a^2bv+a^2b^2w=0\\2abu+(a^2+2ab^2-1)v+(2a^2b+2ab^3)w=0\\b^2u+(ab+b^3)v+(a^2+2ab^2+b^4-1)w=0\end{cases}$$

由③知,这个关于 u,v,w 的方程组有非零解,所以其系数行列式的值为0,即

$a^6-3a^4-4a^3b^2+(3-b^4)a^2+4ab^2+(b^4-1)=(a-1)(a+1)(a-b-1)(a+b-1)(a+1-bi)(a+1+bi)=0$

得以下六种情形:

(1)$a=1$,得 $u:v:w=1:b:(-1)$;

(2)$a=-1$,得 $u:v:w=1:(-b):1$;

(3)$a=b+1$,得 $u:v:w=(b+1)^2:[-2(b+1)]:1$;

(4)$a=1-b$,得 $u:v:w=(bi-1)^2:2(b+i):(-1)$;

(5)$a=bi-1$,得 $u:v:w=(bi-1)^2:2(b+i):(-1)$;

(6)$a=-bi-1$,得 $u:v:w=(bi+1)^2:2(b-i):(-1)$.

从而可得定理1成立.

猜想1　定理1的六种情形给出了问题1的全部解答.

猜想2　若形如③的方程有四组不同的解$(f_{2k_j-1},f_{2k_j})(j=1,2,3,4;k_j$ 是四个两两不等的整数,数列$\{f_k\}$即 $EJ(a,b;f_1,f_2))$,则形如③的这个方程恒有解$(\pm f_{2k-1},\pm f_{2k})$.

说明　在猜想2中若把"四组"改为"三组",结论不一定成立.反例如下:

设$\{f_k\}$为 $EJ(2,2;1,1)$,其各项是

$$\cdots,1,1,4,10,28,76,208,568,\cdots$$

不定方程 $407x^2-253xy+38y^2=192$ 有解$(x,y)=(1,1),(4,10),(28,76)$,但没有解$(208,568)$.

猜想3　当 $b,f_1,f_2\in\mathbf{Z}$ 时,定理1的(1)～(4)给出了相应方程的全部整数解.

同文献[2]定理1的证明及其说明,可证

定理2　当 $b,f_1,f_2\in\mathbf{Z}$ 时,定理1的(1)～(4)中方程的整数解只存在若干类 EJ 整数解.

3　其他问题及猜想

问题2　求不定方程

$$ux^2+vxy+wy^2=h(u,v,w,h\text{ 是已知的整数且不同时为 }0)\qquad④$$

的全部整数解.

要解决问题2,还需要解决

问题3　求出方程④有整数解的充要条件.

当然,问题3的一个答案是"存在 $f_1, f_2 \in \mathbf{Z}$,使 $h = uf_1^2 + vf_1f_2 + wf_2^2$".但最好要能找出"$h$ 关于 u, v, w 之间的关系"的充要条件.比如文献[2]得到了

当 $h = -2, -3$ 时,方程 $x^2 + xy - y^2 = h$ 均无正整数解.

实际上,还可将此结论推广为

当 $h \equiv \pm 2 \pmod 5$ 时,方程 $x^2 + xy - y^2 = h$ 均无整数解.

证明 设 $x \equiv 0, \pm 1, \pm 2, y \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod 5$,再根据 x, y 的25种搭配可证.

问题4 求不定方程

$$x^2 + xy - y^2 = h(h\text{ 是已知的非零整数}) \tag{⑤}$$

的全部整数解.

注 可证 $x^2 + xy - y^2 = 0$ 只有整数解 $x = y = 0$(因为 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}y$).

在定理1(1)中:

令 $b = 1, h = -1, f_1 = 1, f_2 = 2$,得

当 $h = -1$ 时,方程⑤有解

$$(1,2),(3,5),(8,13),\cdots$$
$$(-1,-2),(-3,-5),(-8,-13),\cdots$$
$$(1,-1),(0,-1),(-1,-2),\cdots$$
$$(-1,1),(0,1),(1,2),\cdots$$

由此也可得结论①中的正整数解.

令 $b = 1, h = -11, f_1 = 1, f_2 = 4$,可得

当 $h = -11$ 时,方程⑤有解

$$(1,4),(5,9),(14,23),\cdots$$
$$(-1,-4),(-5,-9),(-14,-23),\cdots$$
$$(1,-3),(-2,-5),(-7,-12),\cdots$$
$$(-1,3),(2,5),(7,12),\cdots$$

由此也可得结论②成立.

问题5 求出方程⑤只有一类 EJ 正整数解的充要条件.

猜想4 方程⑤的 EJ 整数解是两类或四类;方程⑤的 EJ 正整数解是一类或两类.

参考文献

[1] BRUALDI R A.组合学导引[M].李盘林,王天明,译.武汉:华中理工大学出版社,1982.
[2] 宋卫星,杨巧梅."魔(n,k)方"与广义 Fibonacci 数列[J].数学通报,2001(4):41.
[3] 肖振纲.关于二阶线性递归数列的周期性[J].数学通讯,1995(10):23-24.

Fibonacci 数列的几条性质的推广

Fibonacci 数列$\{F_n\}$定义为：

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} (n \in \mathbf{N})$$

它有很多性质，比如[1]：

(1) $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$；

(2) 若 $m \mid n$，则 $F_m \mid F_n$；

(3) 若 n 是异于 4 的合数，则 F_n 也是合数；

(4) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

本文给出这些性质的推广，也就是这些性质在更一般的数列中也成立.

约定：下文中的字母均表示整数.

本文研究的数列$\{a_n\}$定义为：

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = ua_{n+1} + va_n$（$u$ 是已知数，$u, n \in \mathbf{Z}$），$v = \pm 1$　①

定理 1　$a_{n+m} = a_{n+1}a_m + va_na_{m-1}$.

证明　先用数学归纳法证明 $m \in \mathbf{N}$ 时成立.

由①得，$va_{-1} = a_1 - ua_0 = 1$，由此可以验证 $m = 0$ 时成立.

$m = 1$ 时显然成立.

假设 $m = k, k + 1 (k \in \mathbf{N})$ 时成立，得 $va_{n+k} = a_{n+1} \cdot va_k + va_n \cdot va_{k-1}$，$ua_{n+k+1} = a_{n+1} \cdot ua_{k+1} + va_n \cdot ua_k$，相加得 $a_{n+k+2} = a_{n+1}a_{k+2} + va_na_{k+1}$，即 $m = k + 2$ 时成立. 所以 $m \in \mathbf{N}$ 时成立.

再用反向数学归纳法证明 $m \leqslant 1$ 时成立.

$m = 1, 0$ 时成立.

假设 $m = k, k - 1 (k \leqslant 1)$ 时成立，得

$$a_{n+k} = a_{n+1}a_k + va_na_{k-1}, ua_{n+k-1} = a_{n+1} \cdot ua_{k-1} + va_n \cdot ua_{k-2}$$

相减得

$$va_{n+k-2} = a_{n+1} \cdot va_{k-2} + va_n \cdot va_{k-3}$$

所以

$$a_{n+k-2} = a_{n+1}a_{k-2} + va_na_{k-3}$$

即 $m = k - 2$ 时成立，所以 $m \leqslant 1$ 时成立. 得定理 1 成立.

注　定理 1 还可继续推广：

设$\{b_n\}$是任意的二阶递归数列，满足 $b_{n+2} = ub_{n+1} + vb_n$（$u, v$ 是任意的已知复数），有

$$(b_1b_{n+m}-b_{n+1}b_m)+v(b_0b_{n+m-1}-b_nb_{m-1})=0$$

定理 2 当 $v=1$ 时，$a_{-n}=(-1)^{n-1}a_n$；当 $v=-1$ 时，$a_{-n}=-a_n$，所以总有 $|a_{-n}|=|a_n|$.

证明 可用数学归纳法证明 $n\geqslant 0$ 时成立，由此结论可以证明 $n\leqslant 0$ 时也成立.

注 去掉条件 $a_1=1$，定理 2 也成立.

定理 3 $a_n \mid a_{mn}$(约定 $0\mid 0$).

证明 由定理 2，只证 $m\geqslant 0$ 时成立.

$m=0$ 时成立.

假设 $m=k$ 时成立：$a_n\mid a_{kn}$. 由定理 1，得

$$a_{(k+1)n}=a_{kn+n}=a_{kn+1}a_n+va_{kn}a_{n-1}$$

所以 $a_n\mid a_{(k+1)n}$，即 $m=k+1$ 时成立. 所以 $m\geqslant 0$ 时成立.

定理 4 $(a_m,a_n)=|a_{(m,n)}|$(约定 $(0,0)=0$).

证明 由定理 2，只证 $m,n\in\mathbf{N}$ 时成立.

第一步，证明 $(a_{n+1},a_n)=1$ ②

这可由 ① 得到：

由 $v=\pm 1$，得 $(a_{n+1},a_n)=(a_n,a_{n-1})$，从而 $(a_{n+1},a_n)=\cdots=(a_1,a_0)=(1,0)=1$.

第二步，证明 $q\geqslant 0$ 时，$(a_m,a_{mq-1})=1$ ③

由 $a_{-1}=\pm 1$，得 $q=0$ 时成立. 下证 $m,q\in\mathbf{N}^*$ 时成立.

由定理 1，得 $a_{mq-1}=a_{m(q-1)+(m-1)}=a_{m(q-1)}a_m+va_{m(q-1)-1}a_{m-1}$，所以 $(a_m,a_{mq-1})=(a_m,a_{m(q-1)-1})$(用 ② 及 $v=\pm 1$)，从而 $(a_m,a_{mq-1})=(a_m,a_{m-1})=1$.

第三步，设 $m=nq_1+r_1$(m 与 n 之间的带余除法)，则

$$(a_m,a_n)=(a_n,a_{r_1}) \quad ④$$

由定理 1，得 $a_m=a_{nq_1+r_1}=a_{nq_1}a_{r_1+1}+va_{nq_1-1}a_{r_1}$，由定理 3，得 $a_n\mid a_{nq_1}$，又 $v=\pm 1$，所以 $(a_m,a_n)=(a_{nq_1-1}a_{r_1},a_n)=(a_n,a_{r_1})$(用 ③).

第四步，证明定理 4 成立.

由辗转相除法求最大公约数的方法，设 $(m,n)=(n,r_1)=\cdots=(d,0)$，由 ④，得 $(a_m,a_n)=(a_n,a_{r_1})=\cdots=(a_d,a_0)=|a_d|$，即 $(a_m,a_n)=|a_{(m,n)}|$.

定理 5 当 $|u|\geqslant 2$ 时，

(1) $\{|a_n|\}_{n\geqslant 0}$ 严格递增；

(2) $a_m\mid a_n \Leftrightarrow m\mid n$；

(3) 当 n 是合数时，$|a_n|$ 也是合数.

证明 (1) 我们证明：当 $n\geqslant 0$ 时，$|a_{n+1}|>|a_n|$.

当 $n=0$ 时成立.

假设 $n = k$ 时成立：$|a_{k+1}| > |a_k|$. 得

$|a_{k+2}| = |ua_{k+1} \pm a_k| \geqslant |ua_{k+1}| - |a_k| > 2|a_{k+1}| - |a_{k+1}| = |a_{k+1}|$,
即 $|a_{k+2}| > |a_{k+1}|$, $n = k + 1$ 时成立. 所以结论(1) 成立.

(2) 只证 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 时成立.

$\Rightarrow$　由 $a_m \mid a_n$, 得 $(a_m, a_n) = |a_m|$, 又由定理4, 得 $|a_m| = |a_{(m,n)}|$, 所以 $(m,n) = |m|$, 即 $m \mid n$.

$\Leftarrow$　由定理3知成立.

(3) 可设 $n = n_1 n_2$, $1 < n_1 < n$.

所以 $a_{n_1} \mid a_n$, $1 = |a_1| < |a_{n_1}| < |a_n|$, 所以 a_n 是合数.

定理6　当 $u = \pm 1$, $v = 1$ 时,

(1) $\{|a_n|\}_{n \geqslant 2}$ 严格递增;

(2) 当 $m \geqslant 3$ 时, $a_m \mid a_n \Leftrightarrow m \mid n$;

(3) 当 n 是异于4的合数时, $|a_n|$ 是合数.

证明　(1) 当 $u = v = 1$ 时, $a_n = F_n$; 当 $u = -1$, $v = 1$ 时, 可用数学归纳法证明 $a_n = (-1)^{n-1} F_n$. 所以总有 $|a_n| = F_n$, 显然 $\{F_n\}_{n \geqslant 2}$ 严格递增, 所以结论(1) 成立.

(2) 即证 $n \geqslant m \geqslant 3$ 时, $F_m \mid F_n \Leftrightarrow m \mid n$. 这是容易证明的.

(3) 由 $|a_n| = F_n$, 得结论(3) 成立.

参考文献

[1] 揭方琢. 菲波那契数列[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 数学史专辑, 1987(3): 72-85.

一个递归数列的性质

满足

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}(n \in \mathbf{Z}) \quad ①$$

的数列$\{a_n\}$是一个二阶递归数列,本文得到它的很多性质.约定:下文中的字母均表示整数.

定理1 (1)$a_{-n} = -a_n$;

(2)$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n]$.

证明 (1) 只证 $n \geqslant 0$ 时成立即可.

因为 $a_0 = 0$,所以 $a_0 = -a_0$,说明 $n = 0$ 时成立.

因为 $a_1 = 3a_0 - a_{-1} = -a_{-1}$,所以 $a_{-1} = -a_1$,说明 $n = 1$ 时成立.

假设 $n-1, n$ 时成立:$a_{-(n-1)} = -a_{n-1}, a_{-n} = -a_n$.

由 $a_{-n+1} = 3a_{-n} - a_{-n-1}$,得 $a_{-(n+1)} = a_{-n-1} = 3a_{-n} - a_{-n+1} = -3a_n + a_{n-1} = -a_{n+1}$,得 $n+1$ 时成立.所以结论(1)成立.

(2) 当 $n \geqslant 0$ 时,可由特征方程求得

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n]$$

当 $n < 0$ 时,$-n > 0$,所以

$$a_n = -a_{-n} = -\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{-n} - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{-n}] =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n]$$

所以结论(2)成立.

定理2 (1)$a_{n+m} = a_{n+1}a_m - a_n a_{m-1}$;

(2)$(a_m, a_n) = a_{(m,n)}$.

定理2的证明见文献[1]的有关结论.

定理3 (1) 当 $n > m$ 时,$a_n > a_m$;

(2) 若 $a_n = a_m$,则 $n = m$.

证明 (1) 我们证明更强的结论:$a_{n+1} > 2a_n$.

先用数学归纳法证明 $n \geqslant 0$ 时成立.

$n = 0$ 时成立.

假设 n 时成立:$a_{n+1} > 2a_n$,所以 $a_{n+1} > a_n$.

得 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n > 3a_{n+1} - a_{n+1} = 2a_{n+1}$,即 $a_{n+2} > 2a_{n+1}$,$n+1$ 时成立.所以 $n \geqslant 0$ 时成立.

再证 $n \leqslant 0$ 时成立:$a_n > 2a_{n-1}$.

由上面的证明,得 $n \leqslant 0$ 时,$a_{-n+1} > a_{-n}$,又由定理1(1)得,$a_{n-1} < a_n$,又有 $a_{n-1} < 0(n \leqslant 0)$,所以 $a_{n-1} > 2a_{n-1}$,得 $a_n > 2a_{n-1}(n \leqslant 0)$.

(2) 由(1)可得(2)成立.有(2)的另一叙述:若 $n \neq m$,则 $a_n \neq a_m$.

定理4[①]　(1)$a_m \mid a_n \Leftrightarrow m \mid n$;

(2) 若 n 是合数,则 a_n 也是合数.

定理5　(1)$2 \mid a_n \Leftrightarrow 3 \mid n$;

(2)$3 \mid a_n \Leftrightarrow 2 \mid n$;

(3)$5 \mid a_n \Leftrightarrow 5 \mid n$;

(4)$7 \mid a_n \Leftrightarrow 4 \mid n$.

证明　只证 $n \geqslant 0$ 时成立.

(1) 由式①可得,$\{a_n(\bmod 2)\}_{n \geqslant 0}$ 是周期数列:

$$0,1,1,0,1,1,\cdots$$

所以(1)成立.

同理可证(2),(3),(4)成立.

定理6　(1)$7 \mid a_{4n-1} - a_{4n-3}$;

(2)$21 \mid a_{4n-1} + a_{4n+1}$;

(3)$7 \mid a_{4n-1} + (-1)^n$;

(4)$7 \mid a_{4n+1} - (-1)^n$.

证明　(1)$a_{4n-1} - a_{4n-3} = a_{4n-3}a_3 - a_{4n-4}a_2 = 7a_{4n-3} - a_{4n-4}a_2$,又由定理5(4),得 $7 \mid a_{4n-4}$,所以 $7 \mid a_{4n-1} - a_{4n-3}$.

(2) 由式①,得 $a_{4n-1} + a_{4n+1} = 3a_{4n}$,又 $7 \mid a_{4n}$,所以 $2 \mid a_{4n-1} + a_{4n+1}$.

(3) 当 $n = 0$ 时成立.

假设 n 时成立:$7 \mid a_{4n-1} + (-1)^n$.

可直接证明 $7 \mid a_{4n-1} + a_{4n}a_4 - a_{4n-1}a_3$,即 $7 \mid a_{4n-1} + a_{4n+3}$,所以 $7 \mid a_{4n+3} + (-1)^{n+1}$,即 $n+1$ 时成立.

因为已证 $7 \mid a_{4n-1} + a_{4n+3}$,所以 $7 \mid a_{4n-1} + a_{4n-5}$,又由假设 n 时成立,得 $7 \mid a_{4n-5} + (-1)^{n-1}$,即 $n-1$ 时成立.

所以 n 为任意整数时,结论(3)成立.

---

① 参考本书"Fibonacci数列的几条性质的推广"部分.

(4) 由(2),(3) 可证,在(3) 中令 $n=-m$ 也可证.

定理 7 (1)$49\mid a_{4n+2}-3(-1)^n$;

(2)$49\mid \frac{a_{4n}}{21}+n(-1)^n$;

(3)$49\mid a_{4n-1}+(7n+1)(-1)^n$;

(4)$49\mid a_{4n+1}+(7n-1)(-1)^n$.

证明 (1)$n=0$ 时成立.

假设 n 时成立:$49\mid a_{4n+2}-3(-1)^n$.

因为 $a_{4n+6}+a_{4n+2}=a_{4n}a_7-a_{4n-1}a_6+a_{4n}a_3-a_{4n-1}a_2=385a_{4n}-147a_{4n-1}$,$7\mid a_{4n}$,所以 $49\mid a_{4n+6}+a_{4n+2}$,$49\mid a_{4n+6}-3(-1)^{n+1}$,得 $n+1$ 时成立.

由 $49\mid a_{4n+6}+a_{4n+2}$,得 $49\mid a_{4n+2}+a_{4n-2}$,$49\mid a_{4n-2}-3(-1)^{n-1}$,得$n-1$ 时成立.

所以 n 为任意整数时,结论(1) 成立.

(2) 即证 $21\times 49\mid a_{4n}+21n(-1)^n$,因为 $3\mid a_{4n}$,所以只证 $7^3\mid a_{4n}+21n(-1)^n$.

当 $n=0$ 时成立.

假设 n 时成立:$7^3\mid a_{4n}+21n(-1)^n$.

由式 ①,得 $49\mid a_{4n+2}-3(-1)^n$,所以 $49\mid 3a_{4n+1}-a_{4n}-3(-1)^n$,$7^3\mid 21a_{4n+1}-7a_{4n}-21(-1)^n$,所以 $7^3\mid 21a_{4n+1}-8a_{4n}-21(n+1)(-1)^n$,$7^3\mid a_{4n+4}+21(n+1)(-1)^{n+1}$,得 $n+1$ 时成立.

说明 $n\geqslant 0$ 时,$7^3\mid a_{4n}+21n(-1)^n$.

当 $n<0$ 时,$-n>0$,所以 $7^3\mid a_{4(-n)}+21(-n)(-1)^{-n}$,$7^3\mid a_{-4n}-21n(-1)^n$,$7^3\mid -a_{4n}-21n(-1)^n$,$7^3\mid a_{4n}+21n(-1)^n$,说明 $n<0$ 时,也有 $7^3\mid a_{4n}+21n(-1)^n$,所以结论(2) 成立.

(3)$n=0$ 时成立.

假设 n 时成立:$49\mid a_{4n-1}+(7n+1)(-1)^n$.

由定理 6(4),得 $7\mid a_{4n+1}-(-1)^n$.

所以 $7\mid 3a_{4n}-a_{4n-1}-(-1)^n$,$49\mid 21a_{4n}-7a_{4n-1}-7(-1)^n$,即 $49\mid a_{4n}a_4-a_{4n-1}a_3+a_{4n-1}-7(-1)^n$,$49\mid a_{4n+3}+a_{4n-1}-7(-1)^n$.

所以 $49\mid a_{4n+3}-(7n+8)(-1)^n$,得 $n+1$ 时成立.

因为 $49\mid a_{4n+3}+a_{4n-1}-7(-1)^n$,所以 $49\mid a_{4n-1}+a_{4n-5}+7(-1)^n$.

所以 $49\mid a_{4n-5}-(7n-6)(-1)^n$,即 $n-1$ 时成立.

所以 n 为任意整数时,结论(3) 成立.

(4) 在(3) 中令 $n=-m$,可得(4) 成立.

定理 8　(1)$2^{\alpha+3}\mid a_{3\cdot 2^{\alpha}n}(\alpha\geqslant 0)$;

(2)$2^3\parallel a_{6n+3}$.

证明　(1) 只证 $2^{\alpha+3}\mid a_{3\cdot 2^{\alpha}}$.

$\alpha=0$ 时成立:$8\mid a_3$.

假设 α 时成立:$2^{\alpha+3}\mid a_{3\cdot 2^{\alpha}}$.

$$a_{3\cdot 2^{\alpha+1}}=a_{3\cdot 2^{\alpha}+3\cdot 2^{\alpha}}=a_{3\cdot 2^{\alpha}+1}a_{3\cdot 2^{\alpha}}-a_{3\cdot 2^{\alpha}}a_{3\cdot 2^{\alpha}-1}=$$
$$a_{3\cdot 2^{\alpha}}(a_{3\cdot 2^{\alpha}+1}-a_{3\cdot 2^{\alpha}-1})$$

由定理 5(1) 得 $2\nmid a_{3\cdot 2^{\alpha}\pm 1}$,所以 $2\mid a_{3\cdot 2^{\alpha}+1}-a_{3\cdot 2^{\alpha}-1}$,所以 $2^{\alpha+4}\mid a_{3\cdot 2^{\alpha+1}}$,得 $\alpha+1$ 时成立,所以结论(1) 成立.

(2)$a_{6n+3}=a_{6n}a_4-a_{6n-1}a_3=21a_{6n}-8a_{6n-1}$.

由(1),得 $16\mid a_{6n}$,且 $2\nmid a_{6n-1}$,所以 $2^3\parallel a_{6n+3}$.

定理 9　(1)$3\parallel a_{2n}+a_{2n+2}$;

(2)$9\mid a_{2n-1}+a_{2n+1}$.

证明　由式①,得 $a_{2n}+a_{2n+2}=3a_{2n+1}$,$a_{2n-1}+a_{2n+1}=3a_{2n}$,且 $3\nmid a_{2n+1}$,$3\mid a_{2n}$,所以结论(1),(2) 成立.

定理 10　$a_na_m-a_{n-k}a_{m+k}=a_ka_{m-n+k}$.

证明　由定理 1(2) 可证.

推论　(1)$a_{n-1}a_{n+1}=a_n^2-1$;

(2)$a_{m+1}a_{n+m}-a_ma_{n+m+1}=a_n$.

证明　(1) 在定理 10 中,令 $n=m$,$k=1$ 可证.

(2) 在定理 10 中,令 $n=m'+1$,$m=n'+m'$,$k=1$ 可证.

定理 11　(1)$a_n+a_{n+2m}=(a_{m+1}-a_{m-1})a_{n+m}$;

(2)$a_n+a_{n+2m+1}=(a_{m+1}-a_m)(a_{n+m}+a_{n+m+1})$.

证明　可由定理 1(2) 证明,也可见以下证明.

(1) 由推论,得 $a_ma_{m-2}-a_{m-1}^2+1=0$,

$$a_{2m-1}=a_{m+1}a_{m-1}-a_ma_{m-2}$$

所以

$$a_{2m-1}+a_ma_{m-2}-a_{m-1}^2=a_{m-1}(a_{m+1}-a_{m-1})$$

$$\begin{aligned}a_n+a_{n+2m}&=a_n+a_{n+1}a_{2m}-a_na_{2m-1}=a_{n+1}a_{2m}-a_n(a_{2m-1}-1)=\\&a_{n+1}(a_{m+1}a_m-a_ma_{m-1})-a_n(a_{2m-1}-1+a_ma_{m-2}-a_{m-1}^2+1)=\\&a_{n+1}a_m(a_{m+1}-a_{m-1})-a_na_{m-1}(a_{m+1}-a_{m-1})=\\&(a_{m+1}-a_{m-1})a_{n+m}\end{aligned}$$

(2) 由推论(2),得

$a_n + a_{n+2m+1} = a_n + a_{n+m+1}a_{m+1} - a_{n+m}a_m = a_{m+1}a_{n+m} - a_m a_{n+m+1} + a_{n+m+1}a_{m+1} - a_{n+m}a_m = (a_{m+1} - a_m)(a_{n+m+1} + a_{n+m})$

本文所述的数列$\{a_n\}$肯定还有很多性质,所述性质可能在更广泛的数列中也成立,这些有待于读者去深入研究.

首项不是 3 的素数等差数列的公差必是 6 的倍数

各项都是素数的等差数列(至少三项)叫做素数等差数列.文献[1]说注释①用较多笔墨得到了如下结论:

公差为 2,4,8,14 的素数等差数列各只有一个:{3,5,7},{3,7,11},{3,11,19},{3,17,31}.公差为 16 的素数等差数列不存在.

定理 1 首项不是 3 的素数等差数列的公差必是 6 的倍数.

证明 只需证:若素数 $p \neq 3, n \in \mathbf{N}^*$, $p+n$ 与 $p+2n$ 均为素数,则 $6 \mid n$.

容易证得 $2 \mid n$,下证 $3 \mid n$.

有 $(p,3)=1$,所以由 Fermat 小定理知 $3 \mid p^2-1$.假设 $3 \nmid n$,得 $(n,3)=1$,所以 $3 \mid n^2-1, 3 \mid p^2-n^2, 3 \mid (p+n)(p+2n), 3 \mid p+n$ 或 $3 \mid p+2n$,所以 $p+n$ 或 $p+2n$ 为合数,与题设矛盾,所以 $3 \mid n$.

定理 2 公差不是 6 的倍数的素数等差数列的首项及项数均为 3.

证明 由定理 1 知,首项为 3.下证项数为 3.

假设项数不小于 4,得 $3, 3+n, 3+2n, 3+3n (n \in \mathbf{N}^*)$ 均为素数,这不可能!所以项数为 3.

推论 设 $n \in \mathbf{N}^*, b \nmid n$,则:

(1) 存在公差为 n 的素数等差数列 $\Leftrightarrow 3+n$ 与 $3+2n$ 均为素数;

(2) 不存在公差为 n 的素数等差数列 $\Leftrightarrow 3+n$ 与 $3+2n$ 中有一个为合数.

由推论易得本文开头叙及的结论,还可得:公差为 2,4,8,10,14,20,28,34,38,40,50 的素数等差数列各只有一个(且首项及项数均为 3),公差为 16,22,26,32,44,46 的素数等差数列均不存在.

猜想 1 设 $A = \{n \mid n \in \mathbf{N}^*, 3+n$ 与 $3+2n$ 均为素数(则 $2 \mid n, 3 \nmid n$)$\}$,则集合 A 的元素有无限个.

猜想 2 对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,均存在公差为 $6n$ 的素数等差数列.

猜想 3 对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,均存在无数个公差为 $6n$ 的素数等差数列.

whc101[1] 是否存在无穷多个素数等差数列?什么样的偶数不能作为公差?

若猜想 1 或猜想 2 成立,则 whc101 中第一问的回答是肯定的:存在无穷多

① 薛大庆.关于素数成等差数列的问题.初等数学论丛(第 8 辑),1985(1).

个素数等差数列.关于第二问.有以下结论:

定理3 若猜想2成立,则偶数 n 不能作为素数等差数列的公差 $\Leftrightarrow$ 存在素数 $p>3$ 及正奇数 m,使偶数 $n=pm-3$ 或偶数 $n=\frac{1}{2}(pm-3)$.(由推论(2)易证.)

参考文献

[1] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993:226-227.

等差数列的前 n 项和为完全平方数的条件

首先约定,本文中的字母均表示整数,用 a_1,d,S_n 分别表示等差数列 $\{a_n\}$ 的首项,公差,前 n 项和.

定理1　当 $d\neq 2a_1$ 时,把 $2a_1-d$ 表示为所有的两个整数积的形式,设 $2a_1-d=e_ie'_i(i=1,2,\cdots,k)$,$e_i,e'_i$ 有序,$e_i\in\mathbf{N}^*$,则 S_n 为完全平方数的充要条件是:

(1)$n=2e_im^2$ 且 $x^2-2dm^2=e'_i$;

或(2)$n=e_im^2$ 且 $2x^2-dm^2=e'_i$.

证明　**必要性**　$S_n=\frac{1}{2}n(2a_1-d+nd)$,可设$(n,2a_1-d)=e_i,n=n'e_i,2a_1-d=e_ie'_i,(n',e'_i)=1$.

$S_n=\frac{1}{2}e_i^2n'(e'_i+n'd)$ 是完全平方数,所以 S_n 是整数的平方,$n'(e'_i+n'd)=2y^2$.

(1)当 $2\mid n'$ 时,得 $n'=2m^2,e'_i+2m^2d=x^2$,所以 $n=2e_im^2,x^2-2dm^2=e'_i$.

(2)当 $2\nmid n'$ 时,得 $n'=m^2,e'_i+m^2d=2x^2$,所以 $n=e_im^2,2x^2-dm^2=e'_i$.

充分性　(1)$S_n=\frac{1}{2}n(2a_1-d+nd)=e_im^2(e_ie'_i+2e_im^2d)=(e_imx)^2$.

(2)也可得 $S_n=(e_imx)^2$.

例1　求出所有的正整数 n,使前 n 个正整数的和 S_n 为完全平方数.

解　可在定理1中令 $a_1=d=1$ 来求解.

由 $2a_1-d=1$,得 $k=e_1=e'_1=1$.所以:

(1)$n=2m^2$ 且 $x^2-2m^2=1$;

或(2)$n=m^2$ 且 $2x^2-m^2=1$.

由佩尔方程的解法[1],得当且仅当 $n=\frac{1}{4}[(17+12\sqrt{2})^n+(17-12\sqrt{2})^n]-\frac{1}{2}$ 或 $n=\frac{1}{4}[(3+2\sqrt{2})^{2n-1}+(3-2\sqrt{2})^{2n-1}]-\frac{1}{2}$ 时,S_n 为完全平方数.

推论1　当 $d=2d_1,a_1\neq d_1$ 时,把 a_1-d_1 表示为所有的两个整数积的形

式,设 $a_1-d_1=e_ie'_i(i=1,2,\cdots,k)$,$e_i,e'_i$ 有序,$e_i\in\mathbf{N}^*$,则 S_n 为完全平方数的充要条件是 $n=e_im^2$ 且 $x^2-d_1m^2=e'_i$.

证明 此结论可由定理1推出,但仿照定理1直接证明更简洁.

必要性 $S_n=n(a_1-d_1+nd_1)$,可设 $(n,a_1-d_1)=e_i,n=n'e_i,a_1-d_1=e'_ie_i,(n',e'_i)=1$.

$S_n=e_i^2n'(e'_i+n'd_1)$ 是完全平方数,由 $(n',e'_i+n'd_1)=1$,得 $n'=m^2$,$e'_i+n'd_1=x^2,x^2-d_1m^2=e'_i$.

充分性 $S_n=n(a_1-d_1+nd_1)=e_im^2(e_ie'_i+e_im^2d_1)=(e_imx)^2$.

例2 (《数学通讯》1994年第7期问题88)求出所有的正整数 n,使 $S_n=9+17+25+\cdots+(8n+1)$ 是完全平方数.

解 下面由推论1的证法给出直接解法.

$S_n=n(4n+5)$ 是完全平方数.

当 $5\nmid n$ 时,$(n,4n+5)=1$,所以 $n=m^2,4n+5=x^2(m,x\in\mathbf{N}^*)$,$(x+2m)(x-2m)=5$,得 $m=n=1,S_1=3^2$.

当 $5\mid n$ 时,得 $n=5m^2,4n+5=5x^2(m,x\in\mathbf{N}^*)$,$4m^2+1=x^2$,即此方程无正整数解.

所以当且仅当 $n=1$ 时,S_n 是完全平方数.

这种解法比原解法(见《数学通讯》1994年第9期第34页)要简洁.

用定理1的证明方法还可研究 S_n 是完全 k 次方数的条件.

定理2 当 $d=2a_1$ 时,S_n 为完全平方数的充要条件是 a_1 是完全平方数.

证明 当 $d=2a_1$ 时,$S_n=n^2a_1$,故云.

定理3 对于等差数列 $\{a_1+(n-1)d\}$,若存在奇素数 $m>|2a_1-d|$,使 S_m 为完全平方数,则 $a_n=t^2(2n-1)(t\in\mathbf{N}^*)$.

证明 $S_m=m\cdot\frac{1}{2}(2a_1-d+md)$

由 $S_m\in\mathbf{Z},2\nmid m$,得 $\frac{1}{2}(2a_1-d+md)\in\mathbf{Z}$.

假设 $2a_1-d\neq0$,得 $(m,2a_1-d)=1,(m,\frac{1}{2}(2a_1-d+md))=1$.

因为 S_m 是完全平方数,所以 m 也是完全平方数,这与 m 是素数矛盾,所以 $2a_1-d=0$.

又由定理2,得 $a_1=t^2,d=2t^2,a_n=t^2(2n-1)(t\in\mathbf{N}^*)$.

推论2 对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,S_n 均为完全平方数的充要条件是 $a_n=t^2(2n-1)(t\in\mathbf{N}^*)$.

在推论2中 $t=1$ 时的结论是大家熟知的:$\{2n-1\}$ 的前 n 项和 n^2 为完全平方数.

推论 3　若 $d \neq 2a_1$，n 是奇素数，则 S_n 是完全平方数的充要条件是 $2a_1 - d = n(2x^2 - d)$.

证明　**充分性**

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2}(2a_1 - d + nd)$$

当 $n \nmid 2a_1 - d$ 时，$(n, \frac{1}{2}(2a_1 - d + nd)) = 1$，由 n 是素数，可知此时 S_n 不是完全平方数.

当 $n \mid 2a_1 - d$ 时，设 $2a_1 - d = un$，$S_n = n^2 \cdot \frac{1}{2}(u + d)$ 为完全平方数，所以 $u + d = 2x^2$，$2a_1 - d = n(2x^2 - d)$.

必要性　可得 $S_n = (nx)^2$.

推论 4　若 $d \neq 2a_1$，n 是大于 $|2a_1 - d|$ 的奇素数，则 S_n 不是完全平方数.

参考文献

[1] 单墫，趣味数论[M].北京：中国青年出版社，1987.

正整数方幂的累进和概念的推广

文献[1]给出了正整数方幂的累进和的概念:

设 $S_t(n)=1^t+2^t+\cdots+n^t$,则

$$SS_t(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j^t=1^t+(1^t+2^t)+\cdots+(1^t+2^t+\cdots+n^t)(t\in\mathbf{N})$$

并称 $SS_t(n)$ 为正整数方幂的累进和.

实际上对 $\{SS_t(n)\}$ 还可再求前 n 项和,得以下概念:

定义 设 $G_0^{(t)}(k)=1^t+2^t+\cdots+k^t,\sum_{i=1}^{k}G_m^{(t)}(i)=G_{m+1}^{(t)}(k)(m\in\mathbf{N})$,把 $G_{m+1}^{(t)}(k)$ 叫做正整数方幂的 $m+1$ 次累进和.

定理 1 $G_{m+1}^{(t)}(n)=G_m^{(t)}(n)+G_{m+1}^{(t)}(n-1)$.

定理 2 $G_m^{(t)}(n)=\sum_{i=1}^{n}(1^t+2^t+\cdots+i^t)\mathrm{C}_{m+n-i-1}^{m-1}(m\in\mathbf{N}^*)$.

证明 由定义知 $m=1$ 时成立.

假设 m 时成立,下面对 n 用数学归纳法证明 $m+1$ 时成立:

$n=1$ 时显然成立,假设 $n-1$ 时成立,得

$$\begin{aligned}G_{m+1}^{(t)}(n)=G_m^{(t)}(n)+G_{m+1}^{(t)}(n-1)=\\ \sum_{i=1}^{n}(1^t+2^t+\cdots+i^t)\mathrm{C}_{m+n-i-1}^{m-1}+\\ \sum_{i=1}^{n-1}(1^t+2^t+\cdots+i^t)\mathrm{C}_{m+n-i-1}^{m}=\\ \sum_{i=1}^{n}(1^t+2^t+\cdots+i^t)\mathrm{C}_{m+n-i}^{m}\end{aligned}$$

得 n 时成立,所以 $n+1$ 时成立.

即定理 2 成立.

参考文献

[1] 盛宏礼.自然数方幂的累进和[J].中学数学月刊,1997(1):23-24.

用课本求解 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+m)$

已有高中生在关注

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

之类的求和问题.本文用课本知识来求下面的和

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+m) = 1\times 2\times\cdots\times m + 2\times 3\times\cdots\times(m+1) + \cdots + n(n+1)\cdots(n+m)$$

全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修Ⅱ)》(2004年人民教育出版社)第66页第3题及第102页第1(1)题分别是用数学归纳法证明

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

学生自然会问,这些结果是怎么发现的,它们还能推广吗?

全日制普通高级中学教科书《数学·第二册(下A)》(2004年人民教育出版社)(下简称(下A))第92页第10(2)题的结论是

$$A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m\text{(该结论类似于 } C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m\text{)}$$

由此,得

$$(m+1)A_{m+i-1}^m = A_{m+i}^{m+1} - A_{m+i-1}^{m+1}\ (i = 2,3,\cdots,n)$$

$$(m+1)\sum_{i=2}^{n} A_{m+i-1}^m = (A_{m+2}^{m+1} - A_{m+1}^{m+1}) + (A_{m+3}^{m+1} - A_{m+2}^{m+1}) + \cdots + (A_{m+n}^{m+1} - A_{m+n-1}^{m+1}) = A_{m+n}^{m+1} - A_{m+1}^{m+1} = A_{m+n}^{m+1} - (m+1)A_m^m$$

所以

$$(m+1)\sum_{i=1}^{n} A_{m+i-1}^m = A_{m+n}^{m+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{m+i-1}^m = \frac{1}{m+1}A_{m+n}^{m+1}$$

即
$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+m-1) = \frac{1}{m+1}n(n+1)\cdots(n+m)$$

(下 A) 第 116 页第 3(2) 题的结论是

$$C_{n-1}^{m} + C_{n-2}^{m} + \cdots + C_{m+1}^{m} + C_{m}^{m} = C_{n}^{m+1}$$

即
$$C_{m}^{m} + C_{m+1}^{m} + \cdots + C_{m+n-1}^{m} = C_{m+n}^{m+1}$$

在此式两边都乘以 $m!$,得

$$A_{m}^{m} + A_{m+1}^{m} + \cdots + A_{m+n-1}^{m} = \frac{1}{m+1}A_{m+n}^{m+1}$$

这与上面求得的结果一致.

读者还可证得以下恒等式

$$\frac{1}{A_{m+i-1}^{m-1}} - \frac{1}{A_{m+i}^{m-1}} = \frac{m-1}{A_{m+i}^{m}}$$

所以

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{m-1}{A_{m+i}^{m}} = \left(\frac{1}{A_{m-1}^{m-1}} - \frac{1}{A_{m}^{m-1}}\right) + \left(\frac{1}{A_{m}^{m-1}} - \frac{1}{A_{m+1}^{m-1}}\right) + \cdots +$$
$$\left(\frac{1}{A_{m+n-2}^{m-1}} - \frac{1}{A_{m+n-1}^{m-1}}\right) = \frac{1}{A_{m-1}^{m-1}} - \frac{1}{A_{m+n-1}^{m-1}}$$

得
$$\frac{1}{A_{m}^{m}} + \frac{1}{A_{m+1}^{m}} + \cdots + \frac{1}{A_{m+n-1}^{m}} = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{A_{m-1}^{m-1}} - \frac{1}{A_{m+n-1}^{m-1}}\right)(m \geqslant 2)$$

令 $m = 2,3,\cdots,m'$,得

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{1\times 2\times\cdots\times m} + \frac{1}{2\times 3\times\cdots\times(m+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} =$$
$$\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{2\times 3\times\cdots\times(m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}\right]$$

k 阶递归数列通项的初等求法

若数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+k}=p_1a_{n+k-1}+p_2a_{n+k-2}+\cdots+p_ka_n$($k\in\mathbf{N}^*$,$p_1$,$p_2$,$\cdots$,$p_k$ 是常数,$p_k\neq 0$),且 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 已知,则数列$\{a_n\}$叫做 k 阶递归数列[1].

在大学数学《组合数学》[1]中虽有专门的方法求 k 阶递归数列的通项,但这种题型已出现在高考试题中(如 2006 年福建卷文科压轴题),所以在高中阶段研究此类数列通项的求法是很有必要的.

由 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 已知及递推式知数列$\{a_n\}$是唯一存在的,所以,若找到 a_n 的一个表达式适合该递推式及所有条件,则该表达式就是$\{a_n\}$的通项公式.

1　二阶递归数列通项的初等求法

1.1　满足 $a_{n+1}=pa_n+ab^n$(p,a,b 是非零常数),a_1 已知的数列$\{a_n\}$通项的求法

(1) 当 $b\neq p$ 时,设 $a_n=b_n+xb^n$,得

$$b_{n+1}=pb_n+[(p-b)x+a]b^n$$

令 $x=\frac{a}{b-p}$(因为 $b\neq p$)时,得

$$b_{n+1}=pb_n$$

又 $b_1=a_1-\frac{ab}{b-p}$,所以

$$b_n=\frac{a_1p+b(a-a_1)}{p-b}\cdot p^{n-1},a_n=\frac{a_1p+b(a-a_1)}{p-b}\cdot p^{n-1}+\frac{a}{b-p}\cdot b^n$$

(2) 当 $b=p$ 时,设 $a_n=b_n+xnb^n$,得

$$b_{n+1}=bb_n+(a-bx)b^n$$

令 $x=\frac{a}{b}$(因为 $b\neq 0$)时,得

$$b_{n+1}=bb_n$$

又 $b_1=a_1-a$,所以

$$b_n=(a_1-a)b^{n-1},a_n=(na+a_1-a)b^{n-1}$$

1.2　满足 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa^n$(p,q 是常数,$q\neq 0$),a_1,a_2 已知的数列$\{a_n\}$通项的求法

当 $x\neq p$ 时,得

$$a_{n+2}-xa_{n+1}=(p-x)(a_{n+1}+\frac{q}{p-x}a_n)$$

令 $-x=\frac{q}{p-x}$,得

$$x^2-px-q=0 \qquad ①$$

所以选 x 是方程 ① 的任一复数根时(由 $q\neq 0$,得 $x\neq 0, p-x\neq 0$),得

$$\frac{q}{p-x}=-x$$

$$a_{n+2}-xa_{n+1}=(p-x)(a_{n+1}-xa_n)$$

$$a_{n+1}-xa_n=(a_2-a_1x)(p-x)^{n-1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}-\frac{a^n}{x^n}=\frac{a_2-a_1x}{x^2}\cdot(\frac{p}{x}-1)^{n-1}$$

当 $n\geqslant 2$ 且 $\frac{p}{x}-1\neq 1$(即 $x\neq\frac{p}{2}$ 也即 $p^2+4q\neq 0$)时,得

$$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=$$

$$\frac{a_1}{x}+\frac{a_2-a_1x}{x^2}\cdot\frac{1-(\frac{p}{x}-1)^{n-1}}{1-(\frac{p}{x}-1)}$$

所以

$$a_n=\frac{a_1x-pa_1+a_2}{2x^2-px}\cdot x^n+\frac{a_1x-a_2}{2x-p}(p-x)^{n-1}(n\geqslant 2,p^2+4q\neq 0)$$

当 $\frac{p}{x}-1=1$,即 $x=\frac{p}{2}$ 也即 $p^2+4q=0$ 时,得

$$b_{n+1}-b_n=\frac{a_2-a_1x}{x^2}$$

又 $b_1=\frac{a_1}{x}$,$x=\frac{p}{2}$,所以

$$b_n=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2-a_1x}{x^2}\cdot(n-1)=\frac{4pa_1-4a_2}{p^2}+\frac{4a_2-2pa_1}{p^2}\cdot n$$

$$a_n=b_n(\frac{p}{2})^n=[(a_2-\frac{p}{2}a_1)n+a_1p-a_2](\frac{p}{2})^{n-2}$$

2 三阶递归数列通项的初等求法

2.1 满足 $a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n+ab^n$($p,q,a,b$ 是常数,$abq\neq 0$),a_1,a_2 已知的数列$\{a_n\}$通项的求法

(1) 当 $b^2-pb-q\neq 0$ 时,设 $a_n=b_n-x\cdot b^n$,得

$$b_{n+2}=pb_{n+1}+qb_n+[(b^2-bp-q)x+a]b^n$$

因为 $b^2-pb-q\neq 0$,所以选 $x=-\frac{a}{b^2-bp-q}$ 时,得

$$b_{n+2}=pb_{n+1}+qb_n$$

由 1.2 节的方法可求出 b_n,进而可求出 a_n.

(2) 当 $b^2-pb-q=0$,但 $p^2+4q\neq 0$ 时,设 $a_n=b_n-xnb^n$,得

$$b_{n+2}=pb_{n+1}+qb_n+[x(b^2-pb-q)n+(2b^2-pb)x+a]b^n$$

由 $b^2-pb-q=0$ 但 $p^2+4q\neq 0$ 知,$2b-p\neq 0$,所以 $b(2b-p)\neq 0$,可选 $x=\frac{a}{b(p-2b)}$,得

$$b_{n+2}=pb_{n+1}+qb_n$$

由此求出 b_n 后,可再求出 a_n.

(3) 当 $b^2-pb-q=p^2+4q=0$ 时,设 $a_n=b_n-xn^2b^n$,得

$$b_{n+2}=pb_{n+1}+qb_n+[x(b^2-pb-q)n^2+2bx(2b-p)n+b(4b-p)x+a]b^n$$

由 $b^2-pb-q=p^2+4q=0$,还得 $p=2b$(由 $b\neq 0$,得 $b(4b-p)\neq 0$),所以

$$b_{n+2}=pb_{n+1}+qb_n+[b(4b-p)x+a]b^n$$

可选 $x=\frac{a}{b(p-4b)}$,得

$$b_{n+2}=pb_{n+1}+qb_n$$

由此求出 b_n 后,可再求出 a_n.

2.2　满足 $a_{n+3}=pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n$($p,q,r$ 为常数,$r\neq 0$),a_1,a_2,a_3 已知的数列 $\{a_n\}$ 通项的求法

当 $x\neq p$ 时,得

$$a_{n+3}-xa_{n+2}-ya_{n+1}=(p-x)\left(a_{n+2}+\frac{q-y}{p-x}a_{n+1}+\frac{r}{p-x}a_n\right)$$

令 $-x=\frac{q-y}{p-x}$,$-y=\frac{r}{p-x}$,得

$$r=(p-x)(x^2-px-q) \quad ②$$

由代数基本定理[2] 知,一元三次方程 ② 有复数根 x,由 $r\neq 0$ 知 $x\neq p$.

所以,当 x 满足 ② 且 $y=\frac{r}{x-p}$ 时

$$a_{n+3}-xa_{n+2}-ya_{n+1}=(p-x)(a_{n+2}-xa_{n+1}-ya_n)$$

得

$$a_{n+2}-xa_{n+1}-ya_n=(a_3-xa_2-ya_1)(p-x)^{n-1}$$

$$a_{n+2}=xa_{n+1}+ya_n+\frac{xa_2+ya_1-a_3}{x-p}\cdot(p-x)^n(p-x\neq 0) \qquad ③$$

当 $y=0$ 或 $\frac{xa_2+ya_1-a_3}{x-p}=0$ 时,由 ③ 容易求出 a_n.

当 $y\neq 0$ 且 $\frac{xa_2+ya_1-a_3}{x-p}\neq 0$ 时,由 2.1 节的方法及 ③ 也可求出 a_n.

3 $k(k\geqslant 4)$ 阶递归数列通项的初等求法

完全类似于前面的方法,可以解决这一问题.这种方法类似于文献[3]中的"消常数项法".再举一例:

例 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=2a_n+\frac{3^n}{4}-\frac{2^n}{3}+\frac{(-1)^n}{12}$,求 $\{a_n\}$ 的通项.

解 通过试验知,可设 $a_n=b_n+x\cdot 3^n-yn\cdot 2^n+z\cdot(-1)^n$,得

$$b_{n+1}=2b_n+(\frac{1}{4}-x)\cdot 3^n+(2y-\frac{1}{3})\cdot 2^n+(3z+\frac{1}{12})\cdot(-1)^n$$

选 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{6},z=-\frac{1}{36}$,得

$$b_{n+1}=2b_n$$

又 $b_1=\frac{5}{9}$,所以 $b_n=\frac{5}{18}\cdot 2^n$,得

$$a_n=\frac{3^n}{4}-\frac{(-1)^n}{36}+\frac{5-3n}{18}\cdot 2^n$$

参考文献

[1] BRUALDI R A. 组合学导引[M].李盘林,王天明,译.武汉:华中理工大学出版社,1982.
[2] 张远达.浅谈高次方程[M].武汉:湖北教育出版社,1983.
[3] 甘志国.两类递推数列通项的求法[J].数学通讯.2006(17):21-22.

等差中的“= 0”为何变成了等比中的“= 1”?

等差数列性质 1　设 $a_0, a_1, \cdots, a_n (n \geqslant 2)$ 成等差数列,则 $a_0 C_n^0 - a_1 C_n^1 + a_2 C_n^2 - \cdots + (-1)^n a_n C_n^n = 0$.

证明　设等差数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的公差为 d,则

$$a_i = a_0 + id (i = 0, 1, \cdots, n)$$

$$a_0 C_n^0 - a_1 C_n^1 + a_2 C_n^2 - \cdots + (-1)^n a_n C_n^n = a_0[C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n] + [-1C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n] d = a_0(1-1)^n + nd[-C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 - C_{n-1}^2 + \cdots + (-1)^n C_{n-1}^{n-1}] (\text{用 } kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}) = -nd(1-1)^{n-1} = 0 (n \geqslant 2)$$

等比数列性质 1　设 $b_0, b_1, \cdots, b_n (n \geqslant 2)$ 成等比数列,则

$$b_0^{C_n^0} b_1^{-C_n^1} b_2^{C_n^2} \cdots b_n^{(-1)^n C_n^n} = 1$$

证明　设等比数列 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 的公比为 q,则

$$b_i = b_0 q^i (i = 0, 1, \cdots, n)$$

$$b_0^{C_n^0} b_1^{-C_n^1} b_2^{C_n^2} \cdots b_n^{(-1)^n C_n^n} = b_0^{C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n} q^{-1C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + \cdots + (-1)^n n C_n^n} =$$

$$b_0^{(1-1)^n} q^{-n(1-1)^{n-1}} (\text{参见上面的证明}) = 1 (n \geqslant 2)$$

等差数列性质 2　在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_k = 0 (k \in \mathbf{N}^*)$,则有恒等式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k-1-n} (n = 1, 2, \cdots, 2k-2)$$

证明　下面用等差数列 $\{a_n\}$ 的性质“若 $m + n = p + q (m, n, p, q \in \mathbf{N}^*)$,则 $a_m + a_n = a_p + a_q$”来证.

(1) 当 $n > 2k - 1 - n$ 时,即证

$$a_{2k-n} + a_{2k-n+1} + \cdots + a_n = 0 \quad ①$$

设
$$x = a_{2k-n} + a_{2k-n+1} + \cdots + a_n$$
得
$$x = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{2k-n}$$
相加,得

$$2x = (a_{2k-n} + a_n) + (a_{2k-n+1} + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_{2k-n}) = 2a_k + 2a_k + \cdots + 2a_k = 0$$

$x = 0$,即式 ① 成立.

(2) 当 $n < 2k-1-n$ 时,即证

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2k-1-n}=0$$

同上可证.($n=2k-1-n$ 不可能)

等比数列性质 2 在等比数列 $\{b_n\}$ 中,若 $b_k=1(k\in\mathbf{N}^*)$,则有恒等式

$$b_1b_2\cdots b_n=b_1b_2\cdots b_{2k-1-n}(n=1,2,\cdots,2k-2)$$

证明 用等比数列 $\{b_n\}$ 的性质"若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$,则 $b_mb_n=b_pb_q$"同以上证明可证.

我们要问:等差数列性质中的"$=0$"为什么变成了等比数列对应性质中的"$=1$"呢?这要从等差数列与等比数列的转换说起:

若 $\{a_n\}$ 成等差数列(公差为 d),则 $\{b_n=a^{a_n}\}(a>0$ 且 $a\neq1)$ 成正项等比数列.所以在等差数列 $\{a_n\}$ 的项之间若有加、减、乘、除的运算性质,则在正项等比数列 $\{b_n\}$ 的项之间也一定分别有乘、除、乘方、开方的运算性质.

若 $\{b_n\}$ 成正项等比数列(公比为 q),则 $\{a_n=\log_ab_n=\log_ab_1+(n-1)\log_aq\}$ 成等差数列.所以在正项等比数列 $\{b_n\}$ 的项之间若有乘、除、乘方、开方的运算性质,则在等差数列 $\{a_n\}$ 的项之间也一定分别有加、减、乘、除的运算性质.

由 0 次幂等于 1(或 1 的对数是 0) 可知,等差数列性质中的"$=0$"会变为等比数列对应性质中的"$=1$".

whc 102 的解决

文献[1]中介绍了“奇数列与勾股数”的密切联系：

若干奇数之和为平方数，因而可排成勾股数，如

$$(1+3+5)+(7+9)=25$$

有

$$3^2+4^2=5^2$$

$$(1+3+\cdots+23)+(25+27+29)=225$$

即

$$12^2+9^2=15^2$$

一般的，有：

定理 9－10　在奇数列$\{a_n\}(a_n=2n-1)$中，命$A_m=a_{n+1}+\cdots+a_{n+m}$，如$A_m=a^2(a\in\mathbf{N}^*)$，则$(n,a,n+m)$为一组勾股数.

这样，容易知道，对任一正整数m，奇数列中存在无数个$A_m=a^2(a\in\mathbf{N}^*)$，使$(n,a,n+m)$为勾股数组，而且一切勾股数组皆可表为如此形式，但尚不知：

whc 102　设等差数列$\{a+(n-1)d\}(a,d\in\mathbf{N}^*)$的前$n$项和是$S_n$，前$n+m$项和是$S_{n+m}(m\in\mathbf{N}^*)$. 且$S_n=p^2, S_{n+m}-S_n=q^2, S_{n+m}=r^2(p,q,r\in\mathbf{N}^*)$，所有的勾股数组$(p,q,r)$均可由上述$(p,q,r)$表出. 求出所有满足条件的等差数列$\{a+(n-1)d\}$(当然奇数列$\{2n-1\}$满足).

本文得到：

定理　满足 whc 102 的等差数列只有奇数列$\{2n-1\}$.

为证明定理，先给出：

引理　若等差数列$\{a+(n-1)d\}(a,d\in\mathbf{N}^*)$的前$n$项和$S_n=na+\dfrac{n(n-1)d}{2}$能表示出$5^2,17^2$和$37^2$，则$a=1,d=2$.

证明　(1) 当$2\mid d$时，设$d=2e(e\in\mathbf{N}^*)$，有

$$S_n=n[a+e(n-1)]$$

因为S_n能表示出5^2，所以存在$n_1\in\mathbf{N}^*$，使$n_1[a+e(n_1-1)]=5^2$，得$n_1=1,5$，或 25.

①$n_1=1$，得$a=25, S_n=n[25+e(n-1)]$，但可证S_n不能表示出17^2，与题设矛盾！

②$n_1 = 5$,得 $a + 4e = 5$.由 $a, e \in \mathbf{N}^*$,得 $a = e = 1$,即 $a = 1, d = 2$.

③$n_1 = 25$,得 $a + 24e = 1$,与 $a, e \in \mathbf{N}^*$ 矛盾!

(2) 当 $2 \nmid d$ 时,可证 $2 \nmid S_n \Leftrightarrow (n = 4k - 1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 且 $2 \mid a)$,或 $n = 4k - 2 (k \in \mathbf{N}^*)$,或($n = 4k - 3 (k \in \mathbf{N}^*)$ 且 $2 \nmid a$),且

$$S_{4k-1} = (4k - 1)[a + (2k - 1)d]$$
$$S_{4k-2} = (2k - 1)[2a + (4k - 3)d]$$
$$S_{4k-3} = (4k - 3)[a + 2(k - 1)d]$$

因为 S_n 能表示出 5^2,所以存在 $k \in \mathbf{N}^*$ 使 ①$S_{4k-1} = 5^2$,或 ②$S_{4k-2} = 5^2$,或 ③$S_{4k-3} = 5^2$.

① 得 $4k - 1 = 1, 5$ 或 25,均与 $k \in \mathbf{N}^*$ 矛盾.

② 得 $2k - 1 = 1, 5$ 或 25, $k = 1, 3$ 或 13.

当 $k = 1$ 时,$2a + d = 25$,$(a, d) = (1, 23), (2, 21), \cdots, (12, 1)$,可证均有 $S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$ 不能表示出 17^2,与题设矛盾!

当 $k = 3$ 时,$2a + 9d = 5$,与 $a, d \in \mathbf{N}^*$ 矛盾!

当 $k = 13$ 时,$2a + 49d = 1$,不可能.

③ 得 $4k - 3 = 1, 5$ 或 25, $k = 1, 2$ 或 7.

当 $k = 1$ 时,$a = 25$, $S_n = 25n + \frac{n(n-1)}{2}d$.

因为 S_n 能表示出 17^2,所以存在 $n_2 \in \mathbf{N}^*$,使 $25n_2 + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}d = 17^2$.

分 n_2 为奇数、偶数进行讨论得 $n_2 = 2, d = 239$.所以 $S_n = 25n + \frac{239}{2}n(n-1)$,可证 S_n 不能表示 37^2,与题设矛盾!

当 $k = 2$ 时,$a + 2d = 5$.因为 $2 \nmid d$,所以 $(a, d) = (3, 1)$, $S_n = 3n + \frac{1}{2}n(n-1)$,但 S_n 不能表示 17^2,与题设矛盾!

当 $k = 7$ 时,$a + 12d = 1$,不可能!

综上所述,得引理成立.

定理的证明 因为(3,4,5),(15,8,17),(35,12,37)均为勾股数组,所以 whc 102 中的等差数列满足:S_{n+m} 可以表示出 $5^2, 17^2, 37^2$.由引理得 $a = 1, d = 2$,即定理成立.

猜想 对于等差数列$\{a + (n-1)d\}$($a, d \in \mathbf{N}^*$)的前 n 项和 $S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$,若满足以下条件之一,则 $a = b^2, d = 2b^2$(b 是常数,$b \in \mathbf{N}^*$):

(1) 对于所有的正整数 n, S_n 总是整数的平方;

(2) 当 $n=1,2,3,4$ 时, S_n 总是整数的平方;

(3) 当 n 取 4 个不同的正整数时, S_n 总是整数的平方;

(4) 当 n 取无穷多个正整数时, S_n 总是整数的平方.

参考文献

[1] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993:227-228.

也谈正整数的等比分拆

本文将在文献[1]的基础上再谈谈正整数的等比分拆.

定义1 把正整数 M 表示成

$$M = a_1\sum_{i=0}^{n-1} q^i (a_1, q, n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 3)$$

的形式,叫做 M 的公比为 q 的等比分拆,当 $q = 1$ 时叫做平凡等比分拆,当 $q > 1$ 时叫做非平凡等比分拆.

定义2 设 $p_1, q, M \in \mathbf{N}^*, p_1 \mid M$,则由 $p_i - 1 = qp_{i+1}(i = 1,2,3,\cdots)$ 确定的 p_i 叫做 M 关于 (p_1, q) 的第 i 步因数.

容易证明:$p_1 = q^{i-1}p_i + (q^{i-2} + \cdots + q + 1)$.

由定义2,易得

定理 正整数 M 存在公比为 q 的等比分拆的充要条件是:存在正整数 $n(n \geqslant 3)$ 及 $p_1(p_1 \geqslant 7)$,使 M 关于 (p_1, q) 的第 n 步因数为1.当分拆存在时,$M = \dfrac{M}{p_1}\sum_{i=0}^{n-1} q^i$.

该定理与文献[1]的定理是一致的(文献[1]中定理的第一个"p_i"应改为"p_1",第32页的性质6应改述为:若 $p_{i+1} - 1$(p_{i+1} 表示 N 的第 $i+1$ 步真因数)不含 $p_i - 1$ 的真因数,则 N 关于 p_{i+1} 的等比分拆不存在).

求已知正整数的全部等比(差)分拆均可用估计试验法直接求解,以下举例说明.

例 求1 995的全部非平凡等比分拆.

解 即求 $1\,995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19 = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}(a_1, q, n \in \mathbf{N}^*, q \geqslant 2, n \geqslant 3)$ 的全部解.

因为 $\dfrac{q^n - 1}{q - 1} \geqslant \dfrac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1 \geqslant 7$,所以 $a_1 \leqslant 3 \times 5 \times 19$,得 $a_1 = 1, 3, 5, 7, 15, 19, 21, 35, 57, 95, 105, 133, 285$.

当 $a_1 = 1$ 时,$1\,995 = \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \geqslant q^2 + q + 1 > q^2$,所以 $q \leqslant 44$,又可得 $q \mid 1\,994$,$1\,994 = 2 \times 997$(997是素数),所以 $q = 2$,但此时 $n \notin \mathbf{N}^*$,所以此时不存在等比分拆.

同理可求得 1 995 的全部非平凡等比分拆为

$$1\,995 = 15 + 165 + 1\,815 = 35 + 245 + 1\,715 = 133 + 266 + 532 + 1\,064 = 285 + 570 + 1\,140$$

文献[1]漏掉了第一种分拆，笔者已验证文献[1]另外例题的答案均完整无误.

用文献[1]的方法求解正整数的等比分拆也是挺麻烦的，文献[1]的例 2,3 并没有给出完整的解题过程.

参考文献

[1] 李建章. 自然数的等比分拆[J]. 数学通讯，1997(1)：31-33.

公差为 2 的正整数的等差分拆①

把正整数 M 表示成一列成等差数列(至少三项)的正整数之和的形式就叫做 M 的正整数等差分拆,文献[1] ~ [3] 研究了这个问题,近期注释② 还研究了公差为 1 的情形,本文将研究公差为 2 的情形,即给出 M 的全部公差为 2 的正整数等差分拆及其组数,就是要求出

$$M = a_1 + (a_1 + 2) + \cdots + [a_1 + 2(n - 1)]$$

即

$$M = n(n + a_1 - 1)(M\text{ 是已知的正整数}, n, a_1 \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 3) \qquad ①$$

的全部解(n, a_1)及其组数.

本文用 $\sigma(a)$ 表示正整数 a 的全部正因数的个数,用 $\sigma_0(a)$ 表示 a 的全部小于$\sqrt{a}$ 的正因数的个数,用 $\sigma_1(a)$ 表示 a 的全部不大于$\sqrt{a}$ 的正因数的个数,用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

引理 设正整数 a 的标准分解式为 $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i \in \mathbf{N}^*, i = 1, \cdots, k$),则:

(1)$\sigma(a) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$;

(2)$\sigma_0(a) = [\frac{1}{2}\sigma(a)]$;

(3)$\sigma_1(a) = [\frac{1}{2}\sigma(a) + \frac{1}{2}]$.

证明 (1),(2) 即文献[4] 的引理 1,2.

(3) 当 a 是完全平方数时,$\sigma(a)$ 是奇数

$$\sigma_1(a) = \sigma_0(a) + 1 = [\frac{1}{2}\sigma(a)] + 1 = [\frac{1}{2}\sigma(a) - \frac{1}{2}] + 1 = [\frac{1}{2}\sigma(a) + \frac{1}{2}]$$

当 a 不是完全平方数时,$\sigma(a)$ 是偶数

① 原载于《上海中学数学》(2008 年第 4 期).
② 周士藩.能分拆成连续整数和的整数的特征.中学数学月刊,2007(11).

$$\sigma_1(a) = \sigma_0(a) = [\frac{1}{2}\sigma(a)] = [\frac{1}{2}\sigma(a) + \frac{1}{2}]$$

所以结论(3)成立.

定理 1　正整数 M 存在公差为 2 的正整数等差分拆的充要条件是 M 是大于 8 的合数且 $\frac{M}{2}$ 不是素数.

证明　由①知,M 存在公差为 2 的正整数等差分拆的充要条件是存在 $x, y \in \mathbf{N}^*, x \geqslant 3, y \geqslant 3$,使得 $M = xy$.(不妨设 $x \leqslant y$,则①有解 $(n, a_1) = (x, y - x + 1)$.)

所以,要证明定理 1,只需证明:

M 是大于 8 的合数且 $\frac{M}{2}$ 不是素数 $\Leftrightarrow$ 存在 $x, y \in \mathbf{N}^*, x \geqslant 3, y \geqslant 3$,使得 $M = xy$.

$\Rightarrow$　可设 $M = pq, 2 \leqslant p \leqslant q$.

若 q 是素数,则 $p \neq 2$(因为 $\frac{M}{2}$ 不是素数),所以 $3 \leqslant p \leqslant q$,此时选 $x = p$,$y = q$ 即得结论成立.

若 q 是合数,可设 $M = p'q'r', 2 \leqslant p' \leqslant q' \leqslant r'$.

当 $q' = 2$ 时,$p' = 2$,由 $M > 8$,得 $r' \geqslant 3$,此时选 $x = 4, y = r'$ 即得结论成立.

当 $q' \geqslant 3$ 时,有 $p'r' > r' \geqslant 3$,选 $x = q', y = p'r'$ 即得结论成立.

$\Leftarrow$　显然成立.

定理 2　当正整数 M 存在公差为 2 的正整数等差分拆时,①的全部解 (n, a_1) 可由 $n \mid M, 3 \leqslant n \leqslant \sqrt{M}, a_1 = \frac{M}{n} - n + 1$ 得到.

定理 3　(1) 当 $2 \nmid M$ 时,若存在 M 的公差为 2 的正整数等差分拆(即 M 是大于 8 的合数时),则分拆的组数为 $[\frac{1}{2}\sigma(M) - \frac{1}{2}]$;

(2) 当 $2 \mid M$ 时,若存在 M 的公差为 2 的正整数等差分拆(即 $\frac{M}{2}$ 是大于 4 的合数时),则分拆的组数为 $[\frac{1}{2}\sigma(M) - \frac{3}{2}]$.

(其中 $\sigma(M)$ 由引理(1)确定)

证明　由①知,M 的公差为 2 的正整数等差分拆的组数为①的解 (n, a_1) 的组数,即集合 $\{n \mid n \mid M, 3 \leqslant n \leqslant \sqrt{M}\}$ 的元素个数,可得:

(1) 分拆的组数为 $\sigma_1(M) - 1 = [\frac{1}{2}\sigma(M) + \frac{1}{2}] - 1 = [\frac{1}{2}\sigma(M) - \frac{1}{2}]$;

(2) 分拆的组数为 $\sigma_1(M) - 2 = [\frac{1}{2}\sigma(M) + \frac{1}{2}] - 2 = [\frac{1}{2}\sigma(M) - \frac{3}{2}]$.

例 求1 996,1 997,1 998的全部公差为2的正整数等差分拆及其组数.

解 $1\ 996 = 2^2 \times 499$(标准分解式,下同),由引理(1)知,$\sigma(1\ 996) = 6$,由定理3(2)知,分拆的组数为1,由定理2知$(n, a_1) = (4,496)$,所以分拆为$1\ 996 = 496 + 498 + 500 + 502$.

1 997是素数,由定理1知,不存在1 997的公差为2的正整数等差分拆.

$1\ 998 = 2 \times 3^3 \times 37$,$\sigma(1\ 998) = 16$,由定理3(2)知,分拆的组数为6;又由定理2知,$(n, a_1) = (3,664),(6,328),(9,214),(18,94),(27,48),(37,18)$,所以这六组分拆为

$$\begin{aligned}1\ 998 &= 664 + 666 + 668 = 328 + 330 + 332 + 334 + 336 + 338 = \\ &214 + 216 + 218 + \cdots + 230(9\text{项}) = \\ &94 + 96 + 98 + \cdots + 128(18\text{项}) = \\ &48 + 50 + 52 + \cdots + 100(27\text{项}) = \\ &18 + 20 + 22 + \cdots + 90(37\text{项})\end{aligned}$$

在定理2中,若M是正奇数,则n是奇数,a_1也是奇数,所以由定理1,2,3(1)可得:

推论 正奇数M能表示成至少三个连续正奇数之和的充要条件是M是大于8的奇合数,此时,这种分拆的组数为$[\frac{1}{2}\sigma(M) - \frac{1}{2}]$.

参考文献

[1] 刘康宁.至少含有两个奇约数的自然数的等差分拆[J].数学通讯,1993(3):19-20.

[2] 陈松德.由$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$引出的结论[J].数学通讯,1993(4):9-10.

[3] 李建章.自然数的等差分拆公式[J].数学通讯,1994(6):35-37.

[4] 甘志国.任意自然数的全部平方差分拆及其组数[J].数学通讯,1996(11):29-31.

全体奇合数组成的数列的一个通项公式

任意奇合数总可表示为 $J_n=(2a_n+1)(2b_n+1)$，其中有序数对 (a_n,b_n) 是下列有序数对之一：(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,3),(3,3),…

从而得到 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 两个数列，其中

$$\{a_n\}:1,1,2,1,2,3,\cdots$$

它由

$$a_{1+2+\cdots+(m-1)+i}=a_{\frac{1}{2}m(m-1)+i}=i \tag{①}$$

确定，其中

$$m\in\mathbf{N}^*,i=1,2,\cdots,m(\text{下同}) \tag{②}$$

$$\{b_n\}:1,2,2,3,3,3,\cdots$$

它由

$$b_{\frac{1}{2}m(m-1)+i}=m \tag{③}$$

确定.

下面求出这两个数列的通项公式，进而得到数列 $\{J_n\}$（它包含了全体奇合数）的通项公式.

定理　(1) $a_n=n-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]\left[\frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}\right]$;

(2) $b_n=\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]$.

（其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）

证明　首先，读者可证：满足 $\frac{1}{2}m(m-1)<n$ 即 $\frac{1}{2}m(m-1)+1\leqslant n$ 的最大正整数 $m=\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]$.

(1) 设 $n=\frac{1}{2}m(m-1)+i$（m,i 满足②），则由①知通项 $a_n=i=n-\frac{1}{2}m(m-1)=n-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]\left[\frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}\right]$.

(2) 设 $n=\frac{1}{2}m(m-1)+i$（m,i 满足②），则由③知通项 $b_n=m=$

$[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}]$.

推论　设 $f(n)=2a_nb_n+a_n+b_n=[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}](2n-[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}]^2+\frac{1}{2}[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}]+\frac{3}{2})+n$,则:

(1)数列 $\{J_n=2f(n)+1\}$ 的各项包含了全体奇合数且每一项都是奇合数(但有重复);

(2)$2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$ 是素数 $\Leftrightarrow k\neq f(n)$.

下面的数列包含了全部正有理数:$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\cdots$,可得,此数列的通项公式是 $\frac{1+b_n}{a_n}-1$.

数列 $\{c_n\}$:1,2,1,3,2,1,4,3,2,1,… 的通项公式为 $1+b_n-a_n$.

三　　角



“十载苦琢白玉璧，一朝竞放紫罗兰”
——数学问题 1539 的恒等式解法

R.Steiner 定理　有两条角平分线相等的三角形是等腰三角形.

文献[1]欲用三角法来证明它：

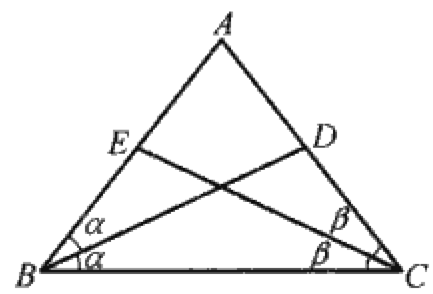


图 1

如图1，BD，CE 是 $\triangle ABC$ 的两条角平分线，$BD = CE$，欲证 $AB = AC$.

设 $\angle ABC = 2\alpha$，$\angle ACB = 2\beta$，则 $\angle ADB = \alpha + 2\beta$，$\angle AEC = 2\alpha + \beta$.

在 $\triangle ABD$，$\triangle ACE$，$\triangle ABC$ 中用正弦定理并注意 $BD = CE$，得

$$\frac{AC}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{CE}{\sin A} = \frac{BD}{\sin A} = \frac{AB}{\sin(\alpha+2\beta)}$$

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AB}{\sin 2\beta}$$

所以
$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{\sin 2\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}\ (\alpha,\beta\text{ 是锐角})$$

若能再用此式证明 $\alpha = \beta$，“即可得到R.Steiner定理的又一个简洁证明，此可谓初数研究的一个新成果.”“本人原以为此三角问题的解答不会太难，探索中发现绝非易事.为此笔者探索了10年多.现终于证得，但觉得解答较繁.”[1]

实际上，由以下恒等式立得以上问题的简解

$$\sin(2\alpha+\beta)\sin 2\beta - \sin(\alpha+2\beta)\sin 2\alpha =$$
$$2(\cos\alpha - \cos\beta)[\cos^2(\alpha+\beta) + \cos\alpha\cos\beta]$$

证明

$$\text{左边} = \frac{1}{2}[\cos(2\alpha-\beta) - \cos(2\alpha+3\beta) - \cos(\alpha-2\beta) + \cos(3\alpha+2\beta)] =$$
$$\frac{1}{2}[\cos(2\alpha-\beta) - \cos(\alpha-2\beta) + \cos(3\alpha+2\beta) - \cos(2\alpha+3\beta)] =$$
$$-\sin\frac{3}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{5}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ (\text{令 } x = \frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$y = \frac{\alpha-\beta}{2}) = -\sin x\sin 3y - \sin 5x\sin y\ (\text{用 } \sin 3y =$$
$$3\sin y - 4\sin^3 y, \sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x) =$$

$-\sin x\sin y(3-4\sin^2 y)-\sin x\sin y(5-20\sin^2 x+16\sin^4 x)=$

$-4\sin x\sin y(4\sin^4 x-5\sin^2 x-\sin^2 y+2)=$

$-4\sin x\sin y[(1-2\sin^2 x)^2+\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x+1-2\sin^2 y)]=$

$-4\sin x\sin y[\cos^2 2x+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2y)]=$

$2[\cos(x+y)-\cos(x-y)][\cos^2 2x+\cos(x+y)\cos(x-$
$y)]$(用 $x=\frac{\alpha+\beta}{2},y=\frac{\alpha-\beta}{2}$) $=$

$2(\cos\alpha-\cos\beta)[\cos^2(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta]=$ 右边

参考文献

[1] 王守文.数学问题1539的解答[J].数学通报,2005(3):封三-封四.

在 $\triangle ABC$ 中 $\sum \sin(A-\alpha)$ 的值域

1　问题的提出

文献[1]用较强的技巧证得了：

在 $\triangle ABC$ 中

$$\sin(A-30^\circ)+\sin(B-30^\circ)+\sin(C-30^\circ)\leqslant\frac{3}{2}$$

(本文记作 $\sum\sin(A-30^\circ)\leqslant\frac{3}{2}$).

文献[2]也用较强的变形技巧证得了此结论.

文献[3]用导数及一种解决多元函数最值的重要方法证得了：

在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\sum\sin A}{\sum\cos A}<2$.

该结论等价于

$$\sum(\sin A-2\cos A)<0(\text{因为}\sum\cos A>1,\text{见文献[3]的结论 1})$$

$$\sum\sin(A-\varphi)<0(\text{其中 }\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}})$$

由这些，笔者提出：

问题 1　已知 A,B,C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角($A\leqslant B\leqslant C$)，α 是已知的角，求函数 $f_\alpha(A,B,C)=\sum\sin(A-\alpha)$ 的值域.

2　问题的解决

定理　当 $\alpha\in[0,2\pi)$ 时，有下表中的结论成立.

序号	α 的范围	$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域
(i)	$[0,\arctan(3\sqrt{3}-4)]\cup[\frac{3}{2}\pi,2\pi)$	$(-\sin\alpha,3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)]$
(ii)	$(\arctan(3\sqrt{3}-4),\arctan 3\sqrt{3})$	$(-\sin\alpha,2\cos\alpha-\sin\alpha)$
(iii)	$[\arctan 3\sqrt{3},\frac{\pi}{2})$	$[3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha),2\cos\alpha-\sin\alpha)$
(iv)	$[\frac{\pi}{2},\pi+\arctan(3\sqrt{3}-4)]$	$(3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha),-\sin\alpha)$

续表

序号	α 的范围	$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域
(v)	$(\pi+\arctan(3\sqrt{3}-4),\pi+\arctan 3\sqrt{3})$	$(2\cos\alpha-\sin\alpha,-\sin\alpha)$
(vi)	$[\pi+\arctan 3\sqrt{3},\frac{3}{2}\pi)$	$(2\cos\alpha-\sin\alpha,3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)]$

且在以上结论中均当且仅当 $(A,B,C)\to(0,0,\pi)$ 时，$f_\alpha(A,B,C)\to-\sin\alpha$；当且仅当 $(A,B,C)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ 时，$f_\alpha(A,B,C)=3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$；当且仅当 $(A,B,C)\to(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时，$f_\alpha(A,B,C)\to 2\cos\alpha-\sin\alpha$.

证明 以下证明的方法用的是文献[3]方法.

$$f_\alpha(A,B,C)=\sum\sin(A-\alpha)=\sin(A-\alpha)+\sin(B-\alpha)+\sin(A+B+\alpha)\triangleq G_A(B)$$

由 $A\leqslant B\leqslant C$，得 $A\leqslant B\leqslant\frac{\pi-A}{2}$，$A\in(0,\frac{\pi}{3}]$.

先把 A 看做常数 $(A\in(0,\frac{\pi}{3}])$，得函数 $G_A(B)$ 的定义域是 $[A,\frac{\pi-A}{2}]$.

$$G'_A(B)=\cos(B-\alpha)+\cos(A+B+\alpha)=2\cos(\alpha+\frac{A}{2})\cos(B+\frac{A}{2}) \quad ①$$

因为 $\alpha+\frac{A}{2}\in(0,2\frac{1}{6}\pi)$，所以

$$G'_A(B)=0\Leftrightarrow B=\frac{\pi-A}{2} \text{ 或 } A=\pi-2\alpha \text{ 或 } A=3\pi-2\alpha$$

(1) 当 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{3})\cup[\frac{3}{2}\pi,2\pi)$ 时.

$$\alpha+\frac{A}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3}{2}\pi,2\frac{1}{6}\pi)$$

所以 $\cos(\alpha+\frac{A}{2})>0$，又 $B+\frac{A}{2}\in(0,\frac{\pi}{2}]$，由①得 $G'_A(B)\geqslant 0$，所以 $G_A(B)$ 是增函数

得此时函数 $G_A(B)$ 的值域是 $[G_A(A),G_A(\frac{\pi-A}{2})]\triangleq[g(A),h(A)]$ ②

其中

$$g(A)=G_A(A)=2\sin(A-\alpha)+\sin(2A+\alpha) \quad ③$$

$$h(A)=G_A(\frac{\pi-A}{2})=\sin(A-\alpha)+2\cos(\frac{A}{2}+\alpha) \quad ④$$

得

$$g'(A)=2\cos(A-\alpha)+2\cos(2A+\alpha)=4\cos\frac{3}{2}A\cos(\alpha+\frac{A}{2})\qquad⑤$$

$$h'(A)=\cos(A-\alpha)-\sin(\frac{A}{2}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{2}-A+\alpha)-\sin(\frac{A}{2}+\alpha)=$$

$$2\sin\frac{\pi-3A}{4}\cos(\frac{\pi-A}{4}+\alpha)\qquad⑥$$

注意　③～⑥对任意的 $A\in(0,\frac{\pi}{3}]$，$\alpha\in[0,2\pi)$ 均成立！

由⑤可得 $g'(A)\geqslant 0$，所以 $g(A)$ 是增函数，得 $g(A)>g(0)=-\sin\alpha$，当且仅当 $A\to 0$ 时，$g(A)\to-\sin\alpha$（以下不再叙述这样的结论，读者均可得出）　⑦

当 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3}{2}\pi,2\pi)$ 时，$\frac{\pi-A}{4}\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$，得 $\frac{\pi-A}{4}+\alpha\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})\cup[\frac{5\pi}{3},2\frac{1}{4}\pi)$. 再由⑥得 $h(A)$ 是增函数，所以 $h(A)\leqslant h(\frac{\pi}{3})=3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$　⑧

由②，⑦，⑧得：

当 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi)$ 时，$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是 $(-\sin\alpha,3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)]$　⑨

当 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ 时，由⑥可证：

当 $A\in(0,4\alpha-\pi)$ 时，$h'(A)<0$；当 $A=4\alpha-\pi$ 时，$h'(A)=0$；当 $A\in(4\alpha-\pi,\frac{\pi}{3}]$ 时，$h'(A)\geqslant 0$（当且仅当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时取等号）.

所以 $h(A)$ 的上确界为 $h(0)=2\cos\alpha-\sin\alpha$，或 $h(\frac{\pi}{3})=3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$.

可证 $h(0)>(\leqslant)h(\frac{\pi}{3})\Leftrightarrow\alpha>(\leqslant)\arctan(3\sqrt{3}-4)$ 且 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$.

再由②，⑦得：

当 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\arctan(3\sqrt{3}-4)]$ 时，$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是 $(-\sin\alpha,3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)]$　⑩

当 $\alpha\in(\arctan(3\sqrt{3}-4),\frac{\pi}{3})$ 时，$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是 $(-\sin\alpha,2\cos\alpha-\sin\alpha)$　⑪

(2) 当 $\alpha\in[\frac{\pi}{2},\frac{4}{3}\pi)$ 时.

$\alpha+\frac{A}{2}\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$，再由 ①，得 $G'_A(B)\leqslant 0$，$G_A(B)$ 的值域是$[h(A),g(A)]$ ⑫

由 ⑤，立得 $g'(A)\leqslant 0$，所以

$$g(A)<g(0)=-\sin\alpha \quad ⑬$$

① 当 $\alpha\in[\frac{\pi}{2},\frac{5}{4}\pi]$ 时，$\frac{\pi-A}{4}\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$，所以 $\frac{\pi-A}{4}+\alpha\in[\frac{2}{3}\pi,\frac{3}{2}\pi)$，由 ⑥ 得 $h'(A)\leqslant 0$，$h(A)\geqslant h(\frac{\pi}{3})=3\sin(\frac{\pi}{3}-\varphi)$.

再由 ⑬,⑭ 得：

当 $\alpha\in[\frac{\pi}{2},\frac{5}{4}\pi]$ 时，$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是$[3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha),-\sin\alpha)$ ⑭

② 当 $\alpha\in(\frac{5}{4}\pi,\frac{4}{3}\pi)$ 时，由 ⑥ 可证：

当 $A\in(0,4\alpha-5\pi)$ 时，$h'(A)>0$；当 $A=4\alpha-5\pi$ 时，$h'(A)=0$；当 $A\in(4\alpha-5\pi,\frac{\pi}{3}]$ 时，$h'(A)\leqslant 0$(当且仅当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时取等号).

所以 $h(A)$ 的下确界为 $h(0)=2\cos\alpha-\sin\alpha$，或 $h(\frac{\pi}{3})=3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$.

可证 $h(0)\geqslant(<)h(\frac{\pi}{3})\Leftrightarrow\alpha\leqslant(>)\pi+\arctan(3\sqrt{3}-4)$ 且 $\alpha\in(\frac{5}{4}\pi,\frac{4}{3}\pi)$.

再由 ⑫,⑬ 得：

当 $\alpha\in(\frac{5}{4}\pi,\pi+\arctan(3\sqrt{3}-4)]$ 时，$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是$[3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha),-\sin\alpha)$ ⑮

当 $\alpha\in(\pi+\arctan(3\sqrt{3}-4),\frac{4}{3}\pi)$ 时，$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是$(2\cos\alpha-\sin\alpha,-\sin\alpha)$ ⑯

(3) 当 $\alpha\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ 时.

当 $A=\pi-2\alpha$ 时，$f_\alpha(A,B,C)=\sin 3\alpha$ ⑰

当 $A\in(0,\pi-2\alpha)$ 时，$\alpha+\frac{A}{2}\in(\alpha,\frac{\pi}{2})\subset(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$，由 ① 得 $G'_A(B)\geqslant 0$，$G_A(B)$ 的值域是$[G_A(A),G_A(\frac{\pi-A}{2})]\triangleq[g(A),h(A)]$ ⑱

由 ⑤ 得

$$g'(A)\geqslant 0,g(A)>g(0)=-\sin\alpha \quad ⑲$$

当 $A\in(0,\frac{\pi}{3}]$ 时，均可得 $\frac{\pi-A}{4}+\alpha\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi)$，由 ⑥ 得 $h'(A)\leqslant 0$ ⑳

所以 $h(A)<h(0)=2\cos\alpha-\sin\alpha$.

再由⑱,⑲得:

当 $A\in(0,\pi-2\alpha)$ 时,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是 $(-\sin\alpha, 2\cos\alpha-\sin\alpha)$ ㉑

当 $A\in(\pi-2\alpha,\frac{\pi}{3}]$ 时,$\alpha+\frac{A}{2}\in(\frac{\pi}{2},\alpha+\frac{\pi}{6}]\subset(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi)$,由①得

$G'_A(B)\leqslant 0$,$G_A(B)$ 的值域是 $[G_A(\frac{\pi-A}{2}),G_A(A)]\triangleq[h(A),g(A)]$ ㉒

由⑤得

$$g'(A)\leqslant 0, g(A)<g(\pi-2\alpha)=\sin 3\alpha \qquad ㉓$$

再由⑳得

$$h(A)\geqslant h(\frac{\pi}{3})=3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$$

再由㉒,㉓得当 $A\in(\pi-2\alpha,\frac{\pi}{3}]$ 时,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是 $[3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha),\sin 3\alpha)$.

再由⑰,㉑得:

当 $\alpha\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是 $[3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha),\sin 3\alpha]\cup(-\sin\alpha, 2\cos\alpha-\sin\alpha)$ ㉔

有 $\sin 3\alpha-(2\cos\alpha-\sin\alpha)=2\cos\alpha(\sin 2\alpha-1)<0$,所以

$$\sin 3\alpha<2\cos\alpha-\sin\alpha \qquad ㉕$$

可证 $3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)>(\leqslant)-\sin\alpha\Leftrightarrow\alpha<(\geqslant)\arctan 3\sqrt{3}$ 且 $\alpha\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$.

再由㉔,㉕得

当 $\alpha\in[\frac{\pi}{3},\arctan 3\sqrt{3})$ 时,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域为 $(-\sin\alpha, 2\cos\alpha-\sin\alpha)$ ㉖

当 $\alpha\in[\arctan 3\sqrt{3},\frac{\pi}{2})$ 时,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域为 $[3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha), 2\cos\alpha-\sin\alpha)$(须先证 $\sin 3\alpha>-\sin\alpha$) ㉗

(4) 当 $\alpha\in[\frac{4}{3}\pi,\frac{3}{2}\pi)$ 时.

当 $A=3\pi-2\alpha$ 时,$f_\alpha(A,B,C)=\sin 3\alpha$ ㉘

当 $A\in(0,3\pi-2\alpha)$ 时,$\alpha+\frac{A}{2}\in(\alpha,\frac{3}{2}\pi)\subset(\frac{4}{3}\pi,\frac{3}{2}\pi)$,由①得

$G'_A(B)\leqslant 0$,$G_A(B)$ 的值域是 $[G_A(\frac{\pi-A}{2}),G_A(A)]=[h(A),g(A)]$ ㉙

由⑤得

$$g'(A)\leqslant 0, g(A)<g(0)=-\sin\alpha \qquad ㉚$$

当 $A\in(0,\frac{\pi}{3}]$ 时,均可得 $\frac{\pi-A}{4}+\alpha\in[\frac{3}{2}\pi,\frac{7}{4}\pi)$,由 ⑥ 得 $h'(A)\geqslant 0$ ㉛

所以
$$h(A)>h(0)=2\cos\alpha-\sin\alpha$$
再由 ㉙,㉚ 得:

当 $A\in(0,3\pi-2\alpha)$ 时,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是 $(2\cos\alpha-\sin\alpha,-\sin\alpha)$ ㉜

3) 当 $A\in(3\pi-2\alpha,\frac{\pi}{3}]$ 时,$\alpha+\frac{A}{2}\in(\frac{3}{2}\pi,\alpha+\frac{\pi}{6}]\subset(\frac{3}{2}\pi,\frac{5}{3}\pi)$,由 ① 得 $G'_A(B)\geqslant 0$,$G_A(B)$ 的值域是 $[G_A(A),G_A(\frac{\pi-A}{2})]\triangleq[g(A),h(A)]$ ㉝

由 ⑤ 得
$$g'(A)\geqslant 0,g(A)>g(3\pi-2\alpha)=\sin 3\alpha \quad ㉞$$
由 ㉛ 得
$$h(A)\leqslant h(\frac{\pi}{3})=3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$$

再由 ㉝,㉞ 得:当 $A\in(3\pi-2\alpha,\frac{\pi}{3}]$ 时,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是 $(\sin 3\alpha,3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)]$.

再由 ㉘,㉜ 得:

当 $\alpha\in[\frac{4}{3}\pi,\frac{3}{2}\pi)$ 时,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域是 $(2\cos\alpha-\sin\alpha,-\sin\alpha)\cup[\sin 3\alpha,3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)]$ ㉟

同 ㉕,可证
$$\sin 3\alpha>2\cos\alpha-\sin\alpha \quad ㊱$$

还有 $3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)\geqslant(<)-\sin\alpha\Leftrightarrow\alpha\geqslant(<)\pi+\arctan 3\sqrt{3}$ 且 $\alpha\in[\frac{4}{3}\pi,\frac{3}{2}\pi)$.

再由 ㉟,㊱ 得:

当 $\alpha\in[\frac{4}{3}\pi,\pi+\arctan 3\sqrt{3})$ 时,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域为 $(2\cos\alpha-\sin\alpha,-\sin\alpha)$ ㊲

当 $\alpha\in[\pi+\arctan 3\sqrt{3},\frac{3}{2}\pi)$ 时,$f_\alpha(A,B,C)$ 的值域为 $(2\cos\alpha-\sin\alpha,3\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)]$(须先证 $-\sin\alpha>\sin 3\alpha$) ㊳

再由 ⑨,⑩;⑪,㉖;㉗;⑭,⑮;⑯,㊲;㊳ 可分别得(i),(ii),(iii),(iv),(v),(vi) 成立.

3　其他问题

在定理(i) 中,可令 $\alpha=\frac{\pi}{6}$,即得文献[1],[2] 的结论;在定理(ii) 中,可令 $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$,即得文献[3] 的结论 1;在定理(i) 中,令 $\alpha=0$,得一常见结论:

在 $\triangle ABC$ 中,$\sum\sin A$ 的值域是$(0,\frac{3}{2}\sqrt{3}]$.

对于任意的角 β,有 $\beta-2\pi[\frac{\beta}{2\pi}]\in[0,2\pi)$(其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数),所以用恒等式

$$f_\beta(A,B,C)=f_{\beta-2\pi[\frac{\beta}{2\pi}]}(A,B,C)$$

及定理可求出 $f_\beta(A,B,C)$ 的值域.

在定理(i) 中,令 $\alpha=\frac{3}{2}\pi$,得文献[3] 的结论 2:

在 $\triangle ABC$ 中,$1\leqslant\sum\cos A<\frac{3}{2}$.

再由恒等式

$$\sum\cos(A-\alpha)=f_{\alpha-\frac{\pi}{2}}(A,B,C)$$

还可求出函数 $g_\alpha(A,B,C)=\sum\cos(A-\alpha)$(其中 A,B,C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角,α 是已知的角) 的值域.

问题 2　在 $\triangle ABC$ 中,求函数$\frac{\sum\sin(A-\alpha)}{\sum\cos(A-\alpha)}$, $\sum\sin(kA-\alpha)$, $\sum\cos(kA-\alpha)$,$\frac{\sum\sin(kA-\alpha)}{\sum\cos(lA-\alpha)}$,$\prod\sin(kA-\alpha)$(其中 k,l 是已知的非零实数,α 是已知的角) 的值域.

盼望读者能给出本文定理的初等证明.

参考文献

[1] 李明.数学问题(1525)[J].数学通报,2004(12):43.
[2] 刘永钦.一个数学问题的简便证明[J].数学通报,2006(10):19.
[3] 甘志国.对两个结论的注记[J].数学通讯,2006(19):21-22.

多边形的余弦定理及一个面积公式

1 多边形的余弦定理及一个面积公式

文献[1],[2]均介绍了四边形的余弦定理,本节将给出 n 边形(本节所说的 n 边形可以是凸 n 边形,也可以是凹 n 边形,$n \geqslant 3$)的余弦定理,还得到了 n 边形的一个面积公式.

定理 1 设 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的各边长分别是 $A_iA_{i+1} = a_i(i = 1,2,\cdots,n$,约定 $A_{n+1} = A_1)$,各内角的度数分别是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(下同),则:

$$(1)\ a_n\sin A_n = \sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{n+i}a_i\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{n-1});$$

$$(2)\ a_n\cos A_n = a_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{n+i}a_i\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{n-1});$$

$$(3)\ a_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1}a_i + 2\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-j-1}(-1)^j a_ia_{i+j}\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}).$$

证明 先证这三个结论在 $n = 3$ 时均成立,即证

$$a_3\sin A_3 = a_1\sin A_2 \quad ①$$

$$a_3\cos A_3 = a_2 - a_1\cos A_2 \quad ②$$

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos A_2 \quad ③$$

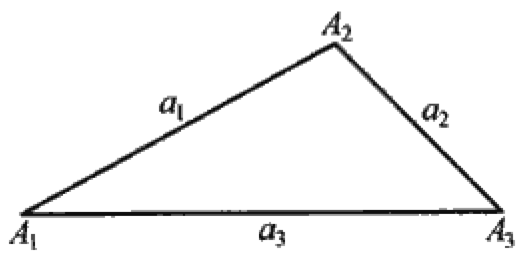


图 1

如图 1,由正弦定理知

$$\frac{a_1}{\sin A_3} = \frac{a_3}{\sin A_2}$$

所以式 ① 成立.

由三角形的余弦定理,得

$$\cos A_3 = \frac{a_3^2 + a_2^2 - a_1^2}{2a_3a_2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos A_2 + a_2^2 - a_1^2}{2a_3a_2} = \frac{a_2 - a_1\cos A_2}{a_3}$$

所以式 ② 成立.

式 ③ 显然成立.

假设 $n = k$ 时,(1),(2),(3) 均成立,下证 $n = k + 1$ 时(1),(2),(3) 均成立.

分两种情形：

若点 A_{k+1} 在多边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 之外(图 2)，连结 A_1A_k，设 $\angle A_{k-1}A_kA_1=\alpha$，由式 ①，②，③ 可得

$$a_{k+1}\sin A_{k+1}=A_1A_k\sin(A_k-\alpha)=\sin A_k\cdot A_1A_k\cos\alpha-\cos A_k\cdot A_1A_k\sin\alpha \quad ④$$

$$a_{k+1}\cos A_{k+1}=a_k-A_1A_k\cos(A_k-\alpha)=$$
$$a_k-\cos A_k\cdot A_1A_k\cos\alpha-\sin A_k\cdot A_1A_k\sin\alpha \quad ⑤$$

$$a_{k+1}^2=A_1A_k^2+a_k^2-2a_k\cdot A_1A_k\cos(A_k-\alpha)=$$
$$A_1A_k^2+a_k^2-2a_k\cos A_k\cdot A_1A_k\cos\alpha-2a_k\sin A_k\cdot A_1A_k\sin\alpha \quad ⑥$$

若点 A_{k+1} 在多边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 之内(图 3)，连结 A_1A_k，设 $\angle A_{k-1}A_kA_1=\alpha$，由式 ①，②，③ 可得

$a_{k+1}\sin(2\pi-A_{k+1})=A_1A_k\sin(\alpha-A_k)$，也得式 ④ 成立.

$a_{k+1}\cos(2\pi-A_{k+1})=a_k-A_1A_k\cos(\alpha-A_k)$，也得式 ⑤ 成立.

$a_{k+1}^2=A_1A_k^2+a_k^2-2a_k\cdot A_1A_k\cos(\alpha-A_k)$，也得式 ⑥ 成立.

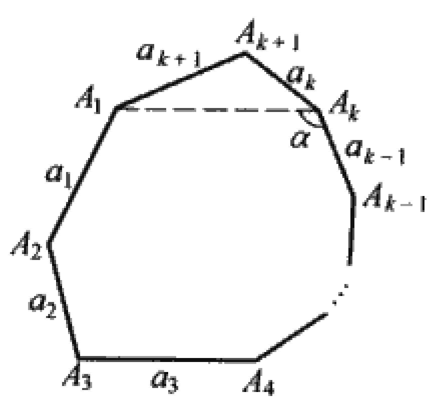


图 2

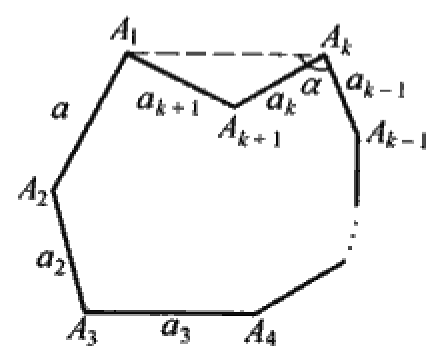


图 3

总之，对于多边形 $A_1A_2\cdots A_{k+1}$，式 ④，⑤，⑥ 均成立.

又由 $n=k$ 时(1)，(2)，(3) 均成立，得

$$a_{k+1}\sin A_{k+1}=\sin A_k\left[a_{k-1}-\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i}a_i\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{k-1})\right]-$$
$$\cos A_k\cdot\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i}a_i\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{k-1})=$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k+1+i}a_i\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_k)$$

$$a_{k+1}\cos A_{k+1}=a_k-\cos A_k\left[a_{k-1}-\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i}a_i\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{k-1})\right]-$$

$$\sin A_k \cdot \sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i}a_i\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{k-1}) =$$

$$a_k - \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k+1+i}a_i\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_k)$$

$$a_{k+1}^2 = \sum_{i=1}^{k}a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-j-1}(-1)^j a_i a_{i+j}\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) -$$

$$2a_k\cos A_k \cdot [a_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-2}a_i\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{k-1})] -$$

$$2a_k\sin A_k \cdot \sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i}a_i\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{k-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-j-1}(-1)^j a_i a_{i+j}\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) +$$

$$2\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-i}a_k a_i\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_k) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-j-1}(-1)^j a_i a_{i+j}\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) +$$

$$2\sum_{j=1}^{k-2}(-1)^j a_k a_{k-j}\cos(A_{k-j+1}+A_{k-j+2}+\cdots+A_k) +$$

$$2(-1)^{k-1}a_k a_1\cos(A_2+A_3+\cdots+A_k) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-j}(-1)^j a_i a_{i+j}\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) +$$

$$2(-1)^{k-1}a_k a_1\cos(A_2+A_3+\cdots+A_k) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}(-1)^j a_i a_{i+j}\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j})$$

说明 $n = k+1$ 时(1),(2),(3) 均成立.所以定理 1 成立.

可把定理 1(3) 叫做 n 边形的余弦定理.由以上证明还可给出文献[2]介绍的四边形余弦定理的简洁证明.

定理 2 $S_{n边形A_1A_2\cdots A_n} = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-j-1}(-1)^{j+1}a_i a_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j})$.

证明 当 $n = 3$ 时显然成立.

假设 $n = k$ 时成立,下证 $n = k+1$ 时成立.

也分两种情形:

若点 A_{k+1} 在 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 之外(图 2),连结 A_1A_k,设 $\angle A_{k-1}A_kA_1 = \alpha$,得

$$S_{\triangle A_kA_{k+1}A_1} = \frac{1}{2}a_k \cdot A_1A_k\sin(A_k - \alpha) =$$
$$\frac{1}{2}a_k\sin A_k \cdot A_1A_k\cos\alpha - \frac{1}{2}a_k\cos A_k \cdot A_1A_k\sin\alpha$$

又由定理 1(1),(2),得

$$S_{(k+1)\text{边形}A_1A_2\cdots A_{k+1}} = S_{k\text{边形}A_1A_2\cdots A_k} + S_{\triangle A_kA_{k+1}A_1} =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-j-1}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) +$$
$$\frac{1}{2}a_k\sin A_k \cdot \left[a_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i}a_i\cos(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{k-1})\right] -$$
$$\frac{1}{2}a_k\cos A_k\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i}a_i\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{k-1}) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-j-1}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-i+1}a_ka_i\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_k) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-j-1}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-2}(-1)^{j+1}a_ka_{k-j}\sin(A_{k-j+1}+A_{k-j+2}+\cdots+A_k) +$$
$$\frac{1}{2}(-1)^k a_ka_1\sin(A_2+A_3+\cdots+A_k) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-j}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) +$$
$$\frac{1}{2}(-1)^k a_ka_1\sin(A_2+A_3+\cdots+A_k) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j})$$

说明此时 $n = k + 1$ 时成立.

若点 A_{k+1} 在多边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 之内(图 3),连结 A_1A_k,设 $\angle A_{k-1}A_kA_1 = \alpha$,得

$$-S_{\triangle A_kA_{k+1}A_1} = \frac{1}{2}a_k \cdot A_1A_k\sin(A_k - \alpha) =$$
$$\frac{1}{2}a_k\sin A_k \cdot A_1A_k\cos\alpha - \frac{1}{2}a_k\cos A_k \cdot A_1A_k\sin\alpha$$
$$S_{(k+1)\text{边形}A_1A_2\cdots A_{k+1}} = S_{k\text{边形}A_1A_2\cdots A_k} - S_{\triangle A_kA_{k+1}A_1}$$

以下的证明全同上述证明.

此时也得 $n = k + 1$ 时成立,所以定理 2 成立.

由定理 2 知,若约定 $a_0 = a_n$,则

$$
\begin{aligned}
S_{n\text{边形}A_1A_2\cdots A_n} = {} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=0}^{n-j-2}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) = \\
& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-j-2}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) + \\
& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{j+1}a_0a_j\sin(A_1+A_2+\cdots+A_j) = \\
& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-3}\sum_{i=1}^{n-j-2}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j}) + \\
& \frac{1}{2}a_0\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{j+1}a_j\sin(A_1+A_2+\cdots+A_j)
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{a_n\to 0}S_{n\text{边形}A_1A_2\cdots A_n} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-3}\sum_{i=0}^{n-j-2}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j})$(注意 $a_0 = a_n$).

又由定理 2,得

$$
S_{(n-1)\text{边形}A_1A_2\cdots A_{n-1}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-3}\sum_{i=1}^{n-j-2}(-1)^{j+1}a_ia_{i+j}\sin(A_{i+1}+A_{i+2}+\cdots+A_{i+j})
$$

这就说明当 $a_n \to 0$ 时定理 2 也成立.

又由函数的连续性知,当某些 $A_i(i = 2,3,\cdots,n-1) \to 0,\pi,2\pi$ 时,定理 1,2 也成立.

2　给定三边长度(有两边相等)的四边形的最大面积

注意　本大节所说的四边形 $ABCD$ 中 AB,BC,CD 的长度均给定(分别为正常数 a,b,c),AD 的长度可以趋向于 0(此时四边形 $ABCD$ 趋向于 $\triangle ABC$);$\angle B,\angle C$ 的大小可以趋向于 $0,\pi$ 或 2π(图 4,5),此时四边形 $ABCD$ 的内角和仍然是 2π.

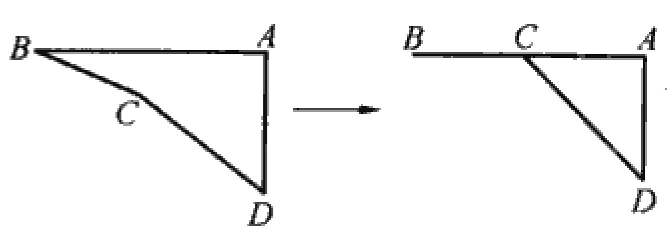


图 4

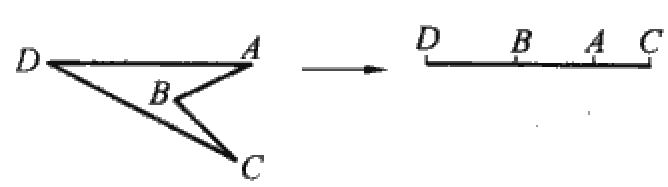


图 5

容易知道,给定三角形两边的长度时,当且仅当这两边所夹的角是直角时,这个三角形的面积最大[3].

给定四边形的三边长度(有两边相等)时,何时这个四边形的面积最大?本节将用初等方法解决这个问题.

2.1　四边形的一个面积公式

由定理 2 及其最后的说明,得:

推论　$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}[ab\sin B+bc\sin C-ac\sin(B+C)]$(其中 B,C 为四边形 $ABCD$ 的内角 $\angle B,\angle C$ 的大小,下同).

2.2　一个不等式

定理 3　若 $|x|\leqslant 1,p,|q|$ 均为正常数,则

$$(p+qx)\sqrt{1-x^2}\leqslant\frac{(\sqrt{p^2+8q^2}+3p)^2}{8\sqrt{2p\sqrt{p^2+8q^2}+2p^2+4q^2}}$$

当且仅当 $x=\frac{\sqrt{p^2+8q^2}-p}{4q}$ 时取等号.

证明　只需证 $|x|<1$ 且 $p+qx>0$ 时的情形.

$$(1-x^2)(p+qx)^2=\frac{1}{kl}(k+kx)(l-lx)(p+qx)(p+qx)(k,l\text{ 是正常数})\leqslant$$

$$\frac{1}{kl}\left[\frac{(k+l+2p)+(k-l+2q)x}{4}\right]^4$$

令 $\begin{cases}k+2q=l\\k+kx=l-lx=p+qx,\end{cases}$ 得

$$k=\frac{\sqrt{p^2+8q^2}+p-2q}{2},l=\frac{\sqrt{p^2+8q^2}+p+2q}{2},x=\frac{\sqrt{p^2+8q^2}-p}{4q}$$

(可证 $k,l>0,|x|\leqslant 1$).

所以

$$(1-x^2)(p+qx)^2\leqslant\frac{1}{kl}\left(\frac{k+l+2p}{4}\right)^4=\frac{(\sqrt{p^2+8q^2}+3p)^4}{64(2p\sqrt{p^2+8q^2}+2p^2+4q^2)}$$

当且仅当 $x=\frac{\sqrt{p^2+8q^2}-p}{4q}$ 时取等号.

从而可得定理 3 成立.

2.3　给定三边长度(有两边相等)的四边形的最大面积

定理 4　若 $a=b$,则 $S_{四边形ABCD}\leqslant\frac{a(\sqrt{8a^2+2c^2}+3c)^2}{8\sqrt{2c\sqrt{8a^2+c^2}+4a^2+2c^2}}$,当且仅

当 $C=\arccos\dfrac{c-\sqrt{8a^2+c^2}}{4a}$ 且 $B=2(\pi-C)$ 时取等号.

证明 由推论,得

$$\begin{aligned}\frac{2}{a}S_{四边形ABCD}&=a\sin B+c[\sin C-\sin(B+C)]=\\&2a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}-2c\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B+2C}{2}=\\&2\sin\frac{B}{2}\left(a\cos\frac{B}{2}-c\cos\frac{B+2C}{2}\right)\leqslant\\&2\sin\frac{B}{2}\left(a\cos\frac{B}{2}+c\right)(\text{当且仅当 }B+2C=2\pi\text{ 时取等号})=\\&2(c+a\cos\frac{B}{2})\sqrt{1-\cos^2\frac{B}{2}}(\text{因为}0\leqslant B\leqslant 2\pi,\text{所以}\sin\frac{B}{2}\geqslant 0)\leqslant\\&\frac{(\sqrt{8a^2+c^2}+3c)^2}{4\sqrt{2c\sqrt{8a^2+c^2}+4a^2+2c^2}}(\text{由定理 3 知,当且仅当}\cos\frac{B}{2}=\\&\frac{\sqrt{8a^2+c^2}-c}{4a}\text{ 时取等号})\end{aligned}$$

由 $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{8a^2+c^2}-c}{4a}$, $B+2C=2\pi$,可得

$$\cos B=\frac{c^2-c\sqrt{8a^2+c^2}}{4a^2}<0,\cos C=\frac{c-\sqrt{8a^2+c^2}}{4a}<0$$

所以 $B,C\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. 又 $B+2C=2\pi$,得 $B,C\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

从而可得定理 4 成立.

定理 5 若 $a=c$,则 $S_{四边形ABCD}\leqslant\dfrac{a(\sqrt{8a^2+b^2}+3b)^2}{8\sqrt{2b\sqrt{8a^2+b^2}+4a^2+2b^2}}$,当且仅当 $B=C=\arccos\dfrac{b-\sqrt{8a^2+b^2}}{4a}$ 时取等号.

证明 由推论,得

$$\begin{aligned}\frac{2}{a}S_{四边形ABCD}&=b(\sin B+\sin C)-a\sin(B+C)=\\&2b\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2a\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}=\\&2\sin\frac{B+C}{2}\left(b\cos\frac{B-C}{2}-a\cos\frac{B+C}{2}\right)\leqslant\\&2\sin\frac{B+C}{2}\left(b-a\cos\frac{B+C}{2}\right)(\text{当且仅当 }B=C\text{ 时取等号})=\end{aligned}$$

$$2(b-a\cos\frac{B+C}{2})\sqrt{1-\cos^2\frac{B+C}{2}}$$（因为 $0\leqslant B+C\leqslant 2\pi$，所以 $\sin\frac{B+C}{2}\geqslant 0$）$\leqslant$

$$\frac{(\sqrt{8a^2+b^2}+3b)^2}{4\sqrt{2b\sqrt{8a^2+b^2}+4a^2+2b^2}}$$（由定理 3 知，当且仅当 $\cos\frac{B+C}{2}=\frac{b-\sqrt{8a^2+b^2}}{4a}$ 时取等号）

由 $\cos\frac{B+C}{2}=\frac{b-\sqrt{8a^2+b^2}}{4a}<0$，$B=C$，得 $B=C=\frac{B+C}{2}\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$.

又 $B+C\leqslant 2\pi$，所以 $B=C\leqslant\pi$，得 $B,C\in(\frac{\pi}{2},\pi]$.

从而可得定理 5 成立.

2.4　一道应用题

例　用三块长相同，宽分别为 a,a,b 的薄铁板焊接成一个水槽，怎样设计可使水槽的横截面积最大？

解　本题即求三边长度分别为 a,a,b 的四边形的最大面积. 由定理 4,5 知，设计方案有两种：

(1) 如图 6，$C=\arccos\frac{b-\sqrt{8a^2+b^2}}{4a}$ 且 $B=2(\pi-C)$；

(2) 如图 7，$B=C=\arccos\frac{b-\sqrt{8a^2+b^2}}{4a}$.

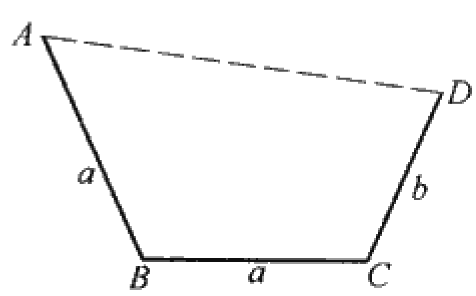


图 6

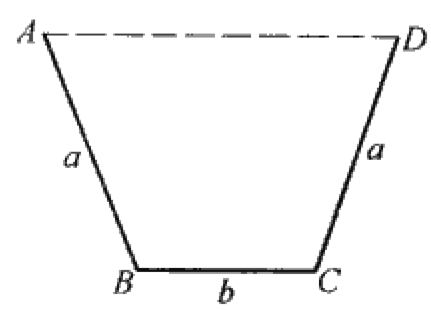


图 7

这两种设计方案均可得到水槽的最大横截面积 $\frac{a(\sqrt{8a^2+b^2}+3b)^2}{8\sqrt{2b\sqrt{8a^2+b^2}+4a^2+2b^2}}$.

参考文献

[1] 熊斌,田廷彦.四边形的余弦定理与六点问题[J].数学通讯,2000(15):33-34.

[2] 田廷彦,熊斌.平面八点的一个极值问题,初等数学前沿[M].南京:江苏教育出版社,1996:170-192.

[3] RICHARD COURANT, HERBERT ROBBINS.数学是什么[M].汪浩,朱煜民,译.长沙:湖南教育出版社,1985:352.

浅探给定三边长度的四边形的最大面积

定理1　若四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD 的长度均给定，且这个四边形的面积最大，则：

(1)$\angle ABD = \angle ACD = \frac{\pi}{2}$；

(2)$B, C \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

证明　(1) 参见图 1 及文献[1] 的结论可证.

(2) 由(1) 得 $B > \frac{\pi}{2}$.

若 $B > \pi$，作点 B 关于AC 的对称点B'(图 2)，得四边形 $AB'CD$ 的边$AB' = a, B'C = b, CD = c, B' = 2\pi - B < \pi$，且 $S_{四边形ABCD} < S_{四边形AB'CD}$，这与四边形 $ABCD$ 的面积最大矛盾！所以 $B \leqslant \pi$. 又 B 是四边形$ABCD$ 的一个内角，所以 $B \neq \pi$，得 $B \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. 同理有 $C \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

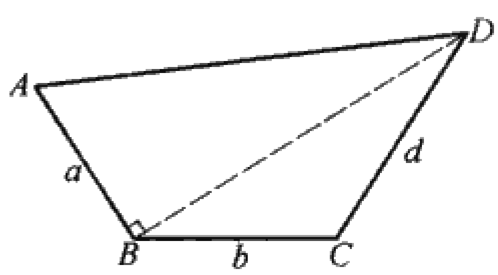


图 1

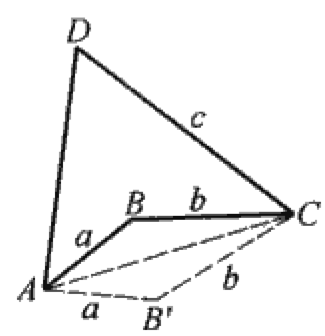


图 2

定理2　若四边形 $ABCD$ 的边$AB = a, BC = b, CD = c$，且这个四边形的面积最大，则：

(1)$a\cos B = c\cos C$；

(2)$2ab\cos^3 B - (a^2 + b^2 + c^2)\cos^2 B + c^2 = 0$.

证明　由本书“多边形的余弦定理及一个面积公式”部分中的推论及二元函数取得极值的必要条件(见文献[2] 的定理 3)，可得

$$ab\cos B - ac\cos(B + C) = bc\cos C - ac\cos(B + C) = 0$$

从而可得(1) 成立.

下面再用定理 1 及(1) 证明(2) 成立.

由图 1 可得

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C = b^2 + c^2 - 2ab\cos B$$

又由定理 1,得

$$\frac{BD}{\sin C} = \frac{c}{\sin\left(B - \frac{\pi}{2}\right)}$$

所以

$$BD^2\cos^2 B = c^2 - (c\cos C)^2 = c^2 - a^2\cos^2 B$$
$$\cos^2 B(b^2 + c^2 - 2ab\cos B) = c^2 - a^2\cos^2 B$$
$$2ab\cos^3 B - (a^2 + b^2 + c^2)\cos^2 B + c^2 = 0$$

可把定理 1 推广为

定理 3 若 $n(n \geqslant 4)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边 $A_iA_{i+1}(i = 1,2,\cdots,n-1)$ 的长度均给定,且这个 n 边形的面积最大,则 $\angle A_1A_2A_n = \angle A_1A_{n-1}A_n = \frac{\pi}{2}$,$A_2$,$A_{n-1} \in (\frac{\pi}{2},\pi)$,$A_j < \pi(j = 3,4,\cdots,n-2)$.

猜想 当 $n \geqslant 5$ 时,定理 3 中的 $A_j > \frac{\pi}{2}$.

定理 4 若四边形 $ABCD$ 的边 $AB = a, BC = b, CD = c \neq a$,则

$$S_{四边形ABCD} < \frac{a(\sqrt{8a^2 + 2b^2} + 3b)^2}{16\sqrt{2b\sqrt{8a^2 + b^2} + 4a^2 + 2b^2}} + \frac{c(\sqrt{b^2 + 8c^2} + 3b)^2}{16\sqrt{2b\sqrt{b^2 + 8c^2} + 2b^2 + 4c^2}}$$

证明 当 $a\cos B = c\cos C$ 时,由本书“多边形的余弦定理及一个面积公式”部分中的推论,得

$$2S_{四边形ABCD} = ab\sin B + bc\sin C - a^2\sin B\cos B - ac\cos B\sin C =$$
$$(b - a\cos B)(a\sin B + c\sin C) =$$
$$a\sin B(b - a\cos B) + c\sin C(b - c\cos C) \leqslant$$
$$\frac{a(\sqrt{8a^2 + b^2} + 3b)^2}{8\sqrt{2b\sqrt{8a^2 + b^2} + 4a^2 + 2b^2}} + \frac{c(\sqrt{b^2 + 8c^2} + 3b)^2}{8\sqrt{2b\sqrt{b^2 + 8c^2} + 2b^2 + 4c^2}}$$

参见本书“多边形的余弦定理及一个面积公式”部分中的定理 5 的证明知:以上“$\leqslant$”中的“=”当且仅当

$$\begin{cases} \cos B = \dfrac{b - \sqrt{8a^2 + b^2}}{4a} \\ \cos C = \dfrac{b - \sqrt{b^2 + 8c^2}}{4c} \\ a\cos B = c\cos C \end{cases}$$

即当且仅当$\begin{cases} a = c \\ B = C \end{cases}$(因为$0 < B + C < 2\pi$)时取等号.所以由定理2(1)知定理4成立.

参考文献

[1] RICHARD COURANT, HERBERT ROBBINS.数学是什么[M].汪浩,朱煜民,译.长沙:湖南教育出版社,1985:352.

[2] 华东师范大学数学系.数学分析(下册)[M].北京:高等教育出版社,1981:218.

一类三角函数的最值

文献[1]的命题1,2即以下两个关于三角函数最值的结论(注意,本文中的k取任意整数).

结论1 若$x\in(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2})$,$ab>0$,则$\left|\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\right|\geqslant(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$(当且仅当$x=k\pi+\arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$时取等号).

结论2 若$x\in(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi)$,$ab<0$,则$\left|\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\right|\geqslant(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$(当且仅当$x=k\pi+\arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$时取等号).

(文献[1]只证明了结论1,实际上,在结论1中令$x=x'+\frac{\pi}{2}$,$a=b'$,$b=-a'$立得结论2.)

由结论1,2还可得以下三角函数的最值:

定理1 (1)若$x\in(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2})$,$\sin 2\varphi>0$,则$\left|\frac{\sin(x+\varphi)}{\sin 2x}\right|\geqslant\frac{1}{2}(\sin^{\frac{2}{3}}\varphi+\cos^{\frac{2}{3}}\varphi)^{\frac{3}{2}}$(当且仅当$x=k\pi+\arctan\sqrt[3]{\tan\varphi}$时取等号);

(2)若$x\in(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2})$,$\sin 2\varphi<0$,则$\left|\frac{\cos(x+\varphi)}{\sin 2x}\right|\geqslant\frac{1}{2}(\sin^{\frac{2}{3}}\varphi+\cos^{\frac{2}{3}}\varphi)^{\frac{3}{2}}$(当且仅当$x=k\pi-\arctan\sqrt[3]{\cot\varphi}$时取等号);

(3)若$x\in(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4})$,$\cos 2\varphi<0$,则$\left|\frac{\sin(x+\varphi)}{\cos 2x}\right|\geqslant\frac{1}{2}[\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi-\frac{\pi}{4})+\cos^{\frac{2}{3}}(\varphi-\frac{\pi}{4})]^{\frac{3}{2}}$(当且仅当$x=k\pi-\frac{\pi}{4}+\arctan\sqrt[3]{\tan(\varphi-\frac{\pi}{4})}$时取等号);

(4)若$x\in(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3}{4}\pi)$,$\cos 2\varphi>0$,则$\left|\frac{\sin(x+\varphi)}{\cos 2x}\right|\geqslant\frac{1}{2}[\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi+\frac{\pi}{4})+\cos^{\frac{2}{3}}(\varphi+\frac{\pi}{4})]^{\frac{3}{2}}$(当且仅当$x=k\pi+\frac{\pi}{4}+\arctan\sqrt[3]{\tan(\varphi+\frac{\pi}{4})}$时取等号);

(5)若$x\in(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4})$,$\cos 2\varphi>0$,则$\left|\frac{\cos(x+\varphi)}{\cos 2x}\right|\geqslant\frac{1}{2}[\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi+$

$\frac{\pi}{4}) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi + \frac{\pi}{4})]^{\frac{3}{2}}$(当且仅当 $x = k\pi - \frac{\pi}{4} + \arctan\sqrt[3]{\tan(\varphi + \frac{\pi}{4})}$ 时取等号);

(6) 若 $x \in (k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\pi), \cos 2\varphi < 0$, 则 $\left|\frac{\cos(x+\varphi)}{\cos 2x}\right| \geqslant \frac{1}{2}[\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi - \frac{\pi}{4}) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi - \frac{\pi}{4})]^{\frac{3}{2}}$(当且仅当 $x = k\pi + \frac{\pi}{4} + \arctan\sqrt[3]{\tan(\varphi - \frac{\pi}{4})}$ 时取等号).

证明　(1) 在结论 1 中令 $a = \frac{1}{2}\sin\varphi, b = \frac{1}{2}\cos\varphi$ 可证.

(2) 在(1) 中令 $\varphi = \varphi' + \frac{\pi}{2}$ 可证.

(3) 在(1) 中令 $x = x' + \frac{\pi}{4}, \varphi = \varphi' - \frac{\pi}{4}$ 可证.

(4) 在(1) 中令 $x = x' - \frac{\pi}{4}, \varphi = \varphi' + \frac{\pi}{4}$ 可证.

(5) 在(3) 中令 $\varphi = \varphi' + \frac{\pi}{2}$ 可证.

(6) 在(4) 中令 $\varphi = \varphi' - \frac{\pi}{2}$ 可证.

定理 2　在定理 1 中把 $x \in (A, B)$ 均改为 $x \in (A - \frac{\pi}{2}, B - \frac{\pi}{2})$,同时把 $\sin 2\varphi > (<) 0, \cos 2\varphi > (<) 0$ 改为 $\sin 2\varphi < (>) 0, \cos 2\varphi < (>) 0$,其余不变,所得结论均成立.

证明　运用结论 2 同定理 1 的证明可证.

运用结论"若 $A \geqslant \alpha > 0$,则$\frac{1}{A} \leqslant \frac{1}{\alpha}$(当且仅当 $A = \alpha$ 时取等号)"还可把定理 1,2 变形为其他形式的最值定理.

参考文献

[1] 周荣诰.一个三角不等式[J].数学通讯,2002(1):29-30.

满足“边边角”条件的两个三角形全等的判定

1 判定定理

众所周知,满足“边边角”(有两边和其中一边的对角相等)的两个三角形不一定全等,但有以下结论成立:

定理 有两边和其中一边的对角对应相等,且这两边中另一边的对角之和不为平角的两个三角形全等(简记为“SSA”,$\angle B+\angle B'\neq 180°$).

已知:如图1,在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,$AB=A'B'$,$BC=B'C'$,$\angle C=\angle C'$,$\angle A+\angle A'\neq 180°$,求证:$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

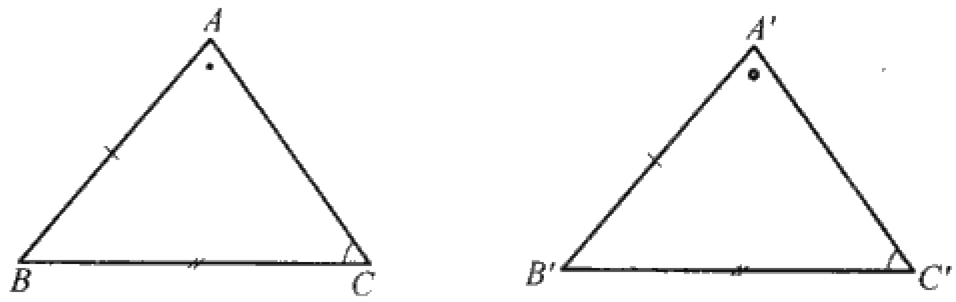


图1

证明 由正弦定理,得

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A},\frac{A'B'}{\sin C'}=\frac{B'C'}{\sin A'}$$

由题设,可得$\sin A=\sin A'$,所以$\angle A=\angle A'$,或$\angle A+\angle A'=180°$.

再由题设,得$\angle A=\angle A'$.

所以$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$(角角边).

推论 有两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形不全等的充要条件是这两边中另一边的对角之和为平角且另一边的对角中有一个不为直角.

推论的意义即:如图1,若$AB=A'B'$,$BC=B'C'$,$\angle C=\angle C'$,则$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不全等的充要条件是$\angle A+\angle A'=180°$,且$\angle A\neq 90°$.

2 判定定理的应用

已知:如图2,在$\triangle ABC$中,$\angle B=\angle C$,求证:$AB=AC$.

证明 作$\triangle ABC$的中线AD,因为

$$\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC<180°$$

所以可得 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$(SSA, $\angle B + \angle B' \neq 180°$),进而得 $AB = AC$.

说明　"等角对等边"的证明,通常是作顶角的平分线或底边上的高来给出证明,不能作底边上的中线来证明.

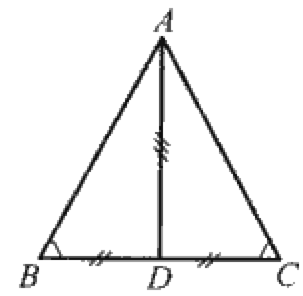


图 2

例 2　已知:如图 3,AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,也是中线,求证:$AB = AC$.

证明　因为 $\angle B + \angle C < 180°$,所以可得 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$(SSA, $\angle B + \angle B' \neq 180°$),所以 $AB = AC$.

说明　可以证明"两线合一推等腰",但较难的是以上问题的证明.

例 3　(人民教育出版社初二《几何》课本的例题)已知:如图 4,点 D,E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上,$AB = AC, AD = AE$,求证:$BD = CE$.

证明　由 $AB = AC$,得 $\angle B = \angle C$.

由 $\angle 1 + \angle 2 < 180°$,得 $\angle 3 + \angle 4 > 180°$,所以 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$(SSA, $\angle B + \angle B' \neq 180°$),$BD = CE$.

例 4　已知:如图 5,$AB = AC$,$\triangle ABC$ 的两条中线 BD, CE 交于点 O,求证:点 O 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

证明　可证 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$(边角边),所以 $\angle 1 = \angle 2$,又

$$\angle AOB + \angle AOC = 360° - \angle BOC > 180°(因为 \angle BOC < 180°)$$

得

$$\triangle AOB \cong \triangle AOC(SSA, \angle B + \angle B' \neq 180°)$$

所以 AO 平分 $\angle BAC$.

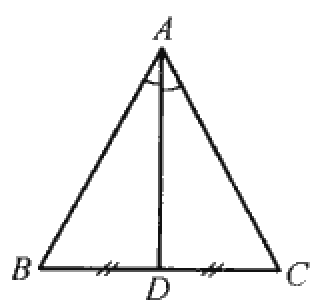


图 3

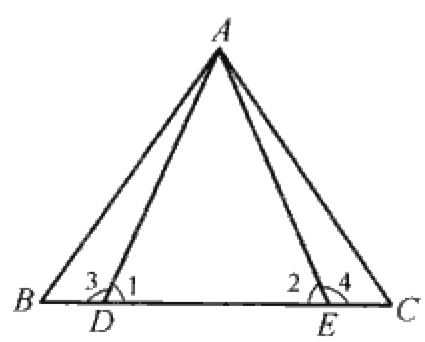


图 4

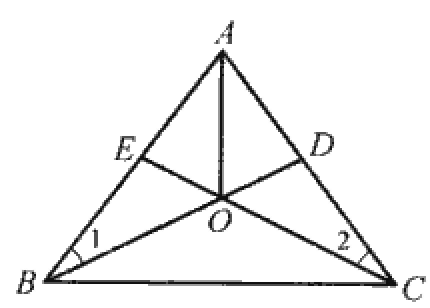


图 5

3　一道反例的构造

问题　作出一个凸四边形,使其有一组对边相等且有一组对角相等,但这个凸四边形不是平行四边形.

分析　如图 6,在凸四边形 $ABCD$ 中,要求凸四边形 $ABCD$ 不是平行四边形,就是要求满足"边边角"条件的两个三角形($\triangle ABD$ 与 $\triangle CDB$)不全等.

由推论得,其充要条件是 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ 且($\angle 1 < 90°$ 或 $\angle 2 < 90°$).

不妨设$\angle 1 < 90^\circ$,得$\angle 2 > 90^\circ$,在$\triangle DBC$中,易得$DC > DB$,所以$AB > DB$.

又$\angle ABC = \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ - \angle 1 + \angle 3 < 180^\circ$,得$\angle 1 > \angle 3$,所以$AB > AD$.

得AB是$\triangle ABD$的最大边,所以$\triangle ABD$是锐角三角形.

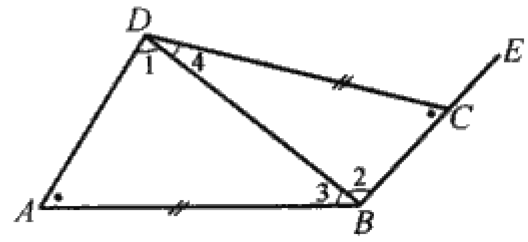


图 6

从而可得如下作法:

作法 (1) 作锐角$\triangle ABD$,使其最长边为AB.

(2) 在$\triangle ABD$之外作$\angle DBE = 180^\circ - \angle ADB$.

(3) 以点D为圆心,AB为半径作弧,与射线BE交于点C(因为可证$DC > DB$,所以点C是唯一存在的).

(4) 连结DC.

四边形$ABCD$就是所求作的凸四边形.

证明 只需证$\angle ABC < 180^\circ$,$\angle ADC < 180^\circ$,$\angle A = \angle BCD$.

因为$AD < AB$,所以$\angle 1 > \angle 3$,即$180^\circ - \angle 2 > \angle 3$,得

$$\angle ABC = \angle 2 + \angle 3 < 180^\circ$$

因为$\angle 2 > 90^\circ$,所以$\angle 2 > \angle 4$,即$180^\circ - \angle 1 > \angle 4$,得

$$\angle ADC = \angle 1 + \angle 4 < 180^\circ$$

由正弦定理,得

$$\frac{DB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin \angle 1} = \frac{DC}{\sin \angle 2} = \frac{DB}{\sin \angle BCD}$$

所以

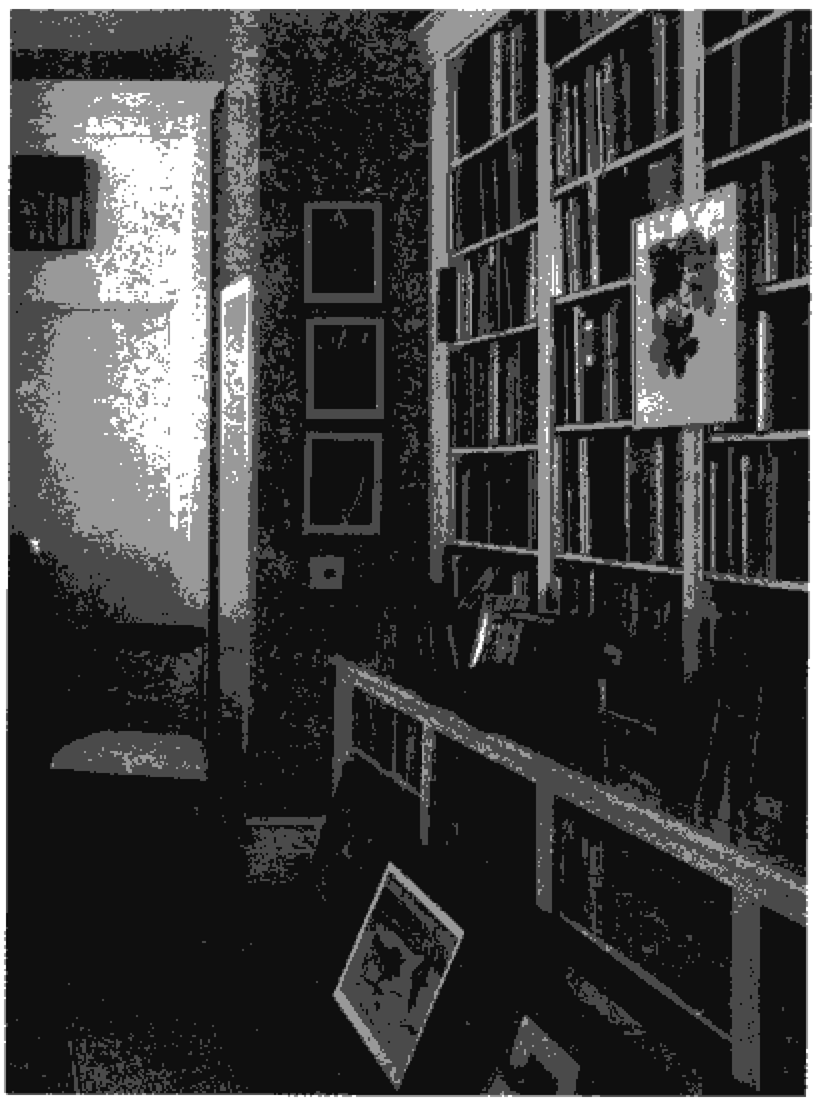
$$\sin A = \sin \angle BCD$$

又$\angle A$,$\angle BCD$均是锐角,所以$\angle A = \angle BCD$.

参考文献

[1] 刘军,王永庆.浅谈一道反例的构造[J].中学数学月刊,1997(2):10-11.

平面向量



一道课本复习参考题的推广

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2004年人民教育出版社)复习参考题七B组的第2题为:

已知四边形一组对边的平方和等于另一组对边的平方和,求证它的对角线互相垂直.

因为这是"直线和圆的方程"(属平面解析几何)中的一道题,所以题中的"四边形"指"平面四边形",建立平面直角坐标系后,用两点间距离公式可以给出证明.

但以下推广是有意义的:

推广 四边形(指平面四边形或空间四边形)的对角线互相垂直的充要条件是这个四边形的两组对边的平方和相等.

这里用向量给出简洁的证明:在四边形 $ABCD$ 中

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{CD}^2\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})=0\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot 2\overrightarrow{DB}=0\Leftrightarrow AC\perp BD$$

四面体的对棱所成角的向量求法

定理 在四面体 $ABCD$ 中

$$\cos < \overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD} > = \frac{|(BC^2 + DA^2) - (CA^2 + BD^2)|}{2AB \cdot CD}$$

证明

$$DA^2 = \overrightarrow{DA}^2 = (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 =$$
$$DB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} =$$
$$DB^2 - BC^2 + CA^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) + 2\overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) =$$
$$DB^2 - BC^2 + CA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}$$

所以
$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (BC^2 + DA^2) - (CA^2 + BD^2)$$

从而可得定理成立.

推论 在四面体中,若有两组对棱的平方和相等,则第三组对棱互相垂直.

注 (1) 定理给出了求异面直线所成角的一种有效方法.在四面体中,若知道六条棱的长,就可以求出每组对棱所成的角.

(2) 对于平面四边形,也有定理及其推论的类似结论成立.

不　等　式



用以直代曲法证一个不等式

文献[1] 的以直代曲法正在被越来越多的文献[2]~[5] 引用,本文将用此法证明文献[6] 的定理,再把它推广.

定理 1[6] 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^+$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = s, k \leqslant 0$, 则当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{s}{n}$ 时, $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{s-a_i}$ 取得最小值.

证明 $n = 1$ 时显然成立,下证 $n \geqslant 2$ 时成立.

设 $f(x) = \frac{x^k}{s-x}(0 < x < s)$, 可求得曲线 $f(x)$ 在 $x = \frac{s}{n}$ 处的切线方程为

$$y = (\frac{s}{n})^{k-2} \cdot \frac{kn+1-k}{(n-1)^2}(x-\frac{s}{n}) + \frac{1}{n-1}(\frac{s}{n})^{k-1}$$

若能证得

$$\frac{x^k}{s-x} \geqslant (\frac{s}{n})^{k-2} \cdot \frac{kn+1-k}{(n-1)^2}(x-\frac{s}{n}) + \frac{1}{n-1}(\frac{s}{n})^{k-1}(0 < x < s)(\text{当且仅当 } x = \frac{s}{n} \text{ 时取等号}) \quad ①$$

在 ① 中令 $x = a_1,a_2,\cdots,a_n$ 后相加,便得定理 1 成立.

① 即

$$(\frac{n}{s}x)^k + \frac{kn+1-k}{(n-1)^2}(\frac{n}{s}x)^2 - \frac{kn^2+2-k}{(n-1)^2}(\frac{n}{s}x) \geqslant \frac{(1-k)n^2+(k-2)n}{(n-1)^2}(0 < x < s)(\text{当且仅当 } x = \frac{s}{n} \text{ 时取等号}) \quad ②$$

设 $t = \frac{n}{s}x$, 得 ② 即

$$t^k + \frac{kn+1-k}{(n-1)^2}t^2 - \frac{kn^2+2-k}{(n-1)^2}t \geqslant \frac{(1-k)n^2+(k-2)n}{(n-1)^2}(0 < t < n)(\text{当且仅当 } t = 1 \text{ 时取等号}) \quad ③$$

又设 $g(t) = t^k + \frac{kn+1-k}{(n-1)^2}t^2 - \frac{kn^2+2-k}{(n-1)^2}t \geqslant \frac{(1-k)n^2+(k-2)n}{(n-1)^2}$ $(0 < t < n)$, 得

$$g'(t) = kt^{t-1} + \frac{2kn+2-k}{(n-1)^2}t - \frac{kn^2+2-k}{(n-1)^2}$$

由 $k\leqslant 0$,得:

当 $0<t<1$ 时,$kt^{k-1}\leqslant k$, $\frac{2kn+2-2k}{(n-1)^2}t<\frac{2kn+2-2k}{(n-1)^2}$, 所以 $g'(t)<g'(1)=0$;

当 $1<t<n$ 时,得 $g'(t)>g'(1)=0$.

所以当且仅当 $t=1$ 时 $g(t)$ 取得最小值,即 ③ 成立.证毕.

定理 2 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=s$, $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 1$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{s}{n}$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{s-a_i}$ 取得最小值.

证明 由定理 1 知,只需证明 $k\geqslant 1$ 时成立.

$n=1$ 时显然成立,只需再证 $n\geqslant 2$ 时成立.

此时$\frac{a_i}{s}\in(0,1)(i=1,2,\cdots,n)$,所以

$$\frac{a_i^k}{s-a_i}=\frac{\frac{a_i^k}{s}}{1-\frac{a_i}{s}}=\frac{a_i^k}{s}+\frac{a_i^{k+1}}{s^2}+\cdots+\frac{a_i^{k+m-1}}{s^m}+\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{s-a_i}=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}a_i^k+\frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+1}+\cdots+\frac{1}{s^m}\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+m-1}+\cdots$$

令 $f(x)=x^{k+m-1}(k\geqslant 1,m\geqslant 1)$,得 $f''(x)=(k+m-1)(k+m-2)x^{k+m-3}\geqslant 0$(当且仅当 $k=m=1$ 时取等号).

当 $k=m=1$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{k+m-1}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=s=n(\frac{s}{n})^{k+m-1}$;

其他情形,$f(x)$ 是下凸函数,由 Jensen 不等式[7],得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+m-1}\geqslant n\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^{k+m-1}=n(\frac{s}{n})^{k+m-1}$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{s-a_i}\geqslant\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{s^{k-1}}{n^{k+m-2}}$(取等号的条件同上) $=\frac{(\frac{s}{n})^{k-1}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{s^{k-1}}{n^{k-2}(n-1)}$.

笔者尚不能证得文献[5]末的猜想成立,读者用本文定理 1,2 的证法均可证得其伴随结论成立:

猜想 1[5] 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$, $0<r<1$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^r}{1-x_i^r}\geqslant\frac{n}{n^r-1}(n\geqslant 3)$.(笔者

认为应还有条件 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$,否则 x_i^r 可以表示负数的无理数次幂而无意义).

它等价于:

猜想 2　若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1,0<r<1$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1-x_i^r}\geqslant\dfrac{n^{r+1}}{n^r-1}(n\geqslant 3)$.

其伴随结论是:

定理 3　若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1,r\geqslant 1$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1-x_i^r}\geqslant\dfrac{n^{r+1}}{n^r-1}$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ 时取等号).

参考文献

[1] 丁兴春.以直代曲法证明不等式[J].数学通讯,2007(5):17-19.

[2] 刘宜兵.一个不等式的初等证明[J].中学数学,2006(10):34.

[3] 田彦武.一个不等式的推广及猜想.[J] 中学数学,2007(2):11.

[4] 陈宝安,安振平.一个四元分式不等式[J],中学数学,2007(7):41.

[5] 汪飞,陈传喜.初等证明不初等[J].数学通讯,2007(8):23.

[6] 黄兆麟.一个不等式的另一简证[J].数学通讯,2007(13):38.

[7] 徐利治,王兴华.数学分析的方法及例题选讲[M].修订本.北京:高等教育出版社,1983:146.

从加权平均值不等式到另几个重要不等式

加权平均值不等式 若 $a_i \geqslant 0, \alpha_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$，则 $\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i} \geqslant \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$(当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时取等号).

证明 此结论可见文献[1]的第43题，也可由一般的Jensen不等式(即文献[2]的定理3)证得.

Jensen不等式 若 $f(x)$ 为区间 Ⅰ 上的上(下)凸函数，则对于任意的 $x_1, x_2,\cdots,x_n \in$ Ⅰ 及任意的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \in \mathbf{R}^+$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$，必有 $f(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) \geqslant (\leqslant)\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$，当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号.

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有0时，加权平均值不等式显然成立.

下证 $a_1,a_2,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^+$ 时，加权平均值不等式成立.

因为 $f(x) = \ln x$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的上凸函数，所以在Jensen不等式中令 $x_i = a_i$，$\lambda_i = \dfrac{\alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}(i = 1,2,\cdots,n)$，$f(x) = \ln x$，Ⅰ $= \mathbf{R}^+$，得

$$\ln \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln a_i^{\alpha_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}(\text{当且仅当 } a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ 时取等号})$$

从而可得加权平均值不等式成立.

(在加权平均值不等式中令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$，便得通常的平均值不等式)

例1 证明 Hölder(1859 ~ 1937，德国数学家)不等式[1]：设 $a_{ij},\alpha_i \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,k; n \geqslant 2, k \geqslant 2)$，$\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j = 1$，则

$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{\alpha_1} a_{i2}^{\alpha_2} \cdots a_{ik}^{\alpha_k} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\right)^{\alpha_1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)^{\alpha_k}$（当且仅当 $\frac{a_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}} = \frac{a_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}} = \cdots = \frac{a_{ik}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号）.

证明

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{\alpha_1} a_{i2}^{\alpha_2} \cdots a_{ik}^{\alpha_k}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\right)^{\alpha_1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)^{\alpha_k}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{a_{ik}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}}\right)^{\alpha_k} \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{\alpha_1 a_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}} + \frac{\alpha_2 a_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}} + \cdots + \frac{\alpha_k a_{ik}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k} \text{（用加权平均值不等式）} =$$

$$\frac{\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}} + \frac{\alpha_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}} + \cdots + \frac{\alpha_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}} \text{（因为} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1\text{）} = 1$$

其中等号当且仅当 $\frac{a_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}} = \frac{a_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}} = \cdots = \frac{a_{ik}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时取到.

证毕.

例 2[1] 设 k, l 为二共轭实数（即满足 $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$ 的实数 k, l），$n \in \mathbf{N}$，$n \geqslant 2$，证明：

(1) 当 $k > 1$ 时，$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^l\right)^{\frac{1}{l}}$（当且仅当 $a_i^k = \lambda b_i^l$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号）；

(2) 当 $k < 1$ 时，$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^l\right)^{\frac{1}{l}}$（当且仅当 $a_i^k = \lambda b_i^l$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号）.

证明 (1) 在例 1 中令 $k = 2, a_{i1} = a_i^k, a_{i2} = b_i^k, \alpha_1 = \frac{1}{k}, \alpha_2 = \frac{1}{l}$，得 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^l\right)^{\frac{1}{l}}$（当且仅当 $\frac{a_i^k}{\sum_{i=1}^{n} a_i^k} = \frac{b_i^l}{\sum_{i=1}^{n} b_i^l}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号）.

即结论(1)成立.

(2) 易知 k,l 中至少有一个为正,不妨设 $k>0$.

在例 1 中令 $k=2,a_{i1}=a_ib_i,a_{i2}=b_i^l,\alpha_1=k,\alpha_2=1-k$.

因为 $(a_ib_i)^k(b_i^l)^{1-k}=a_i^kb_i^kb_i^{\frac{k}{k-1}\cdot(1-k)}=a_i^k$,所以 $\sum\limits_{i=1}^n a_i^k=\sum\limits_{i=1}^n(a_ib_i)^k(b_i^l)^{1-k}\leqslant$ $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)^k\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^l\right)^{1-k}$(当且仅当 $\dfrac{a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}=\dfrac{b_i^l}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^l}(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号).

再由 $\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{l}=1$,可证得结论(2)成立:

易知 $\sum\limits_{i=1}^n a_i^k\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)^k\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^l\right)^{1-k}\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^l\right)^{\frac{1}{l}}$

再证 $\dfrac{a_ib_i}{b_i^l}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^l}(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow a_i^k=\lambda b_i^l(i=1,2,\cdots,n)$

$\Rightarrow$ 可设 $\dfrac{a_ib_i}{b_i^l}=\mu(i=1,2,\cdots,n)$,$\mu$ 为常数,得

$$a_i^{\frac{1}{l}}=\mu^{\frac{1}{l}}b_i^{1-\frac{1}{l}}$$

又 $\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{l}=1$,得

$a_i^{\frac{1}{l}}=\mu^{\frac{1}{l}}b_i^{\frac{1}{k}},a_i^k=\mu^kb_i^l(i=1,2,\cdots,n)$,$\mu^k$ 为常数.

$\Leftarrow$ 设 $\lambda=\mu^k$,由以上证明,可得 $\dfrac{a_ib_i}{b_i^l}=\mu(i=1,2,\cdots,n)$,$\mu$ 为常数.再由等比性质,即得

$$\frac{a_ib_i}{b_i^l}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^l}(i=1,2,\cdots,n)$$

例 3 设 $A_i,x_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant2)$,证明:

(1) 当 $-1<\alpha<0$ 时,$\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{A_i^{\alpha+1}}{x_i^\alpha}\leqslant\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^n A_i\right)^{\alpha+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^\alpha}$(当且仅当 $\dfrac{A_1}{x_1}=\dfrac{A_2}{x_2}=\cdots=\dfrac{A_n}{x_n}$ 时取等号);

(2) 当 $\alpha<-1$ 或 $\alpha>0$ 时, $\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i^{\alpha+1}}{x_i^{\alpha}}\geqslant\frac{(\sum_{i=1}^{n}A_i)^{\alpha+1}}{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{\alpha}}$(当且仅当$\frac{A_1}{x_1}=\frac{A_2}{x_2}=\cdots=\frac{A_n}{x_n}$时取等号).

证明 在例2中令 $a_i=A_i^{\alpha+1},b_i=x_i^{-\alpha},k=\frac{1}{\alpha+1}$(由$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=1$得 $l=-\frac{1}{\alpha}$)可证.

文献[3]用初等方法证明了以下不等式:

若 $a,b,x,y\in\mathbf{R}^+$,则$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}\geqslant\frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}$(当且仅当$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$时取等号);

若 $a_i,x_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant2)$,则$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{x_i^2}\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^3}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$(当且仅当$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_n}{x_n}$时取等号).

这两个结论均是例3(2)中 $\alpha=2$ 的情形.

例4 证明:设 $a_{ij}\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,k;n\geqslant2,k\geqslant2)$,则 $(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik})^k\leqslant(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^k)(\sum_{i=1}^{n}a_{i2}^k)\cdots(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^k)$(当且仅当$\frac{a_{i1}^k}{\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^k}=\cdots=\frac{a_{ik}^k}{\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^k}$ $(i=1,2,\cdots,n)$时取等号).

证明 在例1中令 $\alpha_i=\frac{1}{k},a_{ij}=b_{ij}^k(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,k)$可证.

再在例4中令 $k=2$,即可证得柯西不等式.

例5 证明:设 $0<x<\left(\frac{l}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$,则函数 $y=ax^r(l-nx^s)^p(a,r,l,n,s,p\in\mathbf{R}^+)$ 当且仅当 $x=\left(\frac{rl}{nr+nsp}\right)^{\frac{1}{s}}$ 时取得最大值,且最大值是 $a\left(\frac{lsp}{r+sp}\right)^p\left(\frac{rl}{nr+nsp}\right)^{\frac{r}{s}}$.

证明 可将函数 $y=ax^r(l-nx^s)^p$ 变形为

$$\frac{1}{n}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{p}}=(x^s)^{\frac{r}{sp}}\left(\frac{r}{n}-x^s\right)$$

设$\frac{1}{n}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{p}}=y_1, x^s=x_1, \frac{1}{n}=l_1$,得

$$y_1=x_1^{\frac{r}{sp}}(l_1-x_1)(0<x_1<l_1, l_1>0)$$

由加权平均值不等式,得

$$y_1^{sp}=x_1^r(l_1-x_1)^{sp}=\left(\frac{r}{sp}\right)^r\left(\frac{sp}{r}x_1\right)^r(l_1-x_1)^{sp}\leqslant$$

$$\left(\frac{r}{sp}\right)^r\left[\frac{r\cdot\frac{sp}{r}x_1+sp(l_1-x_1)}{r+sp}\right]^{r+sp}=\left(\frac{r}{sp}\right)^r\left(\frac{spl_1}{r+sp}\right)^{r+sp}$$

(当且仅当$\frac{sp}{r}x_1=l_1-x_1$即$x_1=\frac{rl_1}{r+sp}$时"$\leqslant$"中取等号)

所以$y_1\leqslant\left(\frac{r}{sp}\right)^r\left(\frac{lsp}{nr+nsp}\right)^{1+\frac{r}{sp}}=\frac{lsp}{nr+nsp}\left(\frac{rl}{nr+nsp}\right)^{\frac{r}{sp}}$(当且仅当$x_1=\frac{rl}{nr+nsp}$时取等号).

又$y=a(ny_1)^p, x=x_1^{\frac{1}{s}}$,可得要证结论成立.

在例5中令$r=km; s=m; k, l, m, n, p\in\mathbf{N}^*$,立得文献[4]的命题1;在例5中令$r=m; s=mk; k, l, m, n, p\in\mathbf{N}^*$,立得文献[4]的命题2.

注 将例5中的"$a>0$"改为"$a<0$",同时将"最大值"改为"最小值",所得结论也成立.

参考文献

[1] 徐利治,王兴华.数学分析的方法及例题选讲[M].修订本.北京:高等教育出版社,1983:131-135.

[2] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993:85.

[3] 谭志中,单墫.一道物理问题的数学建模探究[J].数学通讯,2002(7):31-32.

[4] 王富英.一道最值习题的推广及应用[J].数学通讯,2001(15)11-12.

也谈一类条件最值问题

1 一类条件最值问题

我的好友黎发兵用平均值不等式证得如下命题:

命题[1] 已知 $x_i, a_i \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = k$，$m$ 是有理数,则:

(1) 当 $m > 1$ 或 $m < 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^m \geqslant k^m\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{1-m}}\right)^{1-m}$;

(2) 当 $0 < m < 1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^m \leqslant k^m\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{1-m}}\right)^{1-m}$.

注释① 及文献[2] 研究了"在条件 $x + y = 1$ 下 $\frac{1}{x^n} + \frac{\lambda}{y^n}$ $(\lambda, x, y, n \in \mathbf{R}^+)$ 的最小值".

郭要红副教授在文献[3] 中也研究了这类最值问题,得到如下定理:

"**定理** 设 x_i 为正常数，$a_i > 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} = 1$,则:

(1) 当 $m < -1$ 或 $m > 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^m \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^{\frac{1}{m+1}}\right)^{m+1}$;

(2) 当 $-1 < m < 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^m \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^{\frac{1}{m+1}}\right)^{m+1}$."(即文献[3] 的定理 4,5)

应当指明的是文献[3] 的定理 4,5(即上述定理) 有误:应将以上定理中的"$\left(x_i^{\frac{1}{m+1}}\right)$"改为"$\left(x_i^{\frac{m}{m+1}}\right)$".其证明可见下文.实际上文献[3] 的定理 4,5 分别是文献[3] 定理 2,3 的推广,但在定理 4,5 中分别令 $n = 2$ 并不能得到定理 2,3.文献[3] 末说"显然,定理 4 是注释 ①(即本文的文献[2]) 定理 2 的拓展",但愿文献[2] 的定理 2 无误.

文献[1] ~ [3] 及注释 ① 研究的是同一类条件的最值问题(的特例),并且这类问题有完整的答案:

定理 1 把命题中的"m 是有理数"改为"m 是实数",所得结论也成立,并

① 孙大志.条件"$x + y = 1$"下 $\frac{1}{x^n} + \frac{\lambda}{y^n}$ 的最小值.中学数学,2002(9).

且两个不等式中的等号均当且仅当 $x_1 : x_2 : \cdots : x_n = a_1^{\frac{1}{1-m}} : a_2^{\frac{1}{1-m}} : \cdots : a_n^{\frac{1}{1-m}}$ 时取到.

在这个定理中令 $m = -m', k = 1, x_i = \frac{x'_i}{a'_i}, a_i = x'^{m'}_i$ 即可得文献[3]中定理4,5应修正的结论.

2 定理1的证明

2.1 加权平均值不等式

加权平均值不等式 若 $a_i \geqslant 0, \alpha_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$,则 $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$(当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时取等号).

证明 此结论可见文献[4]的第43题,也可由一般的Jensen不等式(即文献[5]的定理3)证得.

Jensen不等式 若 $f(x)$ 为区间 Ⅰ 上的上(下)凸函数,则对于任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in$ Ⅰ 及任意的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}^+$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, 必有 $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \geqslant (\leqslant) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$,当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号.

当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有0时,加权平均值不等式显然成立.

下证 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+$ 时,加权平均值不等式成立.

因为 $f(x) = \ln x$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的上凸函数,所以在Jensen不等式中令 $x_i = a_i$, $\lambda_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} (i = 1,2,\cdots,n), f(x) = \ln x$, Ⅰ $= \mathbf{R}^+$,得

$$\ln \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln a_i^{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \text{(当且仅当 } a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ 时取等号)}$$

从而可得加权平均值不等式成立.

(在加权平均值不等式中令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$,便得通常的平均值不等式)

2.2 定理1的证明

(1) 当 $m > 1$ 时,对于任意的正数 λ,有 $a_i x_i^m + (m-1)\lambda a_i^{\frac{1}{1-m}} \geqslant$

$m[a_ix_i^m\cdot(\lambda a_i^{\frac{1}{1-m}})^{m-1}]^{\frac{1}{m}}=m\lambda^{\frac{m-1}{m}}x_i(i=1,2,\cdots,n)$（当且仅当 $a_ix_i^m=\lambda a_i^{\frac{1}{1-m}}$ 时"$\geqslant$"中取等号），所以

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i^m\geqslant m\lambda^{\frac{m-1}{m}}k-(m-1)\lambda\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{1-m}}\text{（当且仅当}\frac{x_1}{a_1^{\frac{1}{1-m}}}=\frac{x_2}{a_2^{\frac{1}{1-m}}}=\cdots=\frac{x_n}{a_n^{\frac{1}{1-m}}}=\lambda^{\frac{1}{m}}\text{时“}\geqslant\text{”中取等号）}\qquad①$$

在①中令 $\lambda=k^m\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{1-m}}\right)^{-m}$，便得此时定理1成立.

当 $m<0$ 时，对于任意的正数 λ，有 $a_ix_i^m-m\lambda x_i\geqslant(1-m)[a_ix_i^m\cdot(\lambda x_i)^{-m}]^{\frac{1}{1-m}}=(1-m)a_i^{\frac{1}{1-m}}\lambda^{\frac{m}{m-1}}(i=1,2,\cdots,n)$（当且仅当 $a_ix_i^m=\lambda x_i$ 时"$\geqslant$"中取等号），所以

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i^m\geqslant m\lambda k+(1-m)\lambda^{\frac{m}{m-1}}\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{1-m}}\text{（当且仅当}\frac{x_1}{a_1^{\frac{1}{1-m}}}=\frac{x_2}{a_2^{\frac{1}{1-m}}}=\cdots=\frac{x_n}{a_n^{\frac{1}{1-m}}}=\lambda^{\frac{1}{m-1}}\text{时取等号）}\qquad②$$

在②中令 $\lambda=k^{m-1}\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{1-m}}\right)^{1-m}$，便得此时定理1成立.

（2）当 $0<m<1$ 时，对于任意的正数 λ，有 $mx_i+(1-m)\lambda a_i^{\frac{1}{1-m}}\geqslant x_i^m(\lambda a_i^{\frac{1}{1-m}})^{1-m}=\lambda^{1-m}a_ix_i^m(i=1,2,\cdots,n)$（当且仅当 $x_i=\lambda a_i^{\frac{1}{1-m}}$ 时取等号），所以

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i^m\leqslant m\lambda^{m-1}k+(1-m)\lambda^m\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{1-m}}\text{（当且仅当}\frac{x_1}{a_1^{\frac{1}{1-m}}}=\frac{x_2}{a_2^{\frac{1}{1-m}}}=\cdots=\frac{x_n}{a_n^{\frac{1}{1-m}}}=\lambda\text{时取等号）}\qquad③$$

在③中令 $\lambda=k\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{1-m}}\right)^{-1}$，便得此时定理1成立.

综上所述，定理1成立.

实际上，在定理1的证明中还证得了如下更强的结论：

定理2　若 $\lambda,x_i,a_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^n x_i=k$，则：

（1）当 $m>1$ 时，不等式①成立；

(2) 当 $m<0$ 时,不等式 ② 成立;

(3) 当 $0<m<1$ 时,不等式 ③ 成立.

3 另外的结论

由定理 1,2,可猜测以下结论成立.

定理 3 若 $\lambda,a,k\in\mathbf{R}^+$,则:

(1) 当 $m>1$ 时,$mk\lambda^{\frac{m-1}{m}}+(1-m)a\lambda\leqslant k^m a^{1-m}$(当且仅当 $\lambda=\left(\frac{k}{a}\right)^m$ 时取等号);

(2) 当 $m<0$ 时,$mk\lambda+(1-m)a\lambda^{\frac{m}{m-1}}\leqslant k^m a^{1-m}$(当且仅当 $\lambda=\left(\frac{k}{a}\right)^{m-1}$ 时取等号);

(3) 当 $0<m<1$ 时,$mk\lambda^{m-1}+(1-m)a\lambda^m\geqslant k^m a^{1-m}$(当且仅当 $\lambda=\frac{k}{a}$ 时取等号).

证明 仍用加权平均值不等式来证.

(1)$(m-1)a\lambda+k^m a^{1-m}\geqslant m[(a\lambda)^{m-1}\cdot k^m a^{1-m}]^{\frac{1}{m}}=mk\lambda^{\frac{m-1}{m}}$(当且仅当 $a\lambda=k^m a^{1-m}$ 即 $\lambda=\left(\frac{k}{a}\right)^m$ 时"$\geqslant$"取等号).

(2) $-mk\lambda+k^m a^{1-m}\geqslant(1-m)[(k\lambda)^{-m}\cdot k^m a^{1-m}]^{\frac{1}{1-m}}=(1-m)a\lambda^{\frac{m}{m-1}}$(当且仅当 $k\lambda=k^m a^{1-m}$ 即 $\lambda=\left(\frac{k}{a}\right)^{m-1}$ 时"$\geqslant$"取等号).

(3)$mk\lambda^{m-1}+(1-m)a\lambda^m=\frac{m}{1-m}\cdot k(1-m)\lambda^{m-1}+(1-m)a\lambda^m\geqslant\left(\frac{m}{1-m}+1\right)\{[k(1-m)\lambda^{m-1}]^{\frac{m}{1-m}}\cdot(1-m)a\lambda^m\}^{1-m}=k^m a^{1-m}$(当且仅当 $k(1-m)\lambda^{m-1}=(1-m)a\lambda^m$ 即 $\lambda=\frac{k}{a}$ 时"$\geqslant$"取等号).

请读者思考:能否由定理 1,2 立得定理 3 成立?

4 再推广

在前面的定理 1,2 中,令 $x_i=x_i'^{\alpha}$,$m=\frac{m'}{\alpha}$,则 $1-m=\frac{\alpha-m'}{\alpha}$,$\frac{1}{1-m}=\frac{\alpha}{\alpha-m'}$.

定理 1' 若 $x_i,a_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}=k$,则:

(1) 当 $\frac{m}{\alpha}>1$ 或 $\frac{m}{\alpha}<0$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i x_i^m\geqslant k^{\frac{m}{\alpha}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\frac{\alpha}{\alpha-m}}\right)^{\frac{\alpha-m}{\alpha}}$(当且仅当 x_1 :

$x_2:\cdots:x_n = a_1^{\frac{1}{\alpha-m}}:a_2^{\frac{1}{\alpha-m}}:\cdots:a_n^{\frac{1}{\alpha-m}}$ 时取等号)；

(2) 当 $0<\frac{m}{\alpha}<1$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^m \leqslant k^{\frac{m}{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{\alpha}{\alpha-m}}\right)^{\frac{\alpha-m}{\alpha}}$（当且仅当 $x_1:x_2:\cdots:x_n = a_1^{\frac{1}{\alpha-m}}:a_2^{\frac{1}{\alpha-m}}:\cdots:a_n^{\frac{1}{\alpha-m}}$ 时取等号).

定理 2′ 若 $\lambda, x_i, a_i \in \mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}=k$，则：

(1) 当 $\frac{m}{\alpha}>1$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^m \geqslant \frac{m}{\alpha}\lambda^{\frac{m-\alpha}{m}}k+\frac{\alpha-m}{\alpha}\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{\alpha}{\alpha-m}}$（当且仅当 $\frac{x_1}{a_1^{\frac{1}{\alpha-m}}}:\frac{x_2}{a_2^{\frac{1}{\alpha-m}}}:\cdots:\frac{x_n}{a_n^{\frac{1}{\alpha-m}}}=\lambda^{\frac{1}{m}}$ 时取等号)；

(2) 当 $\frac{m}{\alpha}<0$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^m \geqslant \frac{m}{\alpha}\lambda k+\frac{\alpha-m}{\alpha}\lambda^{\frac{m}{m-\alpha}}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{\alpha}{\alpha-m}}$（当且仅当 $\frac{x_1}{a_1^{\frac{1}{\alpha-m}}}:\frac{x_2}{a_2^{\frac{1}{\alpha-m}}}:\cdots:\frac{x_n}{a_n^{\frac{1}{\alpha-m}}}=\lambda^{\frac{1}{m-\alpha}}$ 时取等号)；

(3) 当 $0<\frac{m}{\alpha}<1$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^m \leqslant \frac{m}{\alpha}\lambda^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}k+\frac{\alpha-m}{\alpha}\lambda^{\frac{m}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{\alpha}{\alpha-m}}$（当且仅当 $\frac{x_1}{a_1^{\frac{1}{\alpha-m}}}:\frac{x_2}{a_2^{\frac{1}{\alpha-m}}}:\cdots:\frac{x_n}{a_n^{\frac{1}{\alpha-m}}}=\lambda^{\frac{1}{\alpha}}$ 时取等号).

参考文献

[1] 黎发兵.一类条件不等式的“根”[J].数学通讯,2002(15):36-37

[2] 张黎庆.对“条件 $x+y=1$ 下 $\frac{1}{x^n}+\frac{\lambda}{y^n}$ $(n\geqslant 2)$ 的最小值”再探究[J].中学数学,2003(2):43-44.

[3] 郭要红.一类条件最值问题的再研讨[J].数学通讯,2003(19):29-30.

[4] 徐利治,王兴华.数学分析的方法及例题选讲[M].修订本.北京:高等教育出版社,1983:133-134.

[5] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993:85.

一个不等式命题的推广

可把文献[1]的命题2推广为:

定理 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+\ (n\geqslant 2),\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m=n(m\geqslant 1,m\in\mathbf{R}),k\in\mathbf{N}^*$,且 $k\leqslant n,k\leqslant m$,则 $\sum\limits_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ \text{互不相等}}}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\leqslant C_n^k$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时取等号).

为证明定理,先介绍:

加权平均值不等式[2] 若 $a_i,\alpha_i\in\mathbf{R}^+\ (i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$,则 $\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_na_n\geqslant(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)(a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

定理的证明 由加权平均值不等式,得

$a_{i_1}^m+a_{i_2}^m+\cdots+a_{i_k}^m+(m-k)\cdot 1\geqslant m(a_{i_1}^m a_{i_2}^m\cdots a_{i_k}^m)^{\frac{1}{m}}$($k=m$ 时显然成立),

$a_{i_1}^m+a_{i_2}^m+\cdots+a_{i_k}^m+(m-k)\geqslant ma_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$(当且仅当 $a_{i_1}=a_{i_2}=\cdots=a_{i_k}$ 时取等号).

$\sum\limits_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ \text{互不相等}}}(a_{i_1}^m+a_{i_2}^m+\cdots+a_{i_k}^m)+(m-k)C_n^k\geqslant m\sum\limits_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ \text{互不相等}}}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

此式的左边即 $\frac{kC_n^k}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m+(m-k)C_n^k=kC_n^k+(m-k)C_n^k=mC_n^k$,

$\sum\limits_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ \text{互不相等}}}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\leqslant C_n^k$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号,即 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时取等号).

在定理中令 $a_i=(\frac{n}{a})^{\frac{1}{m}}a'_i(i=1,2,\cdots,n)$,得:

推论 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+\ (n\geqslant 2),\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m=a(m\geqslant 1,m\in\mathbf{R}),k\in\mathbf{N}^*$,且 $k\leqslant n,k\leqslant m$,则 $\sum\limits_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ \text{互不相等}}}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\leqslant C_n^k(\frac{a}{n})^{\frac{k}{m}}$(当且仅当 $a_1=$

$a_2 = \cdots = a_n = (\frac{a}{n})^{\frac{1}{m}}$ 时取等号).

文献[3] 末提出了四个猜想,文献[1] 的命题 1 及文献[4] 的定理 1 均证得了猜想 1 成立. 由本文的定理知猜想 2,3,4 在 $a,b,c,a_1,a_2,\cdots,a_n \in \mathbf{R}^+$ 且 $m \geqslant n$ 时均成立,从而还可得猜想 4 在 m 是不小于 n 的偶数时成立.

参考文献

[1] 钱照平. 一个不等式的拓广[J]. 数学通讯,2004(23):24.
[2] 徐利治,王兴华. 数学分析的方法及例题选讲[M]. 修订本. 北京:高等教育出版社,1983:134.
[3] 崔应宏. 对一道不等式习题的再思考[J]. 数学通报,2004(3):23-24.
[4] 甘志国. 用导数研究一个猜想[J]. 数学通讯,2004(17):39-40.

对几个猜想的探究

文献[1]提出了四个猜想：

猜想1　若 $a^n+b^n=2, a,b\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$，则 $a+b\leqslant 2, ab\leqslant 1$.

猜想2　若 $a^3+b^3+c^3=3, a,b,c\in\mathbf{R}$，则 $a+b+c\leqslant 3, ab+bc+ca\leqslant 3, abc\leqslant 1$.

猜想3　若 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3=n, a_i\in\mathbf{R}, i\in\mathbf{N}^*$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant \mathrm{C}_n^1, \sum\limits_{i\neq j}a_ia_j\leqslant \mathrm{C}_n^2,\cdots, \sum\limits_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ \text{互不相等}}}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\leqslant \mathrm{C}_n^k,\cdots, a_1a_2\cdots a_n\leqslant \mathrm{C}_n^n$.

猜想4　若条件改为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m=n, a_i\in\mathbf{R}, i\in\mathbf{N}^*, m\in\mathbf{N}$ 且 $m\geqslant 2$，猜想3中的结论还成立吗？

文献[2]用导数证明了猜想1正确，并作了深入研究. 文献[3]证明了猜想2中第二个不等式正确，并举出了第一个不等式的反例，还指出了文献[4]在证明猜想2的前两个不等式均成立时的错误. 事实上，对于猜想2还可得到：

定理1　若 $a^3+b^3+c^3=3(a,b,c\in\mathbf{R})$，则 $a+b+c, abc$ 的取值范围均是 $\mathbf{R}$；$ab+bc+ca$ 的取值范围是 $(-\infty,3]$，且当且仅当 $a=b=c=1$ 时 $ab+bc+ca=3$.

证明　当 $b=c$ 时，得 $a^3+2b^3=3, a=\sqrt[3]{3-2b^3}(b\in\mathbf{R})$.

所以，当 $b=c$ 时，$a+b+c=a+2b=2b+\sqrt[3]{3-2b^3}\to 2b+\sqrt[3]{-2b^3}$（当 $b\to\infty$ 时）$=(2-\sqrt[3]{2})b$.

所以，当 $b\to-\infty$ 时，$2b+\sqrt[3]{3-2b^3}\to-\infty$；当 $b\to+\infty$ 时，$2b+\sqrt[3]{3-2b^3}\to+\infty$.

又函数 $f(b)=2b+\sqrt[3]{3-2b^3}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，所以其值域是 $\mathbf{R}$.

即当 $b=c$ 时，$a+b+c$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$，所以题设中 $a+b+c$ 的取值范围也是 $\mathbf{R}$.

当 $b=c$ 时，$abc=ab^2=b^2\cdot\sqrt[3]{3-2b^3}\to b^2\cdot\sqrt[3]{-2b^3}$（当 $b\to\infty$ 时）$=-\sqrt[3]{2}b^3$.

可得，当 $b=c$ 时，abc 的取值范围是 $\mathbf{R}$，所以题设中 abc 的取值范围也是 $\mathbf{R}$.

当 $b=c$ 时，$ab+bc+ca=2ab+b^2=b^2+2b\sqrt[3]{3-2b^3}\to b^2+2b\cdot\sqrt[3]{-2b^3}$（当 $b\to\infty$ 时）$=-(2\sqrt[3]{2}-1)b^2\to-\infty$（当 $b\to\infty$ 时）.

（后文还将证得，当 $a\to\infty$，或 $b\to\infty$，或 $c\to\infty$ 时，均有 $ab+bc+ca\to-\infty$.）

鉴于文献[3]中证明“$ab+bc+ca\leqslant 3$”时分类讨论的次数较多，下面用 Laguerre 乘数法来求 $ab+bc+ca$ 的最大值.

先给出辅助函数 $f(a,b,c,\lambda)=ab+bc+ca+\lambda(a^3+b^3+c^3-3)$，得

$$\begin{cases}f'_a=b+c+3\lambda a^2=0 & ①\\ f'_b=a+c+3\lambda b^2=0 & ②\\ f'_c=b+a+3\lambda c^2=0 & ③\\ f'_\lambda=a^3+b^3+c^3-3=0 & ④\end{cases}$$

① - ② 可得

$$a=b\text{ 或 }3\lambda(a+b)=1 \qquad ⑤$$

同理得

$$\begin{cases}b=c\text{ 或 }3\lambda(b+c)=1 & ⑥\\ c=a\text{ 或 }3\lambda(c+a)=1 & ⑦\\ a^3+b^3+c^3=3 & ⑧\end{cases}$$

若 $a=b$，由 ① ~ ④ 得

$$\begin{cases}a+c+3\lambda a^2=0 & ⑨\\ 2a+3\lambda c^2=0 & ⑩\\ 2a^3+c^3=3 & ⑪\end{cases}$$

由 ⑩ 得 $3\lambda=-\dfrac{2a}{c^2}$（由 ⑩，⑪ 先证 $c\neq 0$），又将其代入 ⑨，得

$$2a^3-c^3=ac^2 \qquad ⑫$$

⑪ - ⑫ 得 $a=\dfrac{3-2c^3}{c^2}$，将其代入 ⑪，并设 $c^3=t$，得

$$2\cdot\frac{(3-2t)^3}{t^2}+t=3$$

$$5t^3-23t^2+36t-18=0$$

$$(t-1)(5t^2-18t+18)=0$$

$$t=1$$

$$c=1$$

再由 ⑪,得 $a=1$;又由 ⑧,得 $a=b=c=1$.同理得,当 $a=b$,或 $b=c$,或 $c=a$ 时,均有 $a=b=c=1$.

由 ⑤ ~ ⑧ 知,剩下的情形就是

$$\begin{cases}3\lambda(a+b)=3\lambda(b+c)=3\lambda(c+a)=1\\a^3+b^3+c^3=3\end{cases}$$

得
$$a+b=b+c=c+a$$
即
$$a=b=c$$
所以
$$a=b=c=1$$

总之,得唯一的稳定点$(a,b,c)=(1,1,1)$,此时 $ab+bc+ca=3$.

由 $a^3+b^3+c^3=3$,得 $c=\sqrt[3]{3-a^3-b^3}$.

当 $a\to\infty$ 时,$\dfrac{ab+bc+ca}{c}=\dfrac{ab}{c}+b+a=\dfrac{ab}{\sqrt[3]{3-a^3-b^3}}+b+a=\dfrac{b}{\sqrt[3]{\dfrac{3-b^3}{a^3}-1}}+b+a\to a$.

所以 $ab+bc+ca\to a\cdot\sqrt[3]{3-a^3-b^3}\to -a^2\to-\infty$.

同理得,当 $a\to\infty$,或 $b\to\infty$,或 $c\to\infty$ 时,均有 $ab+bc+ca\to-\infty$.

这就证得了定理 1 的第二个结论成立.

(笔者也曾想到用一元函数的导数来求出这个三元函数的条件最值(思想方法见文献[5]),但却遇到了解方程的麻烦).

推论 1 若 $a^3+b^3+c^3=3k^3$(k 是已知的非零实数,$a,b,c\in\mathbf{R}$),则$a+b+c$,abc 的取值范围均是$\mathbf{R}$;$ab+bc+ca$ 的取值范围是$(-\infty,3k^2]$,且当且仅当 $a=b=c=k$ 时 $ab+bc+ca=3k^2$.

证明 在定理 1 中令 $a=\dfrac{a'}{k}$,$b=\dfrac{b'}{k}$,$c=\dfrac{c'}{k}$ 可证.

定理 2 若$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m=n$($m$ 是不小于 3 的奇数,$n\geqslant3$,$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$),则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

证明 当 $a_2=a_3=\cdots=a_n$ 时,得

$$a_1^m+(n-1)a_2^m=n,a_1=\sqrt[m]{n-(n-1)a_2^m}$$

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+(n-1)a_2=(n-1)a_2+\sqrt[m]{n-(n-1)a_2^m}\to(n-1)a_2+\sqrt[m]{-(n-1)a_2^m}$(当 $a_2\to\infty$ 时)$=(n-1-\sqrt[m]{n-1})a_2$

从而可得,当 $a_2=a_3=\cdots=a_n$ 时,$\sum_{i=1}^{n}a_i$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$,所以可得定理 2 成立.

推论 2　若 $\sum_{i=1}^{n}a_i^m=nk^m$(k 是已知的非零实数,$n\geqslant 3,a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$),则 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

证明　在定理 2 中令 $a_i=\frac{a'_i}{k}(i=1,2,\cdots,n)$ 可证.

定理 3　若 $\sum_{i=1}^{n}a_i^m=n$(m,n 均是不小于 3 的奇数,$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$),则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

证明　当 $a_2=a_3=\cdots=a_n$ 时,得

$$a_1=\sqrt[m]{n-(n-1)a_2^m}$$

$$a_1a_2\cdots a_n=a_1a_2^{n-1}=a_2^{n-1}\cdot\sqrt[m]{n-(n-1)a_2^m}\to$$

$$a_2^{n-1}\sqrt[m]{-(n-1)a_2^m}=-\sqrt[m]{n-1}\,a_2^n(\text{当 } a_2\to\infty \text{ 时})$$

从而可得定理 3 成立.

推论 3　若 $\sum_{i=1}^{n}a_i^m=nk^m$(k 是已知的非零实数,m,n 均是不小于 3 的奇数,$a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$),则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

证明　同推论 2 的证明.

定理 4　若 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n(a_i\in\mathbf{R},n\geqslant 2)$,则 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 的取值范围是 $[-n,n]$,且当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=-1$ 时,$\sum_{i=1}^{n}a_i=-n$;当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时,$\sum_{i=1}^{n}a_i=n$.

证明　(向量法)设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(1,1,\cdots,1)$($n$ 个 1),则

$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=n$(当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}$ 即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时"$\leqslant$"中取"$=$").

所以 $-n\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant n$,且得 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 的最小值,最大值分别为 $-n,n$.

又 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\pm\sqrt{n-\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$ 在定义域上是连续函数,所以其函数值是

连续变化的,从而可得定理 4 成立.

推论 4 若 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = na$($a$ 是已知的正数,$a_i \in \mathbf{R}, n \geqslant 2$),则 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 的取值范围是 $[-n\sqrt{a}, n\sqrt{a}]$,且当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = -\sqrt{a}$ 时,$\sum_{i=1}^{n} a_i = -n\sqrt{a}$;当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \sqrt{a}$ 时,$\sum_{i=1}^{n} a_i = n\sqrt{a}$.

由定理2,3可以否定猜想3,4中的一些结论;由定理4知猜想4的第一个不等式在 $m = 2$ 时成立.

参考文献

[1] 崔应宏.对一道不等式习题的再思考[J].数学通报,2004(3):23-24.
[2] 甘志国.用导数研究一个猜想[J].数学通讯,2004(17):39-40.
[3] 郭要红,蔡向红.《几个猜想不等式的探究》一文的商榷[J].数学通报,2007(6):62-63.
[4] 戎建君.几个猜想不等式的探究[J].数学通报,2005(9):51-52.
[5] 甘志国.对两个结论的注记[J].数学通讯,2006(19):20-21.

对几个猜想的再研究

文献[1]用导数证明了文献[2]的猜想1成立,由文献[1]的定理1及其证明还可得:

定理1　设 $x^n+y^n=2(x,y\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N},n>1)$.

(1) 若 $2\nmid n$,则 $x+y$ 的取值范围是 $(0,2]$(当且仅当 $x\to\infty$ 时 $x+y\to0^+$,当且仅当 $x=y=1$ 时 $x+y=2$),xy 的取值范围是 $(-\infty,1]$(当且仅当 $x\to\infty$ 时 $xy\to-\infty$,当且仅当 $x=y=1$ 时 $xy=1$);

(2) 若 $2\mid n$,则 $x+y$ 的取值范围是 $[-2,2]$(当且仅当 $x=y=\mp1$ 时 $x+y=\mp2$),xy 的取值范围是 $[-1,1]$(当且仅当 $x=-y=\pm1$ 时 $xy=-1$,当且仅当 $x=y=\pm1$ 时 $xy=1$).

由定理1,还可得:

定理2　设 $x^n+y^n=k(x,y\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N},n>1,2\nmid n,k$ 是已知的任意实数).

(1) 若 $k=0$,则 $x+y=0$;

(2) 若 $k\neq0$,则 $\frac{x+y}{\sqrt[n]{k}}$ 的取值范围是 $(0,\frac{2}{\sqrt[n]{2}}]$(当且仅当 $x\to\infty$ 时 $\frac{x+y}{\sqrt[n]{k}}\to0^+$,当且仅当 $x=y=\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时 $\frac{x+y}{\sqrt[n]{k}}=\frac{2}{\sqrt[n]{2}}$);

(3) xy 的取值范围是 $(-\infty,\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}})$(当且仅当 $x\to\infty$ 时 $xy\to-\infty$,当且仅当 $x=y=\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时 $xy=\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}}$).

证明　当 $k=0$ 时易知定理2成立.

当 $k\neq0$ 时,由 $x^n+y^n=k$,得

$$(x\sqrt[n]{\frac{2}{k}})^n+(y\sqrt[n]{\frac{2}{k}})^n=2$$

再由定理1(1)可得定理2此时也成立.

定理3　设 $x^n+y^n=k(x,y\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*,2\mid n,k$ 是已知的任意非负实数),则 $x+y$ 的取值范围是 $[-2\sqrt[n]{\frac{k}{2}},2\sqrt[n]{\frac{k}{2}}]$(当且仅当 $x=y=\mp\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时

$x+y=\mp 2\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$);$xy$ 的取值范围是$[-\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}},\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}}]$(当且仅当 $x=-y=\pm\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时 $xy=-\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}}$,当且仅当 $x=y=\pm\sqrt[n]{\frac{k}{2}}$ 时 $xy=\sqrt[n]{\frac{k^2}{4}}$).(这里约定:区间 $[0,0]$ = 数集$\{0\}$,下同).

定理4 若$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m=k(a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R},m,n$ 都是大于2的正整数,$2\nmid m,k$ 是已知的任意实数),则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i,\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$ 的取值范围均是 $\mathbf{R}$.

证明 只需证 $n=3$ 的情形:

若 $a^m+b^m+c^m=k(a,b,c\in\mathbf{R},m$ 是大于1的奇数,k 是已知的任意实数),则 $a+b+c,abc$ 的取值范围均是 $\mathbf{R}$.

(因为由此立得:

若 $a_1^m+a_2^m+a_3^m+\underbrace{1^m+\cdots+1^m}_{(n-3)个1^m}=(k-n+3)+n-3(a_1,a_2,a_3\in\mathbf{R}$, m 是大于1的奇数),则 $a_1+a_2+a_3+\underbrace{1+\cdots+1}_{(n-3)个1},a_1a_2a_3\cdot\underbrace{1\cdot\cdots\cdot1}_{(n-3)个1}$ 的取值范围均是 $\mathbf{R}$.

又由此可得定理4成立.)

由 $a^m+b^m+c^m=k$,得 $a^m+b^m=k-c^m$.选 $c<\sqrt[m]{k}$,由定理2(2)得 $a+b$ 的取值范围是$(0,2\sqrt[m]{\frac{k-c^m}{2}}]$,$a+b+c$ 的取值范围是$(c,c+2\sqrt[m]{\frac{k-c^m}{2}}]$.

当 $c\to-\infty$ 时,$c+2\sqrt[m]{\frac{k-c^m}{2}}\to+\infty$,所以 $a+b+c$ 的取值范围是$(-\infty,+\infty)$.所以当 $c\in\mathbf{R}$ 时,$a+b+c$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

由 $a^m+b^m=k-c^m$ 及定理2(3),得 ab 的取值范围是$(-\infty,\sqrt[m]{\frac{(c^m-k)^2}{4}}]$.又选 $c>0$,得 abc 的取值范围是$(-\infty,c\sqrt[m]{\frac{(c^m-k)^2}{4}}]$.

当 $c\to+\infty$ 时,$c\sqrt[m]{\frac{(c^m-k)^2}{4}}\to+\infty$,所以 abc 的取值范围是$(-\infty,+\infty)$.所以当 $c\in\mathbf{R}$ 时,abc 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

定理5 设$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m=k(a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R},m,n$ 都是大于1的整数,$2\mid m,k$ 是已知的非负实数),则:

(1)$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 的取值范围是$[-n\sqrt[m]{\frac{k}{n}},n\sqrt[m]{\frac{k}{n}}]$(当且仅当 $a_1=\cdots=a_n=\mp$

$\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 时 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \mp n\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$);

(2) $\prod_{i=1}^{n} a_i$ 的取值范围是$[-(\frac{k}{n})^{\frac{n}{m}},(\frac{k}{n})^{\frac{n}{m}}]$(当且仅当 $a_1,\cdots,a_n$ 中有奇数个取 $-\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 且其余的均取$\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 时 $\prod_{i=1}^{n} a_i = -(\frac{k}{n})^{\frac{n}{m}}$,当且仅当 $a_1,\cdots,a_n$ 中有偶数个取 $-\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 且其余的均取$\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 时 $\prod_{i=1}^{n} a_i = (\frac{k}{n})^{\frac{n}{m}}$).

可用定理3对 n 用数学归纳法(方法同定理4)证得定理5,下面再用幂平均不等式和均值不等式给出定理5的简洁证明.

幂平均不等式[3] 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in \mathbf{R}^+,\alpha < \beta$, 则 $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$(当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号).

均值不等式[3] 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均是非负实数,则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$(当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号).

易知 $k = 0$ 时定理5成立,下证 $k > 0$ 的情形.

(1) 先证$\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ 的情形.此时 $|a_i| \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,\cdots,n)$,在幂平均不等式中令 $x_i = |a_i|,\alpha = 1,\beta = m$,得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^m)^{\frac{1}{m}} = (\frac{k}{n})^{\frac{1}{m}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant n\sqrt[m]{\frac{k}{n}}\text{(当且仅当 } |a_1| = \cdots = |a_n| \text{ 时取等号)}$$

若$\prod_{i=1}^{n} a_i = 0$,不妨设$\prod_{i=1}^{l} a_i \neq 0, a_{l+1} = a_{l+2} = \cdots = a_n = 0$,得

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{l} |a_i| \leqslant l\sqrt[m]{\frac{k}{l}} < n\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$$

(因为 $l < n$,所以 $l^{m-1} < n^{m-1}$)

所以$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant n\sqrt[m]{\frac{k}{n}}$(当且仅当 $|a_1| = \cdots = |a_n| = \sqrt[m]{\frac{k}{n}}$ 时取等号).从而有结论(1)成立.

(2) 由均值不等式,得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^m \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} |a_i|^m}$$

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{m}}\text{(当且仅当 } |a_1| = \cdots = |a_n| = \sqrt[m]{\frac{k}{n}} \text{ 时取等号)}$$

从而可得结论(2)成立.

对于文献[2]末的后三个猜想,有:

当 $n = 1$ 时猜想 3,4 显然成立;

由本文的定理 1 知,当 $n = 2$ 时猜想 3,4 成立;

由本文的定理4,5知,猜想2,3,4中关于 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 及 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的结论在 m 为奇数时均不成立,在 m 为偶数时均成立.

对于猜想 2,还有以下反例:

$(a,b,c) = (-1\,000, \sqrt[3]{10^9 - 61}, 4)$ 满足 $a^3 + b^3 + c^3 = 3$,但 $a + b + c > 3$;

$(a,b,c) = (-2, -1, \sqrt[3]{12})$ 满足 $a^3 + b^3 + c^3 = 3$,但 $abc > 1$.

参考文献

[1] 甘志国.用导数研究一个猜想[J].数学通讯,2004(17):39-40.

[2] 崔应宏.对一道不等式习题的再思考[J].数学通报,2004(3):23-24.

[3] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1990:86,59.

对一个猜想的研究

文献[1]的命题的证法实际上就是文献[2]的以直代曲法，文献[1]还用命题[1]简洁的证得：

推论[3]　若 $x_i > 0, i = 1,2,\cdots,m$，且 $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$，则 $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1+x_i^n} \leqslant \frac{m^{n+1}}{1+m^n}$.

应当指出的是，文献[1]对推论[3]的证明依据的是命题[1]，而命题[1]中还有条件"$m \geqslant 3, n \geqslant 2, m, n \in \mathbf{N}^*$"，所以文献[1]只证得推论在"$m \geqslant 3, n \geqslant 2, m, n \in \mathbf{N}^*$"时成立.

一般的情形是：

(1) 当 $n = 1$ 时，推论[3]应改为若 $x_1, x_2, \cdots, x_m \in \mathbf{R}^+$，且 $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$，则 $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1+x_i} \geqslant \frac{m^2}{1+m}$.

（易知 $f(x) = \frac{1}{1+x}(0 < x < 1)$ 是下凸函数，用 Jensen 不等式[4]易证.）

(2) 当 $n \geqslant 2, m, n \in \mathbf{N}^*$ 时推论[3]成立.

证明　当 $m = 1$ 时显然成立.

当 $n \geqslant 2, m \geqslant 3$ 时文献[1]已证成立.

下用以直代曲法证明 $m = n = 2$ 时成立：

若 $a, b \in \mathbf{R}^+, a + b = 1$，则 $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leqslant \frac{8}{5}$.

设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}(0 < x < 1)$，得曲线 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的切线为

$$y = \frac{4}{25}(7 - 4x)$$

若能证得

$$\frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{4}{25}(7 - 4x)(0 < x < 1) \quad ①$$

在①中令 $x = a, b$ 后相加便可得欲证.

①即

$$x^3 - \frac{7}{4}x^2 + x \leqslant \frac{3}{16}(0 < x < 1)$$

用导数求最值可得该式成立.所以要证结论成立.

猜想 1[1]　若 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, 0 < r < 1$,则 $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^r}{1 - x_i^r} \geqslant \frac{n}{n^r - 1}(n \geqslant 3)$.(这里应有条件 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^+$,否则当 $x_i < 0$,r 是无理数时,x_i^r 无意义)

它等价于:

猜想 2　若 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^+, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, 0 < r < 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^r} \geqslant \frac{n^{r+1}}{n^r - 1}(n \geqslant 3) \quad ②$$

(笔者进一步猜想:② 在 $n \in \mathbf{N}^*$ 时均成立.)

当 $n = 2$,时,笔者也不能证得 ② 成立,再提出:

猜想 3　若 $r, a, b \in (0,1), a + b = 1$,则 $\frac{1}{1 - a^r} + \frac{1}{1 - b^r} \geqslant \frac{2^{r+1}}{2^r - 1}$(当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取等号).

定理 1　当 $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 时,猜想 3 成立.

证明　即证当且仅当 $x = \frac{1}{2}$ 时,函数

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^r} + \frac{1}{1 - (1 - x)^r}(0 < x < 1, 0 < r < 1)$$

取到最小值.

$$f'(x) = \frac{rx^{r-1}}{(1 - x^r)^2} - \frac{r(1 - x)^{r-1}}{[1 - (1 - x)^r]^2}$$

令 $f'(x) = 0$,得

$$\frac{x^{r-1}}{(1 - x)^{r-1}} = \left[\frac{1 - x^r}{1 - (1 - x)^r}\right]^2$$

由 $0 < x < 1$,得

$$\frac{x^{\frac{r-1}{2}}}{(1 - x)^{\frac{r-1}{2}}} = \frac{1 - x^r}{1 - (1 - x)^r}$$

又令 $1 - x = x'$,得

$$x + x' = 1, x, x' \in (0,1)$$

$$\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{1-r}{2}} = \frac{1 - x^r}{1 - x'^r}$$

$$x'^{\frac{1-r}{2}} - x'^{\frac{1+r}{2}} = x^{\frac{1-r}{2}} - x^{\frac{1+r}{2}}$$

$$x'^{\frac{1-r}{2}} - x^{\frac{1-r}{2}} = x'^{\frac{1+r}{2}} - x^{\frac{1+r}{2}}$$

(1) 当 $r=\frac{1}{2}$ 时

$$x'^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}=x'^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{3}{4}}$$

$$x'^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}=(x'^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}})(x'^{\frac{1}{2}}+x'^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}})$$

若 $x'^{\frac{1}{2}}+x'^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}=1$,得

$$(x'^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^2=(1-x'^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}})^2$$

由 $x'+x=1$,得

$$1+2\sqrt{x'x}=(1-\sqrt[4]{x'x})^2$$

而 $$1+2\sqrt{x'x}>1>(1-\sqrt[4]{x'x})^2$$

所以 $$x'^{\frac{1}{2}}+x'^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}\neq 1$$

得 $$x'^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}=0$$

$$x'=x$$

即 $$x=\frac{1}{2}$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$,所以当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 取得最小值.

(2) 当 $r=\frac{1}{3}$ 时

$$x'^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}=x'^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$$

若 $x'^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}=1$,得

$$1=(x'^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})^3>x+x'=1$$

矛盾!所以 $x'=x$,也得欲证.

(3) 当 $r=\frac{2}{3}$ 时

$$x'^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{6}}=x'^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{5}{6}}$$

令 $x'^{\frac{1}{6}}=u,x^{\frac{1}{6}}=v$,得

$$u^5-v^5=u-v$$

所以 $u=v$ 或 $u^4+u^3v+u^2v^2+uv^3+v^4=1$.

若 $u\neq v$,再由 $u^{12}+v^{12}=1-2u^6v^6$,得

$$(u^4+v^4)^3=(1-u^3v-u^2v^2-uv^3)^3$$

$$1-2u^6v^6+3u^8v^4+3u^4v^8=(1-u^3v-u^2v^2-uv^3)^3$$

$$1+3u^4v^4\left[\left(u^2-\frac{v^2}{3}\right)^2+\frac{8}{9}v^4\right]=(1-u^3v-u^2v^2-uv^3)^3$$

$$左边 > 1 > 右边$$

矛盾!所以 $u = v, x' = x = \frac{1}{2}$,也得欲证!

笔者尚不能证得猜想 2 成立,但却得到了其伴随结论:

定理 2 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^+$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, r \geqslant 1$,则 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^r} \geqslant \frac{n^{r+1}}{n^r - 1}$(当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$ 时取等号).

证法 1 设 $f(x) = \frac{1}{1 - x^r}(0 < x < 1)$.

可求得曲线 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{n}$ 处的切线方程为

$$y = \frac{rn^r}{(n^r - 1)^2}\left(nx + \frac{n^r - 1}{r} - 1\right)$$

若能证得 $\frac{1}{1 - x^r} \geqslant \frac{rn^r}{(n^r - 1)^2}\left(nx + \frac{n^r - 1}{r} - 1\right)(0 < x < 1)$(当且仅当 $x = \frac{1}{n}$ 时取等号) ③

在 ③ 中令 $x = x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后相加,即得欲证.

③ 即

$$nx^{r+1} + \left(\frac{n^r - 1}{r} - 1\right)x^r - nx \geqslant \frac{1}{r} - \frac{n^{-r}}{r} - 1 \quad ④$$

令 $g(x) = nx^{r+1} + \left(\frac{n^r - 1}{r} - 1\right)x^r - nx(0 < x < 1)$,得

$$g'(x) = n(r + 1)x^r + (n^r - r - 1)x^{r-1} - n = (r + 1)x^{r-1}(nx - 1) + n[(nx)^{r-1} - 1]$$

由 $r \geqslant 1$ 得,当 $nx > (<)1$ 时,$(nx)^{r-1} \geqslant (\leqslant)1$,即

$$n[(nx)^{r-1} - 1] - 1 \geqslant (\leqslant)0$$

所以 $g'(x)$ 与 $nx - 1$ 同号,当且仅当 $x = \frac{1}{n}$ 时 $g(x)$ 取到最小值,即 ④ 成立.定理获证.

证法 2 因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$,所以

$$\frac{1}{1 - x_i^r} = 1 + x_i^r + x_i^{2r} + \cdots + x_i^{kr} + \cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^r} = n + \sum_{i=1}^{n} x_i^r + \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} x_i^{kr} + \cdots$$

令 $f(x) = x^{kr}(0 < x < 1, k \in \mathbf{N}^*)$,得 $f''(x) = kr(kr - 1)x^{kr-2} \geqslant 0$(当且仅当 $k = r = 1$ 时取等号).

当 $k=r=1$ 时，$\sum_{i=1}^{n} x_i^{kr}=1=n^{1-kr}$；

当 $k\in\mathbf{N}^*, r\geqslant 1$，但 $k=r=1$ 不成立时，由 Jensen 不等式[4]，得 $\sum_{i=1}^{n} x_i^{kr}\geqslant n\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{kr}$（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ 时取等号）$=n^{1-kr}$.

所以 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^r}\geqslant n+\sum_{k=1}^{\infty} n^{1-kr}$（取等号的条件同上）$=n+\frac{n^{1-r}}{1-n^{-r}}=\frac{n^{r+1}}{n^r-1}$.

参考文献

[1] 汪飞，陈传喜．初等证明不初等[J]．数学通讯，2007(8)：23.

[2] 丁兴春．以直代曲法证明不等式[J]．数学通讯，2007(5)：17-19.

[3] 曹学锋，汪飞．一个不等式的高维推广[J]．数学通讯，2004(21)：23-24.

[4] 徐利治，王兴华．数学分析的方法及例题选讲[M]．修订本．北京：高等教育出版社，1983：146.

用均值不等式求几个无理函数的最值

可用均值不等式证得：

定理 (1) 若 $0 < k < l, r \geqslant 0$, 则 $kx + l\sqrt{(x-h)^2 + r^2} \geqslant kh + r\sqrt{l^2 - k^2}$(当且仅当 $x = h - \frac{kr}{\sqrt{l^2 - k^2}}$ 时取等号)；

(2) 若 $k > l > 0, r \geqslant 0, x \geqslant r - h$, 则 $kx - l\sqrt{(x+h)^2 - r^2} \geqslant r\sqrt{k^2 - l^2} - kh$(当且仅当 $x = \frac{kr}{\sqrt{k^2 - l^2}} - h$ 时取等号)；

(3) 若 $k > l > 0, a < b, x \geqslant b$, 则 $k\sqrt{x-a} - l\sqrt{x-b} \geqslant \sqrt{(k^2 - l^2)(b-a)}$(当且仅当 $x = \frac{k^2 b - l^2 a}{k^2 - l^2}$ 时取等号).

证明 (1) 因为

$$\sqrt{(x-h)^2 + r^2} \geqslant \sqrt{(x-h)^2} = |x - h| = \pm(x-h)$$

所以

$$\sqrt{(x-h)^2 + r^2} \mp (x-h) \geqslant 0$$

得

$$kx + l\sqrt{(x-h)^2 + r^2} = \frac{l+k}{2}[\sqrt{(x-h)^2 + r^2} + (x-h)] + \frac{l-k}{2}[\sqrt{(x-h)^2 + r^2} - (x-h)] + kh \geqslant 2\sqrt{\frac{l+k}{2} \cdot \frac{l-k}{2} \cdot r^2} + kh = kh + r\sqrt{l^2 - k^2}$$

进而可得结论(1)成立.

(2) 同(1)可证.

$$(3) k\sqrt{x-a} - l\sqrt{x-b} = \frac{k-l}{2}(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) + \frac{k+l}{2}(\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b}) \geqslant 2\sqrt{\frac{k-l}{2} \cdot \frac{k+l}{2} \cdot (b-a)} = \sqrt{(k^2 - l^2)(b-a)}$$

进而可得结论(3)成立.

推论　(1) 若 $0 < k < l, r \geqslant 0$, 则 $-kx + l\sqrt{(x+h)^2 + r^2} \geqslant kh + r\sqrt{l^2 - k^2}$(当且仅当 $x = \dfrac{kr}{\sqrt{l^2 - k^2}} - h$ 时取等号);

(2) 若 $k > l > 0, r \geqslant 0, x \leqslant h - r$, 则 $-kx - l\sqrt{(x-h)^2 - r^2} \geqslant r\sqrt{k^2 - l^2} - kh$(当且仅当 $x = h - \dfrac{kr}{\sqrt{k^2 - l^2}}$ 时取等号);

(3) 若 $k > l > 0, a < b, x \leqslant -b$, 则 $k\sqrt{-x-a} - l\sqrt{-x-b} \geqslant \sqrt{(k^2 - l^2)(b-a)}$(当且仅当 $x = \dfrac{l^2 a - k^2 b}{k^2 - l^2}$ 时取等号).

以上定理及推论给出了相应的函数 $f(x)$ 的最小值,当然还可得到 $-f(x)$ 的最大值.

文献[1]中的例题均可用上述方法(或结论)求解(文献[1]定理中的"当"可改为"当且仅当").

例　求函数 $y = x - 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ 的最大值.

解　先由推论(1)求函数 $y_1 = -x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ 的最小值.

由 $k = 1, l = 2, h = -1, r = 1$, 得当且仅当 $x = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时, y_1 取最小值,且最小值是 $\sqrt{3} - 1$.

所以当且仅当 $x = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时,函数 y 取最大值,且最大值是 $1 - \sqrt{3}$.

参考文献

[1] 俞文奕,段志强. 一类最值问题的解法再探[J]. 中学数学月刊,2001(3):26,29.

一个最值定理的推广

定理 设 $x,y\in\mathbf{R}^+$,有:

(1) 若 xy 是定值,则当且仅当 $x=y$ 时,$x+y$ 取最小值;

(2) 若 $x+y$ 是定值,则当且仅当 $x=y$ 时,xy 取最大值.

这是一个常用的最值定理.现行高二(上)《数学》教科书中就叙述了它.有些题目与该定理的条件非常相似,却不能用它来解决,比如:

题 1 比较 $(a+3)(a-5)$ 与 $(a+2)(a-4)$ 的大小.

题 2 比较 $(x+5)(x+7)$ 与 $(x+6)^2$ 的大小.

(题 1,2 均选自以上教科书).

题 3 已知 $x,y\in\mathbf{N}^*$,$xy=63$,求 $x+y$ 的最值.

题 4 已知 $x,y\in\mathbf{N}^*$,$x+y=63$,求 xy 的最值.

题 1,2 均满足定理(2)中"$x+y$ 是定值"的条件,但不满足 $x,y\in\mathbf{R}^+$;题 3,4 不能满足 $x=y$ 的条件.能把定理推广吗?

推广 1 设 $x,y\in\mathbf{R}$,有:

(1) 若 xy 是定值,则 $|x-y|$ 越小 $\Leftrightarrow|x+y|$ 越小;

(2) 若 $x+y$ 是定值,则 $|x-y|$ 越小 $\Leftrightarrow xy$ 越大.

证明 由以下恒等式

$$|x+y|=\sqrt{|x-y|^2+4xy}$$

立得

$$xy=(x+y)^2-|x-y|^2$$

用推广 1 极易解决上述 4 道题(请读者尝试),并且由推广 1 可得:

推广 2 设 $x,y\in\mathbf{R}^+$,有:

(1) 若 xy 是定值,则当 $x\geqslant y$ 时,x 越小 $\Leftrightarrow x+y$ 越小;当 $x\leqslant y$ 时,x 越小 $\Leftrightarrow x+y$ 越大.

(2) 若 $x+y$ 是定值,则当 $x\geqslant y$ 时,x 越小 $\Leftrightarrow xy$ 越大;当 $x\leqslant y$ 时,x 越小 $\Leftrightarrow xy$ 越小.

推广 2′ 设 $x,y\in\mathbf{R}^+$,有:

(1) 若 $xy=$ 定值 s,则 $|x-\sqrt{s}|$ 越小 $\Leftrightarrow x+y$ 越小;

(2) 若 $x+y=$ 定值 s,则 $\left|x-\frac{s}{2}\right|$ 越小 $\Leftrightarrow xy$ 越大.

推论 1　设 s 是已知的正整数，x,y 是变化的正整数，且 $x \geqslant y$，有：

(1) 若 $xy=$ 定值 s，则 $x+y$ 取最大(小)值 $\Leftrightarrow x=s,y=1$($x=s$ 的不小于$\sqrt{s}$ 的最小因数，$y=s$ 的不大于$\sqrt{s}$ 的最大因数)；

(2) 若 $x+y=$ 定值 s，则 xy 取最大(小)值 $\Leftrightarrow x=\left[\frac{s+1}{2}\right],y=\left[\frac{s}{2}\right]$($x=s-1,y=1$).(这里$[x]$表示不大于实数 x 的最大整数)

推论 1 解决了题 3,4 的一般情形.

例 1[1]　用 0,1,3,4,5,7 组成两个三位数(每个数字只用一次)，使它们的积最小，应当怎样排列？

解　设这两个三位数分别是 $x,y(x \geqslant y)$.

容易理解，两个数的百位分别是 1,3；十位分别是 0,4；个位分别是 5,7. 所以 $x+y=$ 定值 452.

由推广 2(2) 得，当且仅当 $x=347,y=105$ 时，xy 取得最小值，且最小值是 36 435.

例 2　用 0,1,3,4,5,7 组成一个三位数及一个四位数(5 用两次，其余的数字只用一次)，使它们的积最大，应怎样排列？

解　设四位数是 x，三位数是 y，有 $x>y$. 要使积最大，则 x 的千位数字是 7；两个数的百位分别是 5,5；十位分别是 4,3；个位分别是 1,0. 所以 $x+y=$ 定值 8 071.

由推广 2(2)，得当且仅当 $x=7\,530,y=541$ 时，xy 取得最大值，且最大值是4 073 730.

在推广 2′ 中令 $x=ax',y=by'$，得以下推广.

推广 3　设 a,b,s 是已知的正数，x,y 是变化的正数，有：

(1) 若 $xy=$ 定值 s，则$\left|x-\sqrt{\frac{bs}{a}}\right|$越小 $\Leftrightarrow ax+by$ 越小；

(2) 若 $ax+by=$ 定值 s，则$\left|x-\frac{s}{2a}\right|$越小 $\Leftrightarrow xy$ 越大.

例 3　已知 $x,y\in \mathbf{N}^*$，$xy=1\,998$，求$\frac{1}{2}x+\frac{10}{3}y$ 的最值.

解　$115<\sqrt{\frac{10}{3}\times 1\,998 \div \frac{1}{2}}=\sqrt{13\,320}<116$.

由推广 3(1)，得$\frac{1}{2}x+\frac{10}{3}y$ 的最大值只可能在 $|x-\sqrt{13\,320}|$ 取最大值且 x 是 1 998 的正约数时取得. 可得当且仅当 $x=1,y=1\,998$ 时，$\frac{1}{2}x+\frac{10}{3}y$ 取得最大值，且最大值是 6 660.5.

$\frac{1}{2}x+\frac{10}{3}y$ 的最小值只可能在 $|x-\sqrt{13\,320}|$ 取最小值且 x 是 1 998 的正

约数时取得.可得当且仅当 $x = 111, y = 18$ 时,$\frac{1}{2}x + \frac{10}{3}y$ 取得最小值,且最小值是 115.5.

例 4 已知 $x, y \in \mathbf{N}^*$,$\frac{3}{2}x + \frac{10}{3}y = \frac{1\,999}{2}$,求 xy 的最值.

解 可得 $\begin{cases} x = 333 + 20t \\ y = 150 - 9t \end{cases}$ $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 16)$.

由推广 3(2),得 xy 的最大值只可能在 $\left|333 + 20t - \frac{1\,999}{6}\right| = \left|20t - 3\frac{1}{6}\right|$ 取最小值(即 $t = 0$)时取得,所以当且仅当 $x = 333, y = 150$ 时,xy 取得最大值,且最大值是 49 950.

xy 的最小值只可能在 $\left|20t - 3\frac{1}{6}\right|$ 取最大值(即 $t = -16$)时取得,所以当且仅当 $x = 13, y = 294$ 时,xy 取得最小值,且最小值是 3 822.

(直接用推广 2′ 也可解决例 3,4.)

下面再给出推广 1 在数列方面的一个应用.

推论 2 (1) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列.若 $m + n = k + l(m, n, k, l \in \mathbf{N}^*)$,则 $a_m + a_n = a_k + a_l$;若又 $|m - n| > |k - l|$,则 $a_m a_n \leqslant a_k a_l$(当且仅当 $\{a_n\}$ 是常数列时取等号).

(2) 设 $\{a_n\}$ 是正项等比数列.若 $m + n = k + l(m, n, k, l \in \mathbf{N}^*)$,则 $a_m a_n = a_k a_l$;若又 $|m - n| > |k - l|$,则 $a_m + a_n \geqslant a_k + a_l$(当且仅当 $\{a_n\}$ 是常数列时取等号).

证明 两个结论中的前一部分是熟知的,所以均只证后一部分.由推广 1(2) 知,均只需证 $|a_m - a_n| \geqslant |a_k - a_l|$(当且仅当 $\{a_n\}$ 是常数列时取等号).

(1) 由 $|m - n| > |k - l|$ 并设通项 $a_n = pn + q(p, q \in \mathbf{R})$ 可得.

(2) 由 $m + n = k + l, |m - n| > |k - l|$ 知,可不妨设 $m \leqslant k \leqslant l \leqslant n$,且 $m < n$,又设公比为 q,只需证当 $q > 1$ 时,$q^n - q^m > q^l - q^k$;当 $0 < q < 1$ 时,$q^m - q^n > q^k - q^l$.

它们均是显然的.

参考文献

[1] 武延树.一个最值定理的推广[J].数学通讯,1996(4):10.

一道课本习题的变形、加强及推广

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2004年人民教育出版社)第30页第8题为:已知 $a > b > c$,求证$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$.

在这道题中,若设 $a-b=a_1, b-c=a_2$,则此题就变形为:已知 $a_1, a_2 \in \mathbf{R}^+$,求证$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}>\frac{1}{a_1+a_2}$.

它就不证自明了.还可把它加强为:

定理1　若 $a_1, a_2 \in \mathbf{R}^+$,则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2} \geqslant \frac{4}{a_1+a_2}$.

这里不想证明定理1,因为它是以下定理2的特例.

定理2　若 $a_1, a_2, p_1, p_2 \in \mathbf{R}^+$,则$\frac{p_1}{a_1}+\frac{p_2}{a_2} \geqslant \frac{(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})^2}{a_1+a_2}$(当且仅当$\frac{\sqrt{p_1}}{a_1}=\frac{\sqrt{p_2}}{a_2}$时取等号).

证明

$$\frac{p_1}{a_1}(a_1+a_2)+\frac{p_2}{a_2}(a_1+a_2)=p_1+p_2+\left(\frac{p_1a_2}{a_1}+\frac{p_2a_1}{a_2}\right) \geqslant p_1+p_2+2\sqrt{\frac{p_1a_2}{a_1}\cdot\frac{p_2a_1}{a_2}}=(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})^2$$

进而可得定理2成立.

用数学归纳法还可把定理2推广为:

定理3　若 $a_i, p_i \in \mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i} \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$(当且仅当$\frac{\sqrt{p_1}}{a_1}=\frac{\sqrt{p_2}}{a_2}=\cdots=\frac{\sqrt{p_n}}{a_n}$时取等号).

运用均值不等式,还可证得:

定理4　若 $a_i, p_i \in \mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i} \geqslant \frac{n^2\cdot\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_n}}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$(当且

仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 且 $p_1=p_2=\cdots=p_n$ 时取等号).

证明 $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i} \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \cdot n\sqrt[n]{\frac{p_1p_2\cdots p_n}{a_1a_2\cdots a_n}} = n^2 \cdot \sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_n}$

进而可得定理 4 成立.

对于定理 3,4,哪个结论更强呢?由均值不等式,读者极易证出:

定理 5 若 $p_1,p_2,\cdots,p_n \in \mathbf{R}^+$,则 $(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{p_i})^2 \geqslant n^2 \cdot \sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_n}$(当且仅当 $p_1=p_2=\cdots=p_n$ 时取等号).

一个不等式的高维推广

文献[1]给出了八个不等式,其中第八个为:

若 $x,y,m,p\in\mathbf{R}^+$,则$(m+\frac{p}{x})(m+\frac{p}{y})\geqslant(m+\frac{2p}{x+y})^2$(当且仅当 $x=y$ 时取等号).

这个结论可以向高维推广.

定理 1　若 $x_1,x_2,\cdots,x_n,m,p\in\mathbf{R}^+$,则$\prod\limits_{i=1}^{n}(m+\frac{p}{x_i})\geqslant(m+\frac{np}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i})^n$(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号).

证明　即证

$$m^n+\left(p\sum\frac{1}{x_1}\right)m^{n-1}+\left(p^2\sum\frac{1}{x_1x_2}\right)m^{n-2}+\cdots+\left(p^{n-1}\sum\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\right)m+$$

$$p^n\cdot\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant m^n+\left(p\cdot\frac{nC_n^1}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right)m^{n-1}+\left[p^2\cdot\frac{n^2C_n^2}{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2}\right]m^{n-2}+\cdots+$$

$$\left[p^{n-1}\cdot\frac{n^{n-1}C_n^{n-1}}{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^{n-1}}\right]m+p^n\cdot\frac{n^nC_n^n}{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^n}$$

因为 $m,p\in\mathbf{R}^+$,所以只需证

$$\sum\frac{1}{x_1x_2\cdots x_j}\geqslant\frac{n^jC_n^j}{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^j}(j=1,2,\cdots,n)$$

下面用均值不等式给予证明:

$$\sum\frac{1}{x_1x_2\cdots x_j}\geqslant C_n^j\sqrt[C_n^j]{\frac{1}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{jC_n^j}{n}}}}=\frac{C_n^j}{(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^j}\geqslant$$

$$\frac{C_n^j}{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^j}=\frac{n^jC_n^j}{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^j}(j=1,2,\cdots,n)$$

从而可得定理 1 成立.

推论 若 $a_i,x_i \in \mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\frac{a_1-a_2}{x_1-x_2}=\frac{a_2-a_3}{x_2-x_3}=\cdots=\frac{a_{n-1}-a_n}{x_{n-1}-x_n}>0$, $\frac{a_2x_1-a_1x_2}{x_1-x_2}>0$, 则 $\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)^n$.

证明 设 $m=\frac{a_1-a_2}{x_1-x_2}=\frac{a_2-a_3}{x_2-x_3}=\cdots=\frac{a_{n-1}-a_n}{x_{n-1}-x_n}$, $p=\frac{a_2x_1-a_1x_2}{x_1-x_2}$, 可得

$$p=a_1-mx_1=a_2-mx_2=\cdots=a_n-mx_n$$

即 $a_i=mx_i+p(i=1,2,\cdots,n)$, $\frac{a_i}{x_i}=m+\frac{p}{x_i}$, $m,p\in \mathbf{R}^+$, 由定理 1 可得推论成立.

定理 2 若 $a,b,x,y\in \mathbf{R}^+$, 则 $\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}>(=,<)\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^2 \Leftrightarrow (ax-by)(bx-ay)>(=,<)0$.

证明 $\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}>(=,<)\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^2 \Leftrightarrow ab(x+y)^2>(=,<)xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (ax-by)(bx-ay)>(=,<)0$.

参考文献

[1] 曹大方.条件最值(不等式)问题的一种解(证)法[J].数学通讯,2000(15):20-22.

浅探一类函数的最值

1　问题及简化

问题1　求函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n-k}a_ix_ix_{i+1}\cdots x_{i+k}}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i^{k+1}}(n,k\in\mathbf{N}^*,n>k;$ $a_1,a_2,\cdots,a_{n-k},b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}^+$;变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R})$ 的最值.

注　本文中的"求函数最值"包括:函数是否有最大值(最小值)?若存在最大值(最小值),还要求出最大值(最小值).

在问题1中作代换 $x_i=\dfrac{x'_i}{\sqrt[k+1]{b_i}}(i=1,2,\cdots,n)$,便把问题1简化为:

问题2　求函数

$$f_{a_1,a_2,\cdots,a_{n-k}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-k}a_ix_ix_{i+1}\cdots x_{i+k}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{k+1}}$$

(其中 $n,k\in\mathbf{N}^*,n>k;a_1,a_2,\cdots,a_{n-k}\in\mathbf{R}^+$;变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$) 的最值.

当 k 为 $4m+1(m\in\mathbf{N})$ 形数时,在问题2中又作代换 $x_i=(-1)^ix'_i(i=1,2,\cdots,n)$,得

$$f_{a_1,a_2,\cdots,a_{n-k}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-f_{a_1,a_2,\cdots,a_{n-k}}(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$$

所以当 k 为 $4m+1(m\in\mathbf{N})$ 形数时,若求出了问题2中函数的最大值,便可立得最小值.

当 k 为奇数时,要求问题2中函数的最大值,可让所有变量均在非负实数范围内取值(当然不能全取0),求得的最大值就是问题2中函数的最大值.因此,本文主要用平均值不等式研究:

问题3　求函数 $f^+_{a_1,a_2,\cdots,a_{n-k}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n-k}a_ix_ix_{i+1}\cdots x_{i+k}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{k+1}}(n,k\in$

$\mathbf{N}^*, n > k; a_1, a_2, \cdots, a_{n-k} \in \mathbf{R}^+$;变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均在非负实数范围内取值且不全为 0) 的最大值.

2 问题 2 中 $k = 1$ 时的情形

由上节的论述,因为 1 是 $4m + 1(m \in \mathbf{N})$ 形数,所以 $k = 1$ 时只需求问题 2 中函数的最大值,即需解决:

问题 4 求函数

$$f^+_{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

(其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in \mathbf{R}^+, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$) 的最大值.

2.1 问题 4 中 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1$ 的情形

此时,即求函数

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} (x_1, x_2, \cdots, x_n \text{ 取实数且不全为为 } 0) \qquad ①$$

的最大值.

定理 1 当且仅当 $x_i = c\sin\frac{i\pi}{n+1}(i = 1,2,\cdots,n)(c \in \mathbf{R}^*)$ 时,① 中的函数取最大值,且最大值是 $\cos\frac{\pi}{n+1}$.

(文献[1] 给出了定理 1 中的最大值,但没有给出何时取得最大值.)

证明 记 $c_i = \frac{\sin\frac{i+1}{n+1}\pi}{\sin\frac{i}{n+1}\pi}(i = 1,2,\cdots,n-1)$,可证得

$$c_1 = \frac{1}{c_{n-1}} = 2\cos\frac{\pi}{n+1}, c_i = c_1 - \frac{1}{c_{i-1}}(i = 2,3,\cdots,n-1)$$

所以

$$\frac{c_1}{2} = \frac{1}{2c_1} + \frac{c_2}{2} = \frac{1}{2c_2} + \frac{c_3}{2} = \cdots = \frac{1}{2c_{n-2}} + \frac{c_{n-1}}{2} = \frac{1}{2c_{n-1}} = \cos\frac{\pi}{n+1} \qquad ②$$

因为 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1} \in \mathbf{R}^+, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$,所以由均值不等式,得

$$\frac{c_1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2c_1}x_2^2 \geqslant x_1 x_2 (\text{当且仅当 } c_1 x_1 = x_2 \text{ 时取等号})$$

$$\frac{c_2}{2}x_2^2 + \frac{1}{2c_2}x_3^2 \geqslant x_2 x_3 (\text{当且仅当 } c_2 x_2 = x_3 \text{ 时取等号})$$

$\vdots$

$$\frac{c_{n-1}}{2}x_{n-1}^2+\frac{1}{2c_{n-1}}x_n^2\geqslant x_{n-1}x_n\text{（当且仅当 }c_{n-1}x_{n-1}=x_n\text{ 时取等号）}$$

把它们相加，得

$$\frac{c_1}{2}x_1^2+\left(\frac{1}{2c_1}+\frac{c_2}{2}\right)x_2^2+\left(\frac{1}{2c_2}+\frac{c_3}{2}\right)x_3^2+\cdots+\left(\frac{1}{2c_{n-2}}+\frac{c_{n-1}}{2}\right)x_{n-1}^2+$$
$$\frac{1}{2c_{n-1}}x_n^2\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$$

又由 ②，得 $\cos\frac{\pi}{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$（当且仅当 $x_1:x_2:x_3:\cdots:=1:c_1:c_1c_2:\cdots:c_1c_2\cdots c_{n-1}$ 或 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时取等号）.

又

$$c_1c_2\cdots c_i=\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}\cdot\sin\frac{3\pi}{n+1}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{i+1}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{n+1}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{i}{n+1}\pi}=\frac{\sin\frac{i+1}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}}$$

所以

$$1:c_1:c_1c_2:\cdots:c_1c_2\cdots c_{n-1}=\sin\frac{\pi}{n+1}:\sin\frac{2\pi}{n+1}:\sin\frac{3\pi}{n+1}:\cdots:\sin\frac{n\pi}{n+1}$$

从而可得定理 1 成立.

2.2　问题 4 中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 不全为 1 的部分结论

定理 2　以下 a_1,a_2,a_3,a_4 均为已知的正实数，变量 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\mathbf{R}$.

(1) $\frac{a_1x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\leqslant\frac{a_1}{2}$（当且仅当 $x_1=x_2$ 时取等号）；

(2) $\frac{a_1x_1x_2+a_2x_2x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2+a_2^2}$（当且仅当 $x_1:x_2:x_3=a_1:\sqrt{a_1^2+a_2^2}:a_2$ 时取等号）；

(3)
$$\frac{a_1x_1x_2+a_2x_2x_3+a_3x_3x_4}{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}\leqslant$$
$$\frac{a_1a_3}{\sqrt{2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-2\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2}}}$$

（当且仅当 $x_1:x_2:x_3:x_4=$

$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2-\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2}}\left(a_1^2-a_2^2-a_3^2+\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2}\right):$

$\sqrt{2}a_3\left(a_1^2-a_2^2-a_3^2+\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2}\right):$

$2a_1a_2\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2-\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2}}:$

$\sqrt{2}a_2(a_1^2+a_2^2+a_3^2-\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2})$

时取等号)

(4) $\dfrac{a_1x_1x_2+a_2x_2x_3+a_3x_3x_4+a_4x_4x_5}{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}\leqslant$

$$\sqrt{\frac{a_1^2a_3^2+a_1^2a_4^2+a_2^2a_4^2}{2(a_1^2+\cdots+a_4^2)-2\sqrt{(a_1^2+\cdots+a_4^2)^2-4(a_1^2a_3^2+a_1^2a_4^2+a_2^2a_4^2)}}}$$

证明 这里只证(3).引入正参数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,得

$$a_1\lambda_1x_1^2+\frac{a_1}{\lambda_1}x_2^2\geqslant 2a_1x_1x_2(\text{当且仅当 }\lambda_1x_1=x_2\text{ 时取等号})$$

$$a_2\lambda_2x_2^2+\frac{a_2}{\lambda_2}x_3^2\geqslant 2a_2x_2x_3(\text{当且仅当 }\lambda_2x_2=x_3\text{ 时取等号})$$

$$a_3\lambda_3x_3^2+\frac{a_3}{\lambda_3}x_4^2\geqslant 2a_3x_3x_4(\text{当且仅当 }\lambda_3x_3=x_4\text{ 时取等号})$$

把它们相加,得

$$a_1\lambda_1x_1^2+(\frac{a_1}{\lambda_1}+a_2\lambda_2)x_2^2+(\frac{a_2}{\lambda_2}+a_3\lambda_3)x_3^2+\frac{a_3}{\lambda_3}x_4^2\geqslant$$
$$2(a_1x_1x_2+a_2x_2x_3+a_3x_3x_4)(\text{当且仅当 }x_1:x_2:x_3:x_4=$$
$$1:\lambda_1:\lambda_1\lambda_2:\lambda_1\lambda_2\lambda_3\text{ 或 }x_1=x_2=x_3=x_4=0\text{ 时取等号})$$

令 $a_1\lambda_1=\dfrac{a_1}{\lambda_1}+a_2\lambda_2=\dfrac{a_2}{\lambda_2}+a_3\lambda_3=\dfrac{a_3}{\lambda_3}$,可解得

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{2}a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2-\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2}}}$$

$$\lambda_2=\frac{\sqrt{2}a_1a_2\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2-\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2}}}{a_3[a_1^2-a_2^2-a_3^2+\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2}]}$$

$$\lambda_3=\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2-\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-4a_1^2a_3^2}}}{\sqrt{2}a_1}$$

进而可得结论(3)成立.

3 问题3中 $k=2$ 的情形

问题5 求函数 $y=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n-2}a_ix_ix_{i+1}x_{i+2}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3}$(变量 $x_1,\cdots,x_n$ 均在非负实数范围内取值且不全为0)的最大值.

定理3 以下 x_1,x_2,x_3,x_4 在非负实数范围内取值.

(1) $\dfrac{a_1x_1x_2x_3}{x_1^3+x_2^3+x_3^3}\leqslant\dfrac{a_1}{3}$(当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 时取等号);

(2) $\dfrac{a_1x_1x_2x_3+a_2x_2x_3x_4}{x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3}\leqslant\dfrac{1}{3}(a_1^{\frac{3}{2}}+a_2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$(当且仅当 $x_1:x_2:x_3:x_4=\sqrt{a_1}:\sqrt[3]{a_1^{\frac{3}{2}}+a_2^{\frac{3}{2}}}:\sqrt[3]{a_1^{\frac{3}{2}}+a_2^{\frac{3}{2}}}:\sqrt{a_2}$ 时取等号).

证明 只证 2).引入正参数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,得

$\lambda_2^3x_1^3+\lambda_1^3x_2^3+x_3^3\geqslant 3\lambda_1\lambda_2x_1x_2x_3$(当且仅当 $x_1:x_2:x_3=\lambda_1:\lambda_2:\lambda_1\lambda_2$ 时取等号)

$\lambda_1^3\lambda_3^3x_2^3+\lambda_3^3x_3^3+x_4^3\geqslant 3\lambda_1\lambda_3^2x_2x_3x_4$(当且仅当 $x_2:x_3:x_4=\lambda_2:\lambda_1\lambda_2:\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 时取等号)

所以

$$a_1\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}x_1^3+\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}x_2^3+\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}x_3^3\right)\geqslant 3a_1x_1x_2x_3$$

$$a_2\left(\lambda_1^2\lambda_3x_2^3+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}x_3^3+\frac{1}{\lambda_1\lambda_3^2}x_4^3\right)\geqslant 3a_2x_2x_3x_4$$

把它们相加,得

$$\frac{a_1\lambda_2^2}{\lambda_1}x_1^3+\left(\frac{a_1\lambda_2^2}{\lambda_1}+a_2\lambda_1^2\lambda_3\right)x_2^3+\left(\frac{a_1}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{a_2\lambda_3}{\lambda_1}\right)x_3^3+\frac{a_2}{\lambda_1\lambda_3^2}x_4^3\geqslant$$

$$3(a_1x_1x_2x_3+a_2x_2x_3x_4)$$(当且仅当 $x_1:x_2:x_3:x_4=\lambda_1:\lambda_2:\lambda_1\lambda_2:\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 或 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$ 时取等号)

令 $\dfrac{a_1\lambda_2^2}{\lambda_1}=\dfrac{a_1\lambda_1^2}{\lambda_2}+a_2\lambda_1^2\lambda_3=\dfrac{a_1}{\lambda_1\lambda_2}+\dfrac{a_2\lambda_3}{\lambda_1}=\dfrac{a_2}{\lambda_1\lambda_3^2}$,可解得

$$\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{\sqrt[3]{a_1^{\frac{3}{2}}+a_2^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{a_1}},\lambda_3=\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt[3]{a_1^{\frac{3}{2}}+a_2^{\frac{3}{2}}}}$$

进而可得结论(2)成立.

4 一个猜想

对于问题 3,应重点研究:

问题 6 求函数

$$g_{n,k}^{+}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-k}x_ix_{i+1}\cdots x_{i+k}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{k+1}}$$($n,k\in\mathbf{N}^*,n>k$;变量 $x_1,\cdots,x_n$ 均在非负实数范围内取值且不全为 0) 的最大值.

猜想 1 若问题 6 中的函数取最大值,则 $x_1=x_n,x_2=x_{n-1},x_3=x_{n-2},\cdots$

定理4 若函数 $y=\dfrac{x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_2x_3\cdots x_n}{x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}$($n\geqslant 3$,变量 $x_1,\cdots,x_n$ 均在非负实数范围内取值且不全为0)必在 $x_1=x_n,x_2=x_{n-1},\cdots$ 时取得最大值,则此函数的最大值为$\dfrac{\sqrt[n-1]{2^{n-2}}}{n-1}$(当且仅当 $x_1:x_2:x_3:\cdots:x_n=1:\sqrt[n-1]{2}:\sqrt[n-1]{2}:\cdots:\sqrt[n-1]{2}:1$ 时取得最大值).

证明 (1)当 n 为奇数时,设 $n=2m+1$,得

$$x_1=x_{2m+1},x_2=x_{2m},\cdots,x_m=x_{m+2}$$

$$y=\frac{2x_1x_2\cdots x_{2m}}{2(x_1^{2m}+\cdots+x_m^{2m})+x_{m+1}^{2m}}=\frac{2x_1x_2^2x_3^2\cdots x_m^2x_{m+1}}{2(x_1^{2m}+\cdots+x_m^{2m})+x_{m+1}^{2m}}=$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt[2m]{2}}(\sqrt[2m]{2}x_1)(x_2\cdot x_2)(x_3\cdot x_3)\cdots(x_m\cdot x_m)x_{m+1}}{(\sqrt[2m]{2}x_1)^{2m}+(x_2^{2m}+x_2^{2m})+(x_3^{2m}+x_3^{2m})+\cdots+(x_m^{2m}+x_m^{2m})+x_{m+1}^{2m}}\leqslant$$

$$\frac{2}{\sqrt[2m]{2}}\cdot\frac{1}{2m}(\text{当且仅当}\sqrt[2m]{2}x_1=x_2=x_3=\cdots=x_m=x_{m+1}\text{时取等号})$$

从而有此时定理4成立.

(2)当 n 为偶数时,设 $n=2m$,得

$$x_1=x_{2m},x_2=x_{2m-1},\cdots,x_m=x_{m+1}$$

$$y=\frac{2x_1\cdots x_{2m-1}}{2(x_1^{2m-1}+\cdots+x_m^{2m-1})}=\frac{2x_1x_2^2x_3^2\cdots x_m^2}{2(x_1^{2m-1}+\cdots+x_m^{2m-1})}=$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt[2m-1]{2}}(\sqrt[2m-1]{2}x_1)\cdot(x_2\cdot x_2)\cdots(x_m\cdot x_m)}{(\sqrt[2m-1]{2}x_1)^{2m-1}+(x_2^{2m-1}+x_2^{2m-1})+\cdots+(x_m^{2m-1}+x_m^{2m-1})}\leqslant$$

$$\frac{2}{\sqrt[2m-1]{2}}\cdot\frac{1}{2m-1}(\text{当且仅当}\sqrt[2m-1]{2}x_1=x_2=x_3=\cdots=x_m\text{时取等号})$$

从而有此时定理4也成立.

5 其他问题及部分结果

问题7 (1)求函数 $y=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_ix_{i+1}}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2}$($x_{n+1}=x_1,a_1\cdots a_nb_1\cdots b_n\neq 0$)的最值;

(2)求函数 $y=\dfrac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}b_{ij}x_ix_j}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2x_i^2}$($a_1\cdots a_n\neq 0$)的最值;

(3) 求函数 $y = \dfrac{\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} b_{i_1i_2\cdots i_k}x_{i1}\cdots x_{ik}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2x_i^k}(a_1\cdots a_n \neq 0)$ 的最值.

下面给出部分结果:

定理 5　设 $y = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_ia_{i+1}x_ix_{i+1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2x_i^2}(a_{n+1}x_{n+1} = a_1x_1, a_1\cdots a_n \neq 0)$,则:

(1) 当 n 是偶数时, $-1 \leqslant y \leqslant 1$(当且仅当 $x_i = \dfrac{c}{a_i}(i = 1,2,\cdots,n)(c \in \mathbf{R}^*)$ 时 $y = 1$,当且仅当 $x_i = \dfrac{(-1)^ic}{a_i}(i = 1,2,\cdots,n)(c \in \mathbf{R}^*)$ 时 $y = -1$);

(2) 当 n 是奇数时, $-1 < y \leqslant 1$(当且仅当 $x_i = \dfrac{c}{a_i}(i = 1,2,\cdots,n)(c \in \mathbf{R}^*)$ 时 $y = 1$).

证明　由 Cauchy 不等式,可得

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_ix_i)\cdot(a_{i+1}x_{i+1})\right]^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2x_i^2\right)^2$$

所以 $|y| \leqslant 1$,当且仅当

$$\frac{a_1x_1}{a_2x_2} = \frac{a_2x_2}{a_3x_3} = \cdots = \frac{a_{n-1}x_{n-1}}{a_nx_n} = \frac{a_nx_n}{a_1x_1} \qquad ③$$

时取等号.

在 ③ 中,设 $\dfrac{a_1x_1}{a_2x_2} = k$,可得 $k^n = 1$,又 $k \in \mathbf{R}$,从而可得结论(1),(2) 均成立.

问题 8　当 n 为奇数时,定理 5 中的函数 y 有最小值吗?

定理 6　$\dfrac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_jx_ix_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2x_i^2} \leqslant \dfrac{n-1}{2}(a_1\cdots a_n \neq 0)$(当且仅当 $x_i = \dfrac{c}{a_i}(i = 1,2,\cdots,n;c \in \mathbf{R}^*)$ 时取等号).

证明　由 Cauchy 不等式,得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n}(a_ix_i)^2 \text{(当且仅当 } a_1x_1 = \cdots = a_nx_n \text{ 时取等号)}$$

所以　$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_jx_ix_j = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}(a_ix_i)^2\right] \leqslant \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2x_i^2$$

(当且仅当 $x_1 : \cdots : x_n = \dfrac{1}{a_1} : \cdots : \dfrac{1}{a_n}$ 时取等号)

立得定理6成立.

文献[2]是很有价值的:证法初等、简洁,定理的内涵丰富,综述了很多结论.

文献[2]的定理是关于"$\sum_{k=1}^{n} a_k^2$, $\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1}$"的不等式,能否得到关于"$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k^2$, $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k a_k a_{k+1}$"的不等式呢?若能解决本文的问题4,可望得到这样的不等式.

文献[2]有下表中的五处印刷错误:

页	栏	行	错误	正确
24	右	倒七(即(6)式下一行)	$\pm$	$\mp$
24	右	倒三	a_k^2	a_n^2
25	左	(7)式那一行	$\geqslant \sum_{k=1}^{n}$	$\geqslant \sum_{k=1}^{n-1}$
25	左	(8)式那一行	$2\sum_{k=1}^{n}$	$2\sum_{k=1}^{n-1}$
25	左	(9)式那一行	$= \sin\frac{2n\pi}{2n+1}$	$= -\sin\frac{2n\pi}{2n+1}$

问题9 求函数 $y = \frac{a_1 x_1 \cdots x_{n-1} + a_2 x_2 x_3 \cdots x_n}{x_1^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1}}$ 的最大值.

参考文献

[1] 张国定.一个最值问题的解法[J].数学通讯,2001(9):20-21.

[2] 卢小宁,萧振纲.FTT不等式的一个简单证明及其发现过程[J].数学通讯,2001(21):24-25.

函数 $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ 的最值

文献[1]运用电子计算机求得了函数

$$f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x \qquad ①$$

的最大值大约是 2.499 501，最小值大约是 -2.499 501．试问：能求出其准确的最值吗？可以！

引理 1[2]　当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ 时，实系数一元三次方程 $x^3+px+q=0$ 有三个两两相异的实根：$x_1=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$，$x_2=-r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3})$，$x_3=-r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3})$，其中 $-\frac{q}{2}+\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r$ 与 θ 分别表示该复数的模与幅角．

引理 2　方程 $3a^3+2a^2-8a-4=0$ 有唯一的正实根 $a=\frac{4}{9}\sqrt[6]{6\,859}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{131}{4\sqrt{6\,859}}\right)-\frac{2}{9}=1.571\,001\cdots$.

证明　在方程中令 $a=\frac{c-2}{9}$，得

$$c^3-228c-524=0$$

由引理 1 可证该方程有唯一的正实根

$$c=4\sqrt[6]{6\,859}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{131}{4\sqrt{6\,859}}\right)=16.139\,01\cdots$$

进而可得引理 2 成立．

引理 3　方程 $\lambda_2^3-2\lambda_2^2-6\lambda_2+6=0$ 有唯一的大于 2 的正实根 $\lambda_2=\frac{2}{3}\sqrt{22}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\arccos\frac{19}{22\sqrt{22}}\right)+\frac{2}{3}=3.273\,072\,863\cdots$.

证明　在方程中令 $\lambda_2=\frac{u+2}{3}$，得

$$u^3-66u+38=0$$

由引理 1 可证它有唯一的正实根

$$u=2\sqrt{22}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\arccos\frac{19}{22\sqrt{22}}\right)=7.819\,218\,5\cdots$$

进而可得引理 3 成立.

下面给出函数 ① 的最值求法.因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(x)$ 的最大值与最小值互为相反数,只需求 $f(x)$ 的最大值.

1 初等方法

可先将 ① 变形为

$$f(x) = 2\sin x\cos x(2\cos x + 1) \quad ②$$

若 $f(x)$ 取最大值,则 x 为第一象限的角,$\sin x > 0, \cos x > 0$.

设 λ_1, λ_2 是正常数,得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1\sin x)(\lambda_2\cos x)(2\cos x + 1) \leqslant \\ &\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}\left[\frac{\lambda_1\sin x + (\lambda_2 + 2)\cos x + 1}{3}\right]^3 \leqslant \\ &\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}\left[\frac{\sqrt{\lambda_1^2 + (\lambda_2 + 2)^2} + 1}{3}\right]^3 \end{aligned} \quad ③$$

③ 中第一个"$\leqslant$"中取"="的充要条件是 $\lambda_1\sin x = \lambda_2\cos x = 2\cos x + 1$,即

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{\lambda_2 - 2}(\lambda_2 > 2) \\ \sin x = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2 - 2)} \end{cases} \quad ④$$

由 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,得

$$\lambda_1^2 = \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2 - 2)^2 - 1} \quad ⑤$$

③ 中第二个"$\leqslant$"可由 Cauchy 不等式得到

$$[\lambda_1\sin x + (\lambda_2 + 2)\cos x]^2 \leqslant [\lambda_1^2 + (\lambda_2 + 2)^2](\sin^2 x + \cos^2 x)$$

其中"="成立的充要条件是

$$\frac{\sin x}{\lambda_1} = \frac{\cos x}{\lambda_2 + 2}$$

又由 ④ 得

$$\lambda_1^2 = \lambda_2(\lambda_2 + 2) \quad ⑥$$

由 ⑤,⑥ 得

$$\lambda_2^3 - 2\lambda_2^2 - 6\lambda_2 + 6 = 0(\lambda_2 > 2)$$

引理 3 已求出了 λ_2 的值,再由 ⑥ 可求出 λ_1 的值(4.154 413 52…,文献[1]得到的 $\lambda_1 = 4.154\ 405\cdots$ 有误).

从而可得:

定理 1 当且仅当 $\cos x = \frac{1}{\lambda_2 - 2}$($\lambda_2$ 见引理 3,x 为第一象限的角)时,$f(x)$ 取得最大值$\frac{2}{27\lambda_1\lambda_2}[\sqrt{2(\lambda_2+1)(\lambda_2+2)}+1]^3 = 2.499\ 607\cdots$(文献[1]得到的 2.499 501… 有误)(λ_1 由式 ⑥ 确定).

顺便指出,上述解法来源于文献[1],但文献[1]中的过程可以简化,实际上文献[1]中的方程

$$\lambda_2^6 - 4\lambda_2^5 - 8\lambda_2^4 + 36\lambda_2^3 + 12\lambda_2^2 - 72\lambda_2 + 36 = 0$$

即
$$(\lambda_2^3 - 2\lambda_2^2 - 6\lambda_2 + 6)^2 = 0$$

因而可简化为

$$\lambda_2^3 - 2\lambda_2^2 - 6\lambda_2 + 6 = 0$$

另外,文献[1]的式 ④ 有印刷错误.

2 非初等解法

由 ①,得

$f'(x) = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x = 12\cos^3 x + 4\cos^2 x - 8\cos x - 2$

令$f'(x) = 0$,又令 $a = 2\cos x$(由第 1 节的讨论知,若 $f(x)$ 取最大值,则 $a > 0$),得

$$3a^3 + 2a^2 - 8a - 4 = 0(a > 0)$$

引理 2 已求出了 a 的值,由求函数最值的导数方法,得:

定理 2 当且仅当 $\cos x = \frac{a}{2}$(a 的值见引理 2,x 为第一象限的角)时,$f(x)$ 取得最大值.

参考文献

[1] 杨志明,张晓华.最大值到底是几?[J].中学数学,2001(7):33.
[2] 张远达.浅谈高次方程[M].武汉:湖北教育出版社,1983:33-37.

一个最值问题的初等解决

文献[1]为了证明

定理 在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\left|\frac{\sin A}{\sin A+\sin B}+\frac{\sin B}{\sin B+\sin C}+\frac{\sin C}{\sin C+\sin A}-\frac{3}{2}\right|<\frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{6}$$

且右端的常数是最佳的.

用高等数学的方法求出了函数 $\omega(k)=9k+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}(k>0)$ 的最小值:当且仅当 $k=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3}{6}$ 时,$\omega(k)$ 取到最小值 $\frac{5\sqrt{5}+8\sqrt{2}-9}{2}$ ①

本文仅用二元均值不等式求出 $\omega(k)$ 的最小值:设 $a,b,k\in\mathbf{R}^+$,得 $ak+\frac{1}{k}\geqslant 2\sqrt{a}$(当且仅当 $a=\frac{1}{k^2}$ 时取等号),$b(k+1)+\frac{1}{k+1}\geqslant 2\sqrt{b}$(当且仅当 $b=\frac{1}{(k+1)^2}$ 时取等号),可得

$(a+b)k+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\geqslant 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-b$(当且仅当 $a=\frac{1}{k^2}$ 且 $b=\frac{1}{(k+1)^2}$ 时取等号) ②

把②与所求问题相比较,令

$$a+b=9,a=\frac{1}{k^2},b=\frac{1}{(k+1)^2} \quad ③$$

得

$$\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=9$$

又令 $k=t-\frac{1}{2}$(由 $k>0$,得 $t>\frac{1}{2}$),得

$$144t^4-104t^2+1=0$$

$$t^2=\frac{13\pm 4\sqrt{10}}{36}$$

由 $t>\frac{1}{2}$,得

$$t=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{6},k=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3}{6}$$

又由 ③,得

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

$$b=\left(\frac{1}{k+1}\right)^2=\frac{9-4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2}$$

$$2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-b=\frac{5\sqrt{5}+8\sqrt{2}-9}{2}$$

再由 ②,③ 可得 ① 成立.

用本文介绍的方法,还可求出函数 $y=ax+\frac{b}{x}+\frac{b}{x+h}(x\in\mathbf{R}^+,a,b,h>0)$ 的最小值.

以下问题,笔者认为难度不小.

如何用初等方法求出函数 $y=ax+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+h}(x\in\mathbf{R}^+,a,b,c,h>0,b\neq c)$ 的最小值.

定理　当且仅当 $x=\sqrt{h^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{4ah^2+1}}-h$ 时,函数 $y=ax+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2h}(x\in\mathbf{R}^+,a>0,h>0)$ 取得最小值.

参考文献

[1] 沈先武.一个三角不等式确界的确定[J].中学数学,2001(10):47-48.

一个三角不等式的再推广

1 一个三角不等式及其推广

文献[1]介绍了如下不等式：

在 $\triangle ABC$ 中，有

$$\cos^2 A+\cos B+\cos C>\frac{3}{4} \quad ①$$

文献[2]的定理1，2推广了①，但文献[2]有一些印刷错误及推理上的疏漏，文献[2]的定理2不正确.

文献[2]的定理1证明的第四行"$=\lambda+\cos^n A+\lambda\cos A$"应改为"$=\lambda+\cos^n A-\lambda\cos A$".

文献[2]的定理2证明的第四行中"$(\cos^2 A)^n=1$"应改为"$(\cos^2 A)^n=\lambda_1$"；第七行(即该页最后一行)中的"$>$"应改为"$=$".

文献[2]的定理1中还应添上条件 $n>1$，因为 $n=1$ 时"$\sqrt[n-1]{n^{n-2}\lambda}$"无意义，并且当 $n=1,\lambda\geqslant 1$ 时定理1[2]不能理解为以下不等式

$$\cos A+\lambda(\cos B+\cos C)>\lambda \quad ②$$

因为此不等式不恒成立，反例：$A=\frac{\pi}{3},B\to\frac{2}{3}\pi,c\to 0,\lambda=2$.

而文献[2]的式⑨，即：

在 $\triangle ABC$ 中，当 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 时，有

$$\cos^2\frac{A}{2}+\lambda(\cos B+\cos C)>1 \quad ③$$

文献[2]是在式②中用 2λ 换 λ 得到的(文献[2]的定理2上面第三行"当 $n=2$，并用 2λ 换 λ，…"有印刷错误，原文的意思是"当 $n=1$，并用…")，显然是推理错误. 极易直接证明③成立.

文献[2]的定理2的证明中三处"$-(n-1)\lambda_1$"(第44页左栏倒数第五、六、八行)均应改为"$-(n-1)\lambda\lambda_1$"，因而定理2[2]的结论及证明均有误.

可把文献[2]的定理1推广为下文的定理1(2)，文献[2]的定理2修正并推广为下文的定理2.

2 引理

引理 1[3] 若 $0 \leqslant x \leqslant (\frac{l}{n})^{\frac{1}{s}}, a, r, l, n, s, p \in \mathbf{R}^+, \frac{r}{sp} \in \mathbf{Q}$,则 $ax^r(l - nx^s)^p \leqslant a\left(\frac{lsp}{r+sp}\right)^p\left(\frac{rs}{nr+nsp}\right)^{\frac{r}{s}}$(当且仅当 $x = \left(\frac{rl}{nr+nsp}\right)^{\frac{1}{s}}$ 时取等号).(见本书的文章"谈谈加权平均值不等式")

引理 2 若 $x^r, (l - nx^s)^p$ 至少有一个非负, $a, r, l, n, s, p \in \mathbf{R}^+, \frac{r}{sp} \in \mathbf{Q}$,则 $ax^r(l - nx^s)^p \leqslant a\left(\frac{lsp}{r+sp}\right)^p\left(\frac{rl}{nr+nsp}\right)^{\frac{r}{s}}$(当且仅当 $x = \left(\frac{rl}{nr+nsp}\right)^{\frac{1}{s}}$ 时取等号).

注 把引理 1,2 中的"$a \in \mathbf{R}^+$"改为"$a \in \mathbf{R}^-$",同时把"$\geqslant$"改为"$\leqslant$",所得结论也成立.

猜想 1 当 $\frac{r}{sp} \in \mathbf{R}$ 时,引理 1 也成立.

引理 3 若 $t, \lambda - t^{n-1}$ 至少有一个是非负数, $n > 1, t \in \mathbf{R}, \lambda \in \mathbf{R}^+$,则 $t(\lambda - t^{n-1}) \leqslant (n-1)(\frac{\lambda}{n})^{\frac{n}{n-1}}$(当且仅当 $t = (\frac{\lambda}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 时取等号).

证明 (用加权平均值不等式)只证 $t, \lambda - t^{n-1} \in \mathbf{R}^+$ 的情形.

$$t^{n-1}(\lambda - t^{n-1})^{n-1} = \frac{1}{n-1}\cdot(n-1)t^{n-1}(\lambda - t^{n-1})^{n-1} \leqslant$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\frac{(n-1)t^{n-1} + (n-1)(\lambda - t^{n-1})}{1+(n-1)}\right]^{1+(n-1)}$$(当且仅当 $(n-1)t^{n-1} = \lambda - t^{n-1}$ 即 $t = (\frac{\lambda}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 时取等号) $= (n-1)^{n-1}(\frac{\lambda}{n})^n$

3 一个三角不等式的再推广

定理 1 在 $\triangle ABC$ 中,若 $n > 1, n \in \mathbf{Q}$,则:

(1) $\lambda\cos A + (\cos B + \cos C)^n > \lambda - (n-1)(\frac{\lambda}{n})^{\frac{n}{n-1}}(\lambda > 0)$;

(2) $\cos^n A + \lambda(\cos B + \cos C) > \lambda - (n-1)(\frac{\lambda}{n})^{\frac{n}{n-1}}(\lambda \geqslant 1)$.

证明 (1) $\lambda\cos A + (\cos B + \cos C)^n = \lambda\cos A + \left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^n >$

$\lambda\cos A + \left(2\sin^2\frac{A}{2}\right)^n$(当且仅当 $BC \to 0$ 时 $\cos\frac{B-C}{2} \to \sin\frac{A}{2}$) $= \lambda\cos A + (1 -$

$\cos A)^n$(设 $t = 1 - \cos A$,得 $0 < t < 2$) $=$

$\lambda - t(\lambda - t^{n-1})$(下用引理 3) $\geqslant$

$\lambda - (n-1)(\frac{\lambda}{n})^{\frac{n}{n-1}}$(当且仅当 $t = (\frac{\lambda}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 即 $\cos A =$

$1 - (\frac{\lambda}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 时取等号)

(2) $\cos^n A + \lambda(\cos B + \cos C) = \cos^n A + \lambda(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}) >$

$\cos^n A + \lambda(2\sin^2\frac{A}{2})$(当且仅当 $BC \to 0$ 时

$\cos\frac{B-C}{2} \to \sin\frac{A}{2}$) $=$

$\lambda - \cos A(\lambda - \cos^{n-1}A)$(下用引理 3) $\geqslant$

$\lambda - (n-1)(\frac{\lambda}{n})^{\frac{n}{n-1}}$(当且仅当 $\cos A =$

$(\frac{\lambda}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 时取等号)

注　(1) 当且仅当 $BC \to 0$ 且 $\cos A = 1 - (\frac{\lambda}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 时,式 ① 的左边 → 右边.

(2) 当 $A \in (0, \frac{\pi}{2}]$,$\lambda > 0$ 时,结论(2) 也成立.

(3) 当且仅当 $BC \to 0$ 且 $\cos A = (\frac{\lambda}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 时,式 ② 的左边 → 右边.

定理 2　在 $\triangle ABC$ 中,若 $\lambda > 0, n \in \mathbf{N}^*$,则 $\lambda\cos^{2n}A + \cos B + \cos C > 1 - \frac{2n-1}{2n}(2n\lambda)^{\frac{1}{1-2n}}$.

证明　设 $\lambda_1 > 0$,得

$\cos^{2n}A + (n-1)\lambda_1 \geqslant n \cdot \sqrt[n]{\lambda_1^{n-1}}\cos^2 A$

$\cos^{2n}A \geqslant n\sqrt[n]{\lambda_1^{n-1}}\cos^2 A - (n-1)\lambda_1$(当且仅当 $\cos^{2n}A = \lambda_1$ 时取等号)

$\lambda\cos^{2n}A + \cos B + \cos C > \lambda[n\sqrt[n]{\lambda_1^{n-1}}\cos^2 A - (n-1)\lambda_1] + (1 - \cos A) =$

$1 - (n-1)\lambda\lambda_1 + n\lambda\sqrt[n]{\lambda_1^{n-1}}(\cos A - \frac{1}{2n\lambda\sqrt[n]{\lambda_1^{n-1}}})^2 - \frac{1}{4n\lambda\sqrt[n]{\lambda_1^{n-1}}} \geqslant$

$1 - (n-1)\lambda\lambda_1 - \frac{1}{4n\lambda\sqrt[n]{\lambda_1^{n-1}}}$(当且仅当 $\cos A = \frac{1}{2n\lambda\sqrt[n]{\lambda_1^{n-1}}}$ 时取等号)

令 $\left(\frac{1}{2n\lambda\sqrt[n]{\lambda_1^{n-1}}}\right)^{2n} = \lambda_1$,得 $\lambda_1 = (2n\lambda)^{\frac{2n}{1-2n}}$.

从而可得定理 2 成立.

注　当且仅当 $BC\to 0$ 且 $\cos A=(2n\lambda)^{\frac{1}{1-2n}}$ 时,定理2中不等式的左边 $\to$ 右边.

定理1(2)与定理2的证法不同,但这两个结论有相同之处.

可把定理2等价变形为:

定理2′　在 $\triangle ABC$ 中,若 $\lambda>0$,n 为正偶数,则

$$\cos^n A+\lambda(\cos B+\cos C)>\lambda-(n-1)\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

定理2′与定理1(2)在"形式"上相同,因而笔者提出:

猜想2　在 $\triangle ABC$ 中,若 $\lambda>0,n>1,n\in\mathbf{Q}$,则

$$\cos^n A+\lambda(\cos B+\cos C)>\lambda-(n-1)\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

读者也可仿照定理2的证明证得定理1(1)在 $n\in\mathbf{N}^*$ 时成立.

问题1　对于 $\triangle ABC$,确定式子

$$\lambda\cos^n A+(\cos B+\cos C)^m(\lambda,m,n\in\mathbf{R}^+)\qquad ④$$

的上确界 $F(\lambda,n,m)$ 及下确界 $f(\lambda,n,m)$.

显然,当 n 为偶数时,$F(\lambda,n,m)=\lambda+2^m$(当且仅当 $B\to 0^+$ 且 $C\to 0^+$ 时,式④的值 $\to\lambda+2^m$).

4　另几个结论

定理3　在 $\triangle ABC$ 中:

(1)若 $0<\lambda<\frac{1}{2}$,则 $\lambda\cos A+\cos B+\cos C<2-\lambda$(当且仅当 $B=C\to 0^+$ 时,左边 $\to$ 右边);

(2)若 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$,则 $\lambda\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\lambda+\frac{1}{2\lambda}$(当且仅当 $B=C=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{2\lambda}$ 时取等号).

证明　$\lambda\cos A+\cos B+\cos C=\lambda\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\leqslant$

$-2\lambda\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}+\lambda$(当且仅当 $B=C$ 时取等号)$=$

$-2\lambda\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\lambda+\frac{1}{2\lambda}$

(1)因为 $0<\lambda<\frac{1}{2}$,所以 $\frac{1}{2\lambda}>1$.

又 $0<A<\pi$,所以

$$0<\sin\frac{A}{2}<1$$

$$0 < \frac{1}{2\lambda} - 1 < \frac{1}{2\lambda} - \sin\frac{A}{2} < \frac{1}{2\lambda}$$

$$(\frac{1}{2\lambda} - 1)^2 < (\frac{1}{2\lambda} - \sin\frac{A}{2})^2 < (\frac{1}{2\lambda})^2$$

$$-2\lambda(\frac{1}{2\lambda})^2 < -2\lambda(\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2\lambda})^2 < -2\lambda(\frac{1}{2\lambda} - 1)^2$$

从而有结论(1)成立.

(2)显然成立.

定理4 在 $\triangle ABC$ 中:

(1)若 $\lambda \leqslant 1$,则 $\lambda\cos A + \cos B + \cos C > \lambda$;

(2)若 $\lambda > 1$,则 $\lambda\cos A + \cos B + \cos C > 2 - \lambda$.

证明 由下式可证(1),(2)成立

$$\lambda\cos A + \cos B + \cos C > \lambda\cos A + 2\sin^2\frac{A}{2} = \lambda - 2\lambda\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin^2\frac{A}{2} =$$

$$(2 - 2\lambda)\sin^2\frac{A}{2} + \lambda$$

问题2 在 $\triangle ABC$ 中,求 $\lambda\sin^n A + (\sin B + \sin C)^m(\lambda, n, m \in \mathbf{R}^+)$ 的上确界(显然下确界为0).

参考文献

[1] 宋庆.一类有趣的三角不等式[J].中学数学,1999(6):43-44.

[2] 杨志明.一个三角不等式的推广及应用[J].中学数学,2002(1):43-44.

用函数的单调性统一一类不等式

文献[1]的定理2给出了如下一组不等式：

若 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，则

$$ab+\frac{1}{ab}\geqslant 4\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\frac{1}{2}$$

$$a^2b^2+\frac{1}{a^2b^2}\geqslant 16\frac{1}{16}$$

$$a^3b^3+\frac{1}{a^3b^3}\geqslant 64\frac{1}{64}$$

笔者发现它们有统一的形式，因而可以推广.

引理　函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上严格递减，在 $[1,+\infty)$ 上严格递增.（由增、减函数的定义可证）

定理1　若 $a,b,n\in\mathbf{R}^+$，$a+b\leqslant 2$，则 $(ab)^n+(ab)^{-n}\geqslant(\frac{a+b}{2})^{2n}+(\frac{a+b}{2})^{-2n}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

证明　由题设及均值不等式，得

$$0<\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant 1\text{（当且仅当 } a=b \text{ 时第一个“}\leqslant\text{”中取“}=\text{”）}$$

所以

$$0<(\sqrt{ab})^{2n}\leqslant(\frac{a+b}{2})^{2n}\leqslant 1$$

又由引理，得

$$(ab)^n+(ab)^{-n}\geqslant(\frac{a+b}{2})^{2n}+(\frac{a+b}{2})^{-2n}\text{（当且仅当}(\sqrt{ab})^{2n}=(\frac{a+b}{2})^{2n}\text{ 时取等号）}$$

所以定理1成立.

在定理1中选 $a+b=1$，$n=1,\frac{1}{2},2,3$，立得文献[1]的定理2.同定理1的证明还可证得：

定理 2 若 $a,b,n\in\mathbf{R}^{+},ab\geqslant 1$，则$(ab)^{n}+(ab)^{-n}\leqslant(\frac{a+b}{2})^{2n}+(\frac{a+b}{2})^{-2n}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号).

定理 3 若 $a_1,a_2,\cdots,a_k,n\in\mathbf{R}^{+},k\geqslant 2,\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\leqslant k$，则$(a_1a_2\cdots a_k)^{n}+(a_1a_2\cdots a_k)^{-n}\geqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}{k}\right)^{kn}+\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}{k}\right)^{-kn}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k$ 时取等号).

定理 4 若 $a_1,a_2,\cdots,a_k,n\in\mathbf{R}^{+},k\geqslant 2,a_1a_2\cdots a_k\geqslant 1$，则$(a_1a_2\cdots a_k)^{n}+(a_1a_2\cdots a_k)^{-n}\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}{k}\right)^{kn}+\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}{k}\right)^{-kn}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k$ 时取等号).

例 已知 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$，且 $a+b=1$，求证

$$\sqrt{ab+\frac{1}{64a^2b^2}}+2\sqrt{a^2b^2+\frac{1}{64ab}}\geqslant\sqrt{2}$$

证明 设 $a=\frac{a'}{2},b=\frac{b'}{2}$，得 $a',b'\in\mathbf{R}^{+},a'+b'=2$，只需证明

$$\left(\sqrt{a'b'+\frac{1}{a'^2b'^2}}+\sqrt{a'^2b'^2+\frac{1}{a'b'}}\right)^2\geqslant(2\sqrt{2})^2 \qquad ①$$

① 的左边 $=(a'b'+\frac{1}{a'b'})+(a'^2b'^2+\frac{1}{a'^2b'^2})+\sqrt{a'^3b'^3+\frac{1}{a'^3b'^3}+2}\geqslant$

$$2+2+2\sqrt{2+2}=(2\sqrt{2})^2=\text{① 的右边}$$

所以欲证结论成立.

参考文献

[1] 康健伟,孙建斌.一个条件不等式的应用与推广[J].数学通讯,2001(7):29-30.

对一个不等式的再研究

定理 1[1] 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}(n\geqslant 2)$，$m_1,m_2,\cdots,m_k\in\mathbf{N}^*(k\geqslant 2)$，$2\mid\sum_{j=1}^{k}m_j$，则 $\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_j^{m_i}\leqslant n^{k-1}\sum_{j=1}^{n}a_j^{\sum_{i=1}^{k}m_i}$（当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号）.

本文对上述不等式再作研究.

引理 1 （Cauchy 不等式）设 $a_i,b_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2$，当且仅当存在常数 k 使得 $a_i=kb_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均成立或 $b_1=\cdots=b_n=0$ 时取等号.

引理 2[2] 设 $f(x)$ 是定义在区间 Ⅰ 上的初等函数，若对于任意的 $x_1,x_2\in$ Ⅰ，$x_1\neq x_2$，总有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\frac{x_1+x_2}{2})$，则 $f(x)$ 是下凸函数.

引理 3 设 $f(x)=\ln\sum_{j=1}^{n}a_j^x$（$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是不全相等的正常数，$n\geqslant 2$，$x\in\mathbf{R}$），则 $f(x)$ 是下凸函数.

证明 对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1\neq x_2$，有

$$f(x_1)+f(x_2)=\ln\sum_{j=1}^{n}a_j^{x_1}+\ln\sum_{j=1}^{n}a_j^{x_2}=\ln[\sum_{j=1}^{n}(a_j^{\frac{x_1}{2}})^2\cdot\sum_{j=1}^{n}(a_j^{\frac{x_2}{2}})^2]>$$

$$\ln(\sum_{j=1}^{n}a_j^{\frac{x_1+x_2}{2}})^2\text{(引理 1)}=2f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

所以由引理 2 知，$f(x)$ 是下凸函数.

引理 4[2] 若 $f(x)$ 是区间 Ⅰ 上的下凸函数，则对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in$ Ⅰ，有 $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}f(x_i)\geqslant f(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i)$（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_k$ 时取等号）.

定理 2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+(n\geqslant 2)$，$m_1,m_2,\cdots,m_k\in\mathbf{R}(k\geqslant 2)$，则 $\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_j^{m_i}\geqslant(\sum_{j=1}^{n}a_j^{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}m_i})^k$（当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号）.

证明 当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，可得

$$\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_j^{m_i}=\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}m_i}\right)^k=n^k a_1^{\sum_{j=1}^{k}m_i}$$

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等时,由引理 3,4 可得

$$\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_j^{m_i}>\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}m_i}\right)^k$$

所以定理 2 成立.

由定理 1,2 还可得:

推论 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+(n\geqslant 2),m_1,\cdots,m_k\in\mathbf{N}^*(k\geqslant 2),2\mid\sum_{j=1}^{k}m_j$,则$\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}m_i}\right)^k\leqslant\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_j^{m_i}\leqslant n^{k-1}\sum_{j=1}^{n}a_j^{\sum_{i=1}^{k}m_i}$(两个"$\leqslant$"中均当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

参考文献

[1] 邱贤忠.一个不等式命题[J].数学通报,1991(1):31-32.

[2] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993:84-86.

一个代数不等式的推广

文献[1] 证出了下面的代数不等式：

若 $a,b,c\in(0,1]$，$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$，则

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+b}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+c}}\leqslant\frac{3}{\sqrt[n]{1+\sqrt[3]{abc}}}$$

本文将把它推广为如下定理 1，2.

定理 1　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in[0,1]$，则：

(1) 当 $-1\leqslant p<0$ 时，$n(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)^p\leqslant\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)^p\leqslant n(1+\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n})^p$（两个等号均当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$ 时取得）；

(2) 当 $p>0$ 时，$\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)^p\geqslant n(1+\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n})^p$（当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$ 时取等号）.

定理 2　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in[1,+\infty)$，$p\leqslant-1$，则 $\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)^p\geqslant n(1+\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n})^p$（当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$ 时取得）.

为证明定理 1，2，先给出：

Jensen 不等式[2]　若 $f(x)$ 为区间 I 上的上（下）凸函数，则对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in$ I，有 $f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)\geqslant(\leqslant)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号）.

引理 1　设 $x,y\in[0,+\infty)$，有：

(1) 若 $n<0$ 或 $n>1$，则 $\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant(\frac{x+y}{2})^n$（当且仅当 $x=y$ 时取等号）；

(2) 若 $0<n<1$，则 $\frac{x^n+y^n}{2}\leqslant(\frac{x+y}{2})^n$（当且仅当 $x=y$ 时取等号）.

证明　设 $f(x)=x^n$，得

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$$

再由 Jensen 不等式，可得引理 1 成立.

引理2 若 $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$,$\alpha\beta\leqslant 1$,则 $\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}\leqslant\frac{2}{1+\sqrt{\alpha\beta}}$(当且仅当 $\alpha=\beta$ 或 $\alpha\beta=1$ 时取等号).

证明
$$\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}=1+\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}\leqslant$$
$$1+\frac{1-\alpha\beta}{1+2\sqrt{\alpha\beta}+\alpha\beta}=\frac{2}{1+\sqrt{\alpha\beta}}$$

引理3 若 $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$,$\alpha\beta\leqslant 1$,则:

(1) 当 $-1<p<0$ 时,$(1+\alpha)^p+(1+\beta)^p\leqslant 2(1+\sqrt{\alpha\beta})^p$(当且仅当 $\alpha=\beta$ 时取等号);

(2) 当 $p>0$ 时,$(1+\alpha)^p+(1+\beta)^p\geqslant 2(1+\sqrt{\alpha\beta})^p$(当且仅当 $\alpha=\beta$ 时取等号).

证明 在引理1(1)中令 $x=(1+\alpha)^p,y=(1+\beta)^p,n=-\frac{1}{p}(-1<p<0$ 或 $p>0)$,得
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}\right)\geqslant\left\{\frac{1}{2}[(1+\alpha)^p+(1+\beta)^p]\right\}^{-\frac{1}{p}}\text{(当且仅当 }\alpha=\beta\text{ 时取等号)} \qquad ①$$

(1) 当 $-1<p<0$ 时,$-p>0$,将式①两边 $-p$ 次方,得
$$(1+\alpha)^p+(1+\beta)^p\leqslant 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}\right)\right]^{-p}\text{(当且仅当 }\alpha=\beta\text{ 时取等号)}$$

再由引理2,可得此时要证结论成立.

(2) 当 $p>0$ 时,$-p<0$,将式①两边 $-p$ 次方,得
$$(1+\alpha)^p+(1+\beta)^p\geqslant 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}\right)\right]^{-p}\text{(当且仅当 }\alpha=\beta\text{ 时取等号)}$$

再由引理2,得此时要证结论也成立.

引理4 若 $\alpha,\beta\in[1,+\infty)$,$p\leqslant -1$,则 $(1+\alpha)^p+(1+\beta)^p\geqslant 2(1+\sqrt{\alpha\beta})^p$(当且仅当 $\alpha=\beta$ 时取等号).

证明 同引理2的证明可得 $p=-1$ 时成立,下证 $p<-1$ 时成立.

在引理1(2)中令 $x=(1+\alpha)^p,y=(1+\beta)^p,n=-\frac{1}{p}(p<-1)$,得
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}\right)\leqslant\left\{\frac{1}{2}[(1+\alpha)^p+(1+\beta)^p]\right\}^{-\frac{1}{p}}\text{(当且仅当 }\alpha=\beta\text{ 时取等号)} \qquad ②$$

因为 $p<-1$,所以 $-p>0$,将式②两边 $-p$ 次方,得
$$(1+\alpha)^p+(1+\beta)^p\geqslant 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}\right)\right]^{-p}\text{(当且仅当 }\alpha=\beta\text{ 时取等号)}$$

再由 $p=-1$ 时的结论成立，可得 $p<-1$ 时的结论也成立.

定理 1 的证明　(1) 设 $f(x)=(1+x)^p$，得 $f''(x)=p(p-1)(1+x)^{p-2}$，再由 Jensen 不等式，得当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in[-1,+\infty)$，$p>1$ 或 $p<0$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)^p\geqslant n\left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^p(\text{当且仅当 }\alpha_1=\cdots=\alpha_n\text{ 时取等号})\quad ③$$

由 ③ 可得结论(1) 左边的不等式成立.

下面用数学归纳法证明：

当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in[0,1]$，$-1\leqslant p<0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)^p\leqslant n(1+\sqrt[n]{\alpha_1\cdots\alpha_n})^p$(当且仅当 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n$ 时取等号).

由引理 2 及引理 3(1) 知 $n=2$ 时成立.

假设 $n<k$ 时成立，下证 $n=k$ 时成立.

① 当 $k=2m(m\in\mathbf{N}^*)$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)^p&=\sum_{i=1}^{m}(1+\alpha_i)^p+\sum_{i=m+1}^{2m}(1+\alpha_i)^p\leqslant m[(1+\sqrt[m]{\alpha_1\cdots\alpha_m})^p+\\&\quad(1+\sqrt[m]{\alpha_{m+1}\cdots\alpha_{2m}})^p]\leqslant 2m\left(1+\sqrt{\sqrt[m]{\alpha_1\cdots\alpha_{2m}}}\right)^p=\\&\quad k(1+\sqrt[k]{\alpha_1\cdots\alpha_k})^p\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)^p\leqslant k(1+\sqrt[k]{\alpha_1\cdots\alpha_k})^p$，其中“=”成立的充要条件是

$$\begin{cases}\alpha_1=\cdots=\alpha_m\\\alpha_{m+1}=\cdots=\alpha_{2m}\\\sqrt[m]{\alpha_1\cdots\alpha_m}=\sqrt[m]{\alpha_{m+1}\cdots\alpha_{2m}}\end{cases}$$

即

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_k$$

② 当 $k=2m-1(m\in\mathbf{N}^*,m\geqslant 2)$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)^p+(1+\sqrt[k]{\alpha_1\cdots\alpha_k})^p&=\sum_{i=1}^{m}(1+\alpha_i)^p+\left[\sum_{i=m+1}^{2m-1}(1+\alpha_i)^p+\right.\\&\quad\left.(1+\sqrt[2m-1]{\alpha_1\cdots\alpha_{2m-1}})^p\right]\leqslant m[(1+\sqrt[m]{\alpha_1\cdots\alpha_m})^p+\\&\quad(1+\sqrt[m]{\alpha_{m+1}\cdots\alpha_{2m-1}\sqrt[2m-1]{\alpha_1\cdots\alpha_{2m-1}}})^p]\leqslant\\&\quad 2m\left(1+\sqrt{\sqrt[m]{\alpha_1\cdots\alpha_{2m-1}\sqrt[2m-1]{\alpha_1\cdots\alpha_{2m-1}}}}\right)^p=\\&\quad(k+1)(1+\sqrt[k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k})^p\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)^p\leqslant k(1+\sqrt[k]{\alpha_1\cdots\alpha_k})^p$，可得其中“=”成立的充要条件是 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k$.

所以结论(1) 成立.

(2) 由定理 3(2) 并对 n 用数学归纳法同上可证.

定理 2 的证明 由引理 4 并对 n 用数学归纳法同上可证.

再给出定理 1,2 的注记.

(1) 由定理 1(1) 还可得均值不等式的一种加细:

若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in [0,1]$, $-1 \leqslant p < 0$,则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \geqslant n^{-\frac{1}{p}}[\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)^p]^{\frac{1}{p}} - 1 \geqslant \sqrt[n]{\alpha_1\cdots\alpha_n}$(两个等号均当且仅当 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$ 时取得).

(2) 由 ③ 及均值不等式可得:

当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in [0,1]$,$p > 1$ 时,③ 比定理 1(2) 中相应的结论要强;

当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in [1,+\infty)$,$p \leqslant -1$ 时,③ 比定理 2 要弱.

(3) 同定理 1(1) 中的数学归纳法证明,还可仅用二元均值不等式证出 n 元均值不等式.

参考文献

[1] 宋庆.两个代数不等式[J].数学通讯,2003(15):33.

[2] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993:85.

对一个不等式的思考

文献[1]末得到了一个有意义的不等式：

定理1　若 a,b,c,d 是非负实数，$a+b=c+d$，$|a-b|<|c-d|$，则$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

本文得到：

定理2　若 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$a+b=c+d$，$|a-b|<|c-d|$，则 $a^2+b^2<c^2+d^2$.

证明　可得$(a+b)^2-|a-b|^2>(c+d)^2-|c-d|^2$，即 $ab>cd$.

所以$(a+b)^2-2ab<(c+d)^2-2cd$，即 $a^2+b^2<c^2+d^2$.

定理3　(1)若 a,b,c,d 是非负实数，$a+b=c+d$，$|a-b|<|c-d|$，则$a^3+b^3<c^3+d^3$；

(2)若 a,b,c,d 是非正实数，$a+b=c+d$，$|a-b|<|c-d|$，则 $a^3+b^3>c^3+d^3$.

证明　(1)上面已证得 $ab>cd$，又 $a+b=c+d>0$(因为 $c\neq d$)，所以

$$ab(a+b)>cd(c+d)$$

$$(a+b)^3-3ab(a+b)<(c+d)^3-3cd(c+d)$$

即

$$a^3+b^3<c^3+d^3$$

(2)同上可证.

定理4　若 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+(\mathbf{R}^-)$，$a+b=c+d$，$|a-b|<|c-d|$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<(>)\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

证明　可证得 $ab>cd>0$，所以

$$\frac{1}{ab}<\frac{1}{cd},\frac{a+b}{ab}<(>)\frac{c+d}{cd}$$

即

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<(>)\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

定理5　设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+(\mathbf{R}^-)$，$a+b=c+d$，$|a-b|<|c-d|$，则$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}<\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$.

证明 上面已证得$\frac{1}{ab} < \frac{1}{cd}$,所以

$$\frac{1}{(ab)^2} < \frac{1}{(cd)^2}$$

又由定理 2,得

$$\frac{a^2 + b^2}{(ab)^2} < \frac{c^2 + d^2}{(cd)^2}$$

即

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$$

定理 6 若 $a,b,c,d \in \mathbf{R}^+$ $(\mathbf{R}^-)$, $a + b = c + d$, $|a - b| < |c - d|$,则$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} < (>) \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$.

证明 用定理 3 同定理 5 可证.

猜想 1 若 $a,b,c,d \in \mathbf{R}^+$, $a + b = c + d$, $|a - b| < |c - d|$, $n < 0$ 或 $n > 1$ $(0 < n < 1)$,则 $a^n + b^n < (>) c^n + d^n$.

猜想 2 若 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 上是上(下)凸函数, $a,b,c,d \in$ Ⅰ, $a + b = c + d$, $|a - b| < |c - d|$,则 $f(a) + f(b) > (<) f(c) + f(d)$.

可在猜想 2 中不妨设 $c \geqslant b \geqslant a \geqslant d$(且 $c \neq d$),得猜想 2 等价于:

猜想 2′ 若 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 上是上(下)凸函数, $a,b,c,a + b - c \in$ Ⅰ,则 $f(a) + f(b) > (<) f(c) + f(a + b - c)$.

参考文献

[1] 安振平.课本无理不等式的巧证及推广[J].数学通讯,2003(18):12.

一个定理的再推广及产生的新问题

文献[1]把文献[2]的定理2推广为如下定理.

定理1[1]　若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$ $(n\geqslant 2)$,则:

(1) 当 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant n$ 时,$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}$;

(2) 当 $a_1a_2\cdots a_n\geqslant 1$ 时,$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}$.

(文献[1]中的"推广"有印刷错误,文献[1]最后一个不等式中的"$\leqslant$"应改为"$\geqslant$".

文献[1]末说"若用作差比较法证明很麻烦",事实上,既然能用作差比较法证出 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的单调性,那就一定也能用作差比较法证得文献[1]的"推广".)

还可将定理1[1]推广为:

定理2　若 $\alpha\in\mathbf{R}^*$,$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$ $(n\geqslant 2)$,则:

(1) 当 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant n$ 时,$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^{\alpha n}+\left(\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\right)^{\alpha n}\leqslant(a_1\cdots a_n)^\alpha+\frac{1}{(a_1\cdots a_n)^\alpha}$(当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时取等号);

(2) 当 $a_1a_2\cdots a_n\geqslant 1$ 时,$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^{\alpha n}+\left(\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\right)^{\alpha n}\geqslant(a_1\cdots a_n)^\alpha+\frac{1}{(a_1\cdots a_n)^\alpha}$(当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时取等号).

证明　可证"函数 $g(x)=x^\alpha+x^{-\alpha}$ 在 $(0,1]$ 上递减,在 $[1,+\infty)$ 上递增",再运用平均值不等式

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\text{(当且仅当 }a_1=\cdots=a_n\text{ 时取等号)}$$

即可证出定理 2[1].

在定理 2 中令 $\alpha = \frac{1}{n}$,即得定理 1[1].

推论 若 $\alpha \in \mathbf{R}^*, a, b \in \mathbf{R}^+$,则:

(1) 当 $a + b \leqslant 2$ 时,$(\frac{a+b}{2})^{2\alpha} + (\frac{2}{a+b})^{2\alpha} \leqslant (ab)^\alpha + \frac{1}{(ab)^\alpha}$(当且仅当 $a = b$ 时取等号);

(2) 当 $ab \geqslant 1$ 时,$(\frac{a+b}{2})^{2\alpha} + (\frac{2}{a+b})^{2\alpha} \geqslant (ab)^\alpha + \frac{1}{(ab)^\alpha}$(当且仅当 $a = b$ 时取等号).

在推论(1) 中又令 $a + b = 1(a, b \in \mathbf{R}^+, \alpha \in \mathbf{R}^*)$,得

$$(ab)^\alpha + (ab)^{-\alpha} \geqslant 4^\alpha + 4^{-\alpha}$$

再令 $\alpha = 1, \frac{1}{2}, 2, 3$,即得文献[3] 的定理 2.

在定理 2(2) 中令 $a_i = a'^{\frac{1}{\alpha n}}_i (\alpha > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$,得:

定理 3 若 $\alpha, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+ \ (n \geqslant 2), a_1 \cdots a_n \geqslant 1$,则

$\left(\frac{a_1^{\frac{1}{\alpha n}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{\alpha n}}}{n}\right)^{\alpha n} + \left(\frac{n}{a_1^{\frac{1}{\alpha n}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{\alpha n}}}\right)^{\alpha n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} + \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$(当且仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时取等号).

比较定理 3 及定理 1(2),便产生了如下问题:设 $\alpha, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+ \ (n \geqslant 2), a_1 \cdots a_n \geqslant 1$, 试比较 $\left(\frac{a_1^{\frac{1}{\alpha n}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{\alpha n}}}{n}\right)^{\alpha n} + \left(\frac{n}{a_1^{\frac{1}{\alpha n}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{\alpha n}}}\right)^{\alpha n}$ 与 $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$ 的大小.

参考文献

[1] 黄言勤.一个定理的别证及推广[J].数学通报,2002(10):44.

[2] 杨克昌.涉及两数平均的一组不等式[J].数学通报,2001(9):34-35.

[3] 康健伟,孙建斌.一个条件不等式的应用与推广[J].数学通讯,2001(7):29-30.

一类不等式的最值问题

文献[1]用三角换元法解决了两个最值问题：

(1) 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$ 时 $\sqrt{x+y}\leqslant a(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ 恒成立，则 $a_{\min}=1$；

(2) 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$ 时 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 恒成立，则 $a_{\min}=\sqrt{2}$.

本文将推广此类最值问题.

定理 1　设 $\alpha<0$，当 $x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$ $(n\geqslant 2)$ 时：

(1) 若 $(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha\leqslant(<)a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\min}=n^{\alpha-1}(a>n^{\alpha-1})$；

(2) 若 $(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha\geqslant(>)a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\max}=0$；

(3) 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha\leqslant(<)a(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha$ 恒成立，则 a 不存在；

(4) 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha\geqslant(>)a(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\max}=n^{1-\alpha}(a<n^{1-\alpha})$.

定理 2　设 $0<\alpha<1$，当 $x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$ $(n\geqslant 2)$ 时：

(1) 若 $(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha\leqslant(<)a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\min}=1$；

(2) 若 $(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha\geqslant(>)a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\max}=n^{\alpha-1}(a<n^{\alpha-1})$；

(3) 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha\leqslant(<)a(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\min}=n^{1-\alpha}(a>n^{1-\alpha})$；

(4) 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha\geqslant(>)a(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\max}=1$.

定理 3　设 $\alpha>1$，当 $x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$ $(n\geqslant 2)$ 时：

(1) 若 $(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha\leqslant(<)a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\min}=n^{\alpha-1}(a>n^{\alpha-1})$；

(2) 若 $(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha\geqslant(>)a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\max}=1$；

(3) 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^\alpha\leqslant(<)a(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^\alpha$ 恒成立，则 $a_{\min}=1$；

(4) 若$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^a \geqslant (>) a(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^a$恒成立,则 $a_{\max} = n^{1-a}(a < n^{1-a})$.

为证明这三个定理,先给出如下引理.

引理 1 设 $t > 0$,则:

(1) 当 $\alpha < 1$ 时,$(t+1)^\alpha < t^\alpha + 1$;

(2) 当 $\alpha > 1$ 时,$(t+1)^\alpha > t^\alpha + 1$.

证明 易知 $\alpha \leqslant 0$ 时引理 1 成立,下证 $\alpha > 0$ 时也成立.

设 $f(\alpha) = (t+1)^\alpha - t^\alpha$,则

$$f'(\alpha) = (t+1)^\alpha \ln(t+1) - t^\alpha \ln t$$

由 $\alpha > 0, t > 0$,可得

$$(t+1)^\alpha > t^\alpha, \ln(t+1) > \ln t, \ln(t+1) > 0$$

所以$(t+1)^\alpha \ln(t+1) > t^\alpha \ln t$,即$f'(\alpha) > 0$,所以$f(\alpha)$在$(0, +\infty)$上是增函数.

从而可得引理 1 成立.

引理 2 设 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^+ (n \geqslant 2)$,则:

(1) 当 $\alpha < 1$ 时,$(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^\alpha < \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha$;

(2) 当 $\alpha > 1$ 时,$(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^\alpha > \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha$.

证明 对 n 用数学归纳法.

(1) 在引理 1(1) 中令 $t = \dfrac{x_1}{x_2}$ 后可证得 $n = 2$ 时成立.

假设 n 时成立,有

$$(\sum_{i=1}^{n+1} x_i)^\alpha = (\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1})^\alpha < (\sum_{i=1}^{n} x_i)^\alpha + x_{n+1}^\alpha (\text{由 } n = 2 \text{ 时成立}) <$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha + x_{n+1}^\alpha (\text{由假设 } n \text{ 时成立}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^\alpha$$

得 $n+1$ 时成立,所以结论(1) 成立.

(2) 同(1) 可证.

引理 3 设 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^+ (n \geqslant 2)$,则:

(1) 当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时,$\dfrac{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^\alpha}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha} \leqslant n^{\alpha-1}$(当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时取等号);

(2) 当$0 < \alpha < 1$时，$\dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^\alpha}{\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha} \geqslant n^{\alpha-1}$(当且仅当$x_1 = \cdots = x_n$时取等号).

证明　设$f(x) = x^\alpha (x > 0)$，则$f''(x) > 0$，$f(x)$是下凸函数.

由 Jensen 不等式[2]，得

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^\alpha \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha}{n} \text{(当且仅当 } x_1 = \cdots = x_n \text{ 时取等号)}$$

从而可得结论(1)成立.

(2) 同(1)可证.

定理 1 的证明

(1) 得$a \geqslant (>) \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^\alpha}{\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha}$恒成立，由引理3(1)知$a_{\min} = n^{\alpha-1} (a > n^{\alpha-1})$.

(2) 得$a \leqslant (<) \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^\alpha}{\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha}$恒成立，显然可取$a = 0$.

又当$x_1 \to +\infty, x_2 = \cdots = x_n = 1$时$\dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^\alpha}{\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha} \to 0$，所以$a_{\max} = 0$.

(3) 假设a存在，则$a > 0$，得$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^\alpha \geqslant (>) \dfrac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha$恒成立，由(2)得$(\dfrac{1}{a})_{\max} = 0$，这不可能！所以(3)成立.

(4) 同(3)的证法及(1)可证.

定理 2 的证明

(1) 得$a \geqslant (>) \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^\alpha}{\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha}$恒成立.

由引理2(1)知可取$a = 1$.

又当 $x_i \to 0(i=1,2,\cdots,n-1)$ 时 $\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^a}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^a} \to 1$,所以 $a_{\min}=1$.

(2) 得 $a \leqslant (<) \frac{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^a}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^a}$ 恒成立.

由引理 3(2) 知 $a_{\max}=n^{a-1}(a<n^{a-1})$.

(3),(4) 同定理 1(4) 可证.

定理 3 的证明　同定理 2 可证.

参考文献

[1] 吉众.此最小值非彼最小值 —— 错误选项的误导[J].中学数学月刊,2003(12):32.
[2] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993:85.

也谈一个不等式的推广

注释① 的例 6 注释② 均把如下不等式推广为定理 1.

不等式　若 $a,b\in\mathbf{R}^+,a+b=1$,则$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$(当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号).

定理 1　若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,则$\prod_{i=1}^{n}(a_i+\frac{1}{a_i})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n$(当且仅当 $a_1=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时取等号).

注释③ 又把定理 1 推广为:

定理 2　若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$, $\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant n$, 则 $\prod_{i=1}^{n}(a_i+\frac{1}{a_i})\geqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}+\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^n$(当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时取等号).

并且由注释 ③ 定理的证明,还可得:

定理 3　若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$, 则 $\prod_{i=1}^{n}(a_i+\frac{1}{a_i})\geqslant(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}})^n$(当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时取等号).

在定理 3 中令 $a_i=\frac{a'_i}{k_i}(k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbf{R}^+)$,得:

定理 4　若 $a_i,k_i\in\mathbf{R}^+\ (i=1,2,\cdots,n)$,则$\prod_{i=1}^{n}(a_i+\frac{k_i^2}{a_i})\geqslant(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+$

---

① 钱春明.解题后的反思.中学数学研究(南昌),2002(10).

② 黄汉生.$\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n$.数学通讯,1987(5).

③ 邓太文.一个不等式的再推广.中学数学研究(南昌),2003(6).

$\frac{\sqrt[n]{k_1^2k_2^2\cdots k_n^2}}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}})^n$(当且仅当$\frac{a_1}{k_1}=\cdots=\frac{a_n}{k_n}$时取等号).

定理 5 若 $a_i,k_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum\limits_{i=1}^n a_i\leqslant n\sqrt[n]{k_1k_2\cdots k_n}$, 则

$\prod\limits_{i=1}^n(a_i+\frac{k_i^2}{a_i})\geqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i}{n}+\frac{n\sqrt[n]{k_1^2k_2^2\cdots k_n^2}}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}\right)^n$(当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$, $k_1=\cdots=k_n$ 时取等号).

证明 由定理 4 及$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i}{n}\leqslant\sqrt[n]{k_1k_2\cdots k_n}$可证出定理 5.

定理 6 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$, 则 $\prod\limits_{i=1}^n(a_i+\frac{1}{a_i})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n(n^na_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1-n^2}{1+n^2}}$(当且仅当 $a_1=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时取等号).

证明 $\prod\limits_{i=1}^n(a_i+\frac{1}{a_i})=\prod\limits_{i=1}^n(a_i+n^2\cdot\frac{1}{n^2a_i})\geqslant$

$\prod\limits_{i=1}^n(n^2+1)\cdot\sqrt[n^2+1]{(\frac{1}{n^2})^{n^2}\cdot(\frac{1}{a_i})^{n^2-1}}$(当且仅当 $a_i=\frac{1}{n^2a_i}$ 即 $a_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号) $=$

$\prod\limits_{i=1}^n(n+\frac{1}{n})n^{\frac{1-n^2}{1+n^2}}\left(\frac{1}{a^i}\right)^{\frac{n^2-1}{n^2+1}}=$

$(n+\frac{1}{n})^n(n^na_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1-n^2}{1+n^2}}$

在定理 6 中令 $a_i=\frac{a'_i}{k_i}(k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbf{R}^+)$,得

定理 7 若 $a_i,k_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\prod\limits_{i=1}^n(a_i+\frac{k_i^2}{a_i})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n(k_1k_2\cdots k_n)^{\frac{2n^2}{n^2+1}}(n^na_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1-n^2}{1+n^2}}$(当且仅当$\frac{a_1}{k_1}=\cdots=\frac{a_n}{k_n}=\frac{1}{n}$时取等号).

推论 1 若 $a_i,k_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $a_1a_2\cdots a_n\leqslant n^{-n}$ 或$\sum\limits_{i=1}^n a_i\leqslant 1$,则

$\prod_{i=1}^{n}(a_i+\frac{k_i^2}{a_i})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n(k_1k_2\cdots k_n)^{\frac{2n^2}{n^2+1}}$(前者当且仅当$\frac{a_1}{k_1}=\cdots=\frac{a_n}{k_n}=\frac{1}{n}$且$k_1k_2\cdots k_n=1$时取等号;后者当且仅当$k_1=\cdots=k_n=na_1=\cdots=na_n$且$\sum_{i=1}^{n}k_i=n$时取等号).

用 Cauchy 不等式的两个推论证题

Cauchy 不等式[1] 设 $a_i,b_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\leqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)$(当且仅当 $a_i=0$或 $b_i=ka_i(i=1,2,\cdots,n;k$ 为常数)时取等号).

在该不等式中令 $a_i=\frac{a'_i}{\sqrt{m_i}},b_i=\sqrt{m_i},\sum_{i=1}^{n}m_i=1,m_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$，得:

推论 1 若 $a_i\in\mathbf{R},m_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}m_i=1$，则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{m_i}\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2$(当且仅当 $a_i=km_i(i=1,2,\cdots,n;k$ 为常数)时取等号).

推论 2 若 $a,b,\in\mathbf{R},0<m<1$，则 $\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{1-m}\geqslant(a+b)^2$(当且仅当 $\frac{a}{m}=\frac{b}{1-m}$ 时取等号).

例 1 (第三届加拿大奥林匹克试题)设 $x,y\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y=1$，求证

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})\geqslant 9$$

证明 $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1+2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$

由推论 2 及题设可得

$$\frac{1^2}{x}+\frac{1^2}{y}\geqslant(1+1)^2=4$$

所以

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})\geqslant 1+2\times 4=9$$

例 2 (第二届“友谊杯”国际数学竞赛题)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$$

证明 注意到$\frac{b+c}{2(a+b+c)}+\frac{c+a}{2(a+b+c)}+\frac{a+b}{2(a+b+c)}=1$.

由推论 1，得

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=$

$$\frac{1}{2(a+b+c)}\left[\frac{a^2}{\frac{b+c}{2(a+b+c)}}+\frac{b^2}{\frac{c+a}{2(a+b+c)}}+\frac{c^2}{\frac{a+b}{2(a+b+c)}}\right]\geqslant$$

$$\frac{1}{2(a+b+c)}\cdot(a+b+c)^2=\frac{a+b+c}{2}$$

例 3　设 $a\geqslant-\frac{1}{2}, b\geqslant-\frac{1}{2}, a+b=1$,求证:$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant2\sqrt{2}$.

证明　在推论 2 中,令 $m=\frac{1}{2}$,得

$$(\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1})^2\leqslant\frac{2a+1}{\frac{1}{2}}+\frac{2b+1}{\frac{1}{2}}=4(a+b+1)=8$$

即得欲证.

例 4　已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$,$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,求 $x+y$ 的最小值.

解

$$x+y=\frac{1^2}{\frac{x}{x+y}}+\frac{3^2}{\frac{y}{x+y}}\geqslant(1+3)^2=16$$

其中当且仅当$\frac{1}{\frac{x}{x+y}}=\frac{3}{\frac{y}{x+y}}$且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,即 $x=4,y=12$ 时"$\geqslant$"中取等号.

所以 $x+y$ 的最小值是 16.

例 5　求 $f(\theta)=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}(|a|\neq|b|)$ 的最大值.

解　由推论 1,得

$$f^2(\theta)\leqslant\frac{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{\frac{1}{2}}+\frac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{\frac{1}{2}}=2(a^2+b^2)$$

进而得,当且仅当 $\cos 2\theta=0$ 时,$f(\theta)$ 取得最大值,且最大值是 $\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

例 6　证明:$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant9$.

证明　由 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=1$,得

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}=\frac{1^2}{\cos^2\alpha}+\frac{1^2}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}+\frac{1^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\geqslant(1+1+1)^2=9$$

参考文献

[1] 徐鸿迟.柯西不等式的微小改动[J].数学通报,2002(2):37.

求$[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}]$的几个简明结论

通常用$[x]$表示不超过实数x的最大整数. 文献[1],[2]研究了$[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}]$的求法,本文再给出这方面的几个简明结论.

引理 $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}<\sqrt{4n+2}-\sqrt{6}+1(n\geqslant 2)$.(即文献[2]的式⑥)

定理1 若$p\in\mathbf{N}^*,k\in\mathbf{Z},k\geqslant -1,p^2+k\geqslant 2,p\geqslant(\frac{\sqrt{6}}{2}+1)k+1$,则$[\sum_{i=1}^{p^2+k}\frac{1}{\sqrt{i}}]=2p-2$.

证明 由引理,得

$$2\sqrt{p^2+k+1}-2\sqrt{2}+1<\sum_{i=1}^{p^2+k}\frac{1}{\sqrt{i}}<\sqrt{4p^2+4k+2}-\sqrt{6}+1$$

易知$2\sqrt{p^2+k+1}-2\sqrt{2}+1\geqslant 2p-2\sqrt{2}+1>2p-2$.

由$p\geqslant(\frac{\sqrt{6}}{2}+1)k+1$,可证$\sqrt{4p^2+4k+2}-\sqrt{6}+1\leqslant 2p-1$.

得$2p-2<\sum_{i=1}^{p^2+k}\frac{1}{\sqrt{i}}<2p-1$,所以定理1成立.

注 把定理1中的"$p\geqslant(\frac{\sqrt{6}}{2}+1)k+1$"改为"$p\geqslant\frac{9}{4}k+1$且$k\geqslant 0$",所得结论仍成立.

在定理1中令$k=-1,0$,即得文献[2]的定理.

同定理1的证明,还可证得:

定理2 设$p\in\mathbf{N}^*,k\in\mathbf{N},p^2-k\geqslant 2,p\geqslant(3+2\sqrt{2})k-\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{9}{4}$,则$[\sum_{i=1}^{p^2-k}\frac{1}{\sqrt{i}}]=2p-2$.

注 把定理2中的"$p\geqslant(3+2\sqrt{2})k-\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{9}{4}$"改为"$p\geqslant 6k-6$且$k\geqslant 2$",所得结论仍成立.

同文献[2]中式⑥的推导方法,还可得:

定理 3　设 $a,a+b\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 2$,则 $\frac{2}{a}\sqrt{an+a+b}+\frac{1}{\sqrt{a+b}}-\frac{2}{a}\sqrt{2a+b}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{ai+b}}<\frac{2}{a}\sqrt{an+\frac{1}{2}a+b}+\frac{1}{\sqrt{a+b}}-\frac{2}{a}\sqrt{\frac{3}{2}a+b}$.

(由 $\sqrt{an+a+b}+\sqrt{an+b}>2\sqrt{an+b}>\sqrt{an+\frac{1}{2}a+b}+\sqrt{an-\frac{1}{2}a+b}$ 开始推导.)

用定理3也可求出一些 $\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{ai+b}}\right]$ 的值.

推论 1　若 $p\in\mathbf{N}^*,k\in\mathbf{N},p\geqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}k+\frac{1-\sqrt{2}}{4}$,则 $\left[\sum_{i=1}^{2p^2+k}\frac{1}{\sqrt{2i-1}}\right]=2p-1$.

证明　在定理3中令 $a=2,b=-1,n=2p^2+k$ 可证.

推论 2　若 $a\geqslant 2+2\sqrt{2},p\in\mathbf{N}^*,k\geqslant 0,p\geqslant\frac{k-1}{\sqrt{2a+4}},ap^2+k\in\mathbf{N}^*$,则 $\left[\sum_{i=1}^{ap^2+k}\frac{1}{\sqrt{ai+1-a}}\right]=2p$.

证明　因为 $ap^2+k\geqslant a>2$,所以可在定理3中令 $n=ap^2+k,b=1-a$,从而可证得推论2成立.

在推论2中令 $a=6$,得:

推论 3　若 $p\in\mathbf{N}^*,k\in\mathbf{N},p\geqslant\frac{k-1}{4}$,则 $\left[\sum_{i=1}^{6p^2+k}\frac{1}{\sqrt{6i-5}}\right]=2p$.

推论 4　若 $p\in\mathbf{N}^*,k\in\mathbf{N},p\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}(2k-1)+\frac{2k+1}{4}$,则 $\left[\sum_{i=1}^{2p^2+k}\frac{1}{\sqrt{2i-1}}\right]=2p-1$.(由推论1可证)

推论 5　若 $a>2+2\sqrt{2},p\in\mathbf{N}^*,k\in\mathbf{R}^+,ap^2-k\geqslant 2,ap^2-k\in\mathbf{N}^*$, $p\geqslant\frac{1}{2}+\frac{4-a+4k}{4(a-2\sqrt{a+1})}$,则 $\left[\sum_{i=1}^{ap^2-k}\frac{1}{\sqrt{an+1-a}}\right]=2p$.

参考文献

[1] 陈宽国.一个不等式问题的初等研究[J].数学通讯,1998(5):23-24.

[2] 徐世震.再探"$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}$ 的整数部分"[J].中学数学月刊,2000(10):25-27.

三角形的面积、周长、内切圆半径、外接圆半径之间的一些大小关系

文献[1]的例4求出了已知内切圆半径的直角三角形周长的最小值,本文将研究这类问题的一般情形.

约定:本文用 S,l,p,R,r,A,B,C 分别表示 $\triangle ABC$ 的面积,周长,半周长,外接圆半径,内切圆半径,三个内角.

1 引理

引理1[2] (1) $l=2p$;

(2) $S=rp=\frac{1}{2}rl$;

(3) $l=2r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$;

(4) $S=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$;

(5) $l=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

(6) $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$;

(7) $S=\frac{1}{4}l^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$;

(8) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

引理2 (1) $l=2r\cot\frac{A}{2}\left(\frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}}+1\right)$;

(2) $S=r^2\cot\frac{A}{2}\left(\frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}}+1\right)$;

(3) $l=2R(\sin A+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2})$;

(4) $S=R^2[\frac{1}{2}\sin 2A+\sin A\cos(B-C)]$;

(5) $S=\frac{l^2}{4}\tan\frac{A}{2}\left(1-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{A}{2}}\right)$;

(6) $r=2R\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2})$.

引理 3　以下不等式均当且仅当 $B=C$ 时取等号:

(1) $l\geqslant 4r\cdot\frac{(1+\sin\frac{A}{2})^2}{\sin A}$;

(2) $S\geqslant 2r^2\cdot\frac{(1+\sin\frac{A}{2})^2}{\sin A}$;

(3) $l\leqslant 2R(\sin A+2\cos\frac{A}{2})$;

(4) $S\leqslant R^2\sin A(1+\cos A)$;

(5) $S\leqslant\frac{l^2}{8}\cdot\frac{\sin A}{(1+\sin\frac{A}{2})^2}$;

(6) $r\leqslant 2R\sin\frac{A}{2}(1-\sin\frac{A}{2})$.

(用引理 1 可证引理 2,用引理 2 可证引理 3.)

引理 4　若 $0<A<\pi$,则(以下不等式均当且仅当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时取等号):

(1) $\frac{(1+\sin\frac{A}{2})^2}{\sin A}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$;

(2) $\sin A+2\cos\frac{A}{2}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$;

(3) $\sin A(1+\cos A)\leqslant\frac{3}{4}\sqrt{3}$;

(4) $\sin\frac{A}{2}(1-\sin\frac{A}{2})\leqslant\frac{1}{4}$.

证明　(1) 设 $y=\frac{(1+\sin\frac{A}{2})^2}{\sin A}$,得 $y>0$,且

$$y^2=\frac{(1+\sin\frac{A}{2})^3}{4\sin^2\frac{A}{2}(1-\sin\frac{A}{2})}=\frac{(\csc\frac{A}{2}+1)^3}{4(\csc\frac{A}{2}-1)}$$

设 $t=\csc\frac{A}{2}-1$,有 $t>0$,且

$$4y^2=\frac{(t+2)^3}{t}=(t^2+\frac{1}{t}+\frac{1}{t})+6(t+\frac{1}{t})+12\geqslant$$

$$3\sqrt[3]{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}}+6\cdot 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}+12=27$$

进而可得欲证.

(2) 设 $y=\sin A+2\cos\frac{A}{2}$,有 $y>0$,且

$$y=2\cos\frac{A}{2}(\sin\frac{A}{2}+1)$$

$$y^2=\frac{4}{3}(1+\sin\frac{A}{2})^3(3-3\sin\frac{A}{2})\leqslant$$

$$\frac{4}{3}\left[\frac{3(1+\sin\frac{A}{2})+(3-3\sin\frac{A}{2})}{4}\right]^4=\frac{27}{4}$$

进而可得结论(2)成立.

(3) 设 $y=\sin A(1+\cos A)$,有 $y>0$,且

$$y^2=\frac{1}{3}(1+\cos A)^3(3-3\cos A)\leqslant\frac{1}{3}\left[\frac{3(1+\cos A)+(3-3\cos A)}{4}\right]^4=\frac{27}{16}$$

进而可得结论(3)成立.

(4) 显然成立.

2 定理

用引理1,3容易证得下面的定理1(定理1中的等号均当且仅当 $B=C$ 时取得,另一边的确界均当且仅当 $ABC\to 0$ 时趋向于那个确界):

定理1 (1) $4r\cdot\dfrac{(1+\sin\frac{A}{2})^2}{\sin A}\leqslant l$;

(2) $2r^2\cdot\dfrac{(1+\sin\frac{A}{2})^2}{\sin A}\leqslant S$;

(3) $\dfrac{r}{2\sin\frac{A}{2}(1-\sin\frac{A}{2})}\leqslant R$;

(4) $0<r\leqslant\dfrac{l}{4}\cdot\dfrac{\sin A}{(1+\sin\frac{A}{2})^2}$;

(5) $\dfrac{l}{2\sin A+4\cos\frac{A}{2}}\leqslant R<\dfrac{l}{4\sin A}$;

(6) $0<S\leqslant\dfrac{l^2}{8}\cdot\dfrac{\sin A}{(1+\sin\frac{A}{2})^2}$;

(7)$0 < r \leqslant \sqrt{\frac{S}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sin A}}{1 + \sin\frac{A}{2}}$;

(8)$2\sqrt{2S} \cdot \frac{1 + \sin\frac{A}{2}}{\sqrt{\sin A}} \leqslant l$;

(9)$\sqrt{\frac{S}{\sin A(1 + \cos A)}} \leqslant R$;

(10)$0 < r \leqslant 2R\sin\frac{A}{2}(1 - \sin\frac{A}{2})$;

(11)$4R\sin A < l \leqslant 2R(\sin A + 2\cos\frac{A}{2})$;

(12)$0 < S \leqslant R^2\sin A(1 + \cos A)$.

由定理1及引理4,可得:

推论1　以下不等式均当且仅当 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 时取等号:

(1)$6\sqrt{3}r \leqslant l \leqslant 3\sqrt{3}R$;

(2)$3\sqrt{3}r^2 \leqslant S \leqslant \frac{3}{4}\sqrt{3}R^2$;

(3)$R \geqslant 2r$;

(4)$S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{36}l^2$.

推论1(1),(2)及定理1(10)均为Euler不等式"$R \geqslant 2r$"的加强.

推论2　(1)周长或面积为定值的三角形内切圆半径的最大值(外接圆半径的最小值)均当且仅当这个三角形是正三角形时取得;

(2)内切圆(外接圆)半径为定值的三角形周长或面积的最小(大)值均当且仅当这个三角形是正三角形时取得;

(3)周长(面积)为定值的三角形面积的最大值(周长的最小值)当且仅当这个三角形是正三角形时取得.

3　问题

定理1给出了当 r,R,S,l 中有一个量及 A 均为定值时,另三个量的取值范围(因为引理1中关于 l,S 的等式若看成函数,它们均是连续函数).还应当研究如下问题:

问题　当 r,R,S,l 中任两个量为定值时,求其余两个量及 A 的取值范围.

定理2　$\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}}{2} \leqslant \sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}}{2}$,左边当且仅当 $B = C, B \in$

$(0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ 时取等号;右边当且仅当 $B=C,B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 时取等号.

证明 引理 3(6) 即

$$r\leqslant 2R\sin\frac{A}{2}(1-\sin\frac{A}{2})(\text{当且仅当 } B=C \text{ 时取等号}) \quad ①$$

所以

$$\frac{1-\sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2}\leqslant\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{1+\sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2} \quad ②$$

若 ② 中的左边或右边取等号,则 ① 中必取等号,得 $B=C$.

(1) 若 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2}$,则 $\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,得 $A\in(0,\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{2}{3}\pi,\pi)$.

又 $B=C=\frac{\pi-A}{2}$,所以 $B\in(0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$.

显然 $B=C,B\in(0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ 时,② 的左边取等号.

(2) 若 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1+\sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2}$,则 $\sin\frac{A}{2}\geqslant\frac{1}{2}$,$A\in[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi]$.

若 $A=\frac{2}{3}\pi$,由推论 1(3) 得 $R>2r$,所以 $\sin A>\frac{1}{2}$.

得 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1+\sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2}$ 时,$A\in[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi)$.

进而有 $B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$.

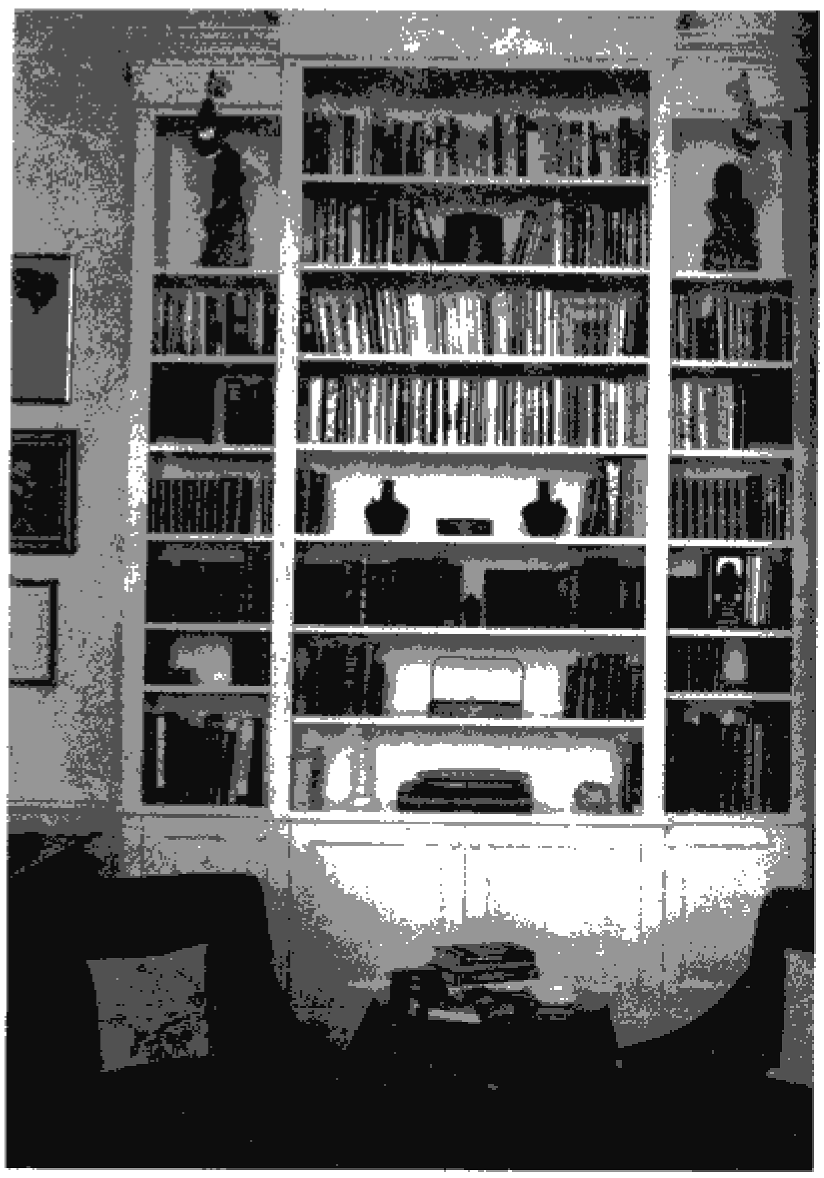
显然 $B=C,B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 时 ② 的右边取等号.

参考文献

[1] 年仁德,刘国英. 数学教师对习题的选择和使用[J]. 数学通报,2001(12):27-29.

[2] 言川. 中学数学手册[M]. 太原:山西人民出版社,1983:522-529.

平面解析几何



深入挖掘圆锥曲线的定义[①]

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2004年人民教育出版社)(下简称"教科书")第92页给出了:

椭圆定义 在平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆.这两个定点叫做椭圆的焦点,两焦点的距离叫做椭圆的焦距.

深入挖掘该定义,得到下面的一些伴随结论.

结论1 在平面内与两个定点 F_1,F_2(不重合,下同)的距离的和等于常数 $2a(a\geqslant 0)$ 的点的轨迹分别是:

(1) 当 $2a>|F_1F_2|$ 时,轨迹为以 F_1,F_2 为焦点且长轴长为 $2a$ 的椭圆;

(2) 当 $2a=|F_1F_2|$ 时,轨迹为线段 F_1F_2;

(3) 当 $0\leqslant 2a<|F_1F_2|$ 时,轨迹不存在.

例1 化简下列方程:

(1) $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10$;

(2) $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=6$;

(3) $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=4$.

解 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}$ 表示动点 $M(x,y)$ 到两个定点 $F_1(-3,0),F_2(3,0)$ 的距离之和 $|MF_1|+|MF_2|$,又 $|F_1F_2|=6$.

(1) 因为 $|MF_1|+|MF_2|=10>6=|F_1F_2|$,所以由结论1(1)知,点 M 的轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2) 因为 $|MF_1|+|MF_2|=6=|F_1F_2|$,所以由结论1(2)知,点 M 的轨迹为线段 $F_1F_2:y=0(-3\leqslant x\leqslant 3)$.

(3) 因为 $|MF_1|+|MF_2|=4<6=|F_1F_2|$,所以由结论1(3)知,点 M 的轨迹不存在,即(3)中的 x,y 不存在.

教科书第104页给出了:

双曲线定义 在平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于常数

① 原载于《中学数学杂志(高中)》(2007年第6期).

(小于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫做双曲线. 这两个定点叫做双曲线的焦点, 两焦点的距离叫做双曲线的焦距.

此定义不严谨, 应把"(小于 $|F_1F_2|$)"改为"(大于0且小于 $|F_1F_2|$)". 深入挖掘该定义, 也得下面的结论.

结论 2　在平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于常数 $2a(a\geqslant 0)$ 的点的轨迹分别是:

(1) 当 $2a>|F_1F_2|$ 时, 轨迹不存在;

(2) 当 $2a=|F_1F_2|$ 时, 轨迹为直线 F_1F_2 上去掉线段 F_1F_2 的内点后剩下的两条射线;

(3) 当 $0<2a<|F_1F_2|$ 时, 轨迹为以 F_1,F_2 为焦点且实轴长为 $2a$ 的双曲线;

(4) 当 $2a=0$ 时, 轨迹为线段 F_1F_2 的中垂线.

例 2　化简下列方程:

(1) $\left|\sqrt{(x+3)^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right|=10$;

(2) $\left|\sqrt{(x+3)^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right|=6$, $\sqrt{(x+3)^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+y^2}=6$;

(3) $\left|\sqrt{(x+3)^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right|=4$, $\sqrt{(x+3)^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+y^2}=-4$;

(4) $\left|\sqrt{(x+3)^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right|=0$.

解　(1) 该方程对应的 x,y 不存在.

(2) $y=0(|x|\geqslant 3)$; $y=0(x>3)$.

(3) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$; $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1(x<0)$.

(4) $x=0$.

教科书第100页的例4及第112页的例3的结论就是通常所说的椭圆, 双曲线的第二定义, 教科书第115页还给出了:

抛物线定义　在平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线. 点 F 叫做抛物线的焦点, 直线 l 叫做抛物线的准线.

此定义也有误, 应把"定直线 l"改为"定直线 $l(F\notin l)$". 当 $F\in l$ 时, 轨迹是直线 l 的过点 F 的垂线.

高级中学课本《平面解析几何(全一册・必修)》(1990年人民教育出版社)(下简称"课本")中也有以上双曲线定义及抛物线定义的错误(当然笔者也阅读了多种文献指出并修正了该错误), 课本第128页还给出了:

三种圆锥曲线的统一定义　与一个定点(焦点)的距离和一条定直线(准线)的距离的比等于常数 e 的点的轨迹, 当 $0<e<1$ 时是椭圆; 当 $e>1$ 时是

双曲线；当 $e = 1$ 时是抛物线.

此定义也有误，应把“定直线”改为“不过该点的定直线”.

深入挖掘该统一定义，又得下面的结论.

结论 3 在平面内到定点 F 的距离是到定直线 l 的距离 $e(e \geqslant 0)$ 倍的点的轨迹如下.

(1) 当 $F \notin l$ 时：

① 若 $e > 1$，则轨迹为以 F, l 为一对焦点，准线且离心率为 e 的双曲线；

② 若 $e = 1$，则轨迹为以 F 为焦点，l 为准线的抛物线；

③ 若 $0 < e < 1$，则轨迹为以 F, l 为一对焦点，准线且离心率为 e 的椭圆；

④ 若 $e = 0$，则轨迹为点 F.

(2) 当 $F \in l$ 时：

① 若 $e > 1$，则轨迹为过点 F 且与 l 的夹角为 $\arcsin \frac{1}{e}$ 的两条相交直线；

② 若 $e = 1$，则轨迹为过点 F 且垂直于 l 的直线；

③ 若 $0 < e < 1$，则轨迹不存在；

④ 若 $e = 0$，则轨迹为点 F.

例 3 指出下列方程所表示的轨迹：

(1) $\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5} | 3x + 4y - 25 |$；

(2) $\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \frac{1}{5} | 3x + 4y - 25 |$；

(3) $\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \frac{1}{6} | 3x + 4y - 25 |$；

(4) $\frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}}{| 3x + 4y - 25 |} = \frac{\sqrt{2}}{5}$；

(5) $\frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}}{| 3x + 4y - 25 |} = \frac{1}{5}$；

(6) $\frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}}{| 3x + 4y - 25 |} = \frac{1}{6}$；

(7) $\frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}}{| 3x + 4y - 25 |} = 0$.

解 设 $F(4,3)$，$l: 3x + 4y - 25 = 0$，由结论 3(1)，得：

(1) 轨迹为以 F, l 为一对焦点，准线且离心率为 $\sqrt{2}$ 的双曲线；

(2) 轨迹为以 F 为焦点，l 为准线的抛物线；

(3) 轨迹为以 F, l 为一对焦点，准线且离心率为 $\frac{5}{6}$ 的椭圆.

设 $F(4,3)$，$l: 3x + 4y - 25 = 0$，由结论 3(2)，得：

(4) 轨迹为过点 F 且与 l 的夹角为 $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的两条相交直线(但要去掉点 F),即 $(x-7y+25)(7x+y-25)=0(x\neq 3)$;

(5) 轨迹为过点 F 且垂直于 l 的直线(但要去掉点 F),即 $4x-3y=7(x\neq 4)$;

(6) 轨迹不存在;

(7) 轨迹不存在.

文献[1]的例3也作了挖掘圆锥曲线定义的研究,但文献[1]也犯了本文已指出的错误:文献[1]第39页右栏的第二段中"当 $e>1$ 或 $0<e<1$ 时定点 F 不在定直线 l 上"有误,因为 $e>1$ 时有 $F\in l$ 的可能;文献[1]第39页的右栏"(3)满足条件 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\frac{2|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的点 (x,y) 的轨迹是以点 $F(x_0,y_0)$ 为焦点,直线 $l:ax+by+c=0$ 为准线的双曲线"也不对,应分 $F\in l$ 和 $F\notin l$ 两种情形讨论.本文指出的这种错误,在广大高中师生中很普遍,且具有一定的代表性和隐蔽性,请广大读者阅读本文后引起重视.文献[1]末的例子很有趣,抄录如下:

例 4[1] 写出满足下列条件的动点 (x,y) 的轨迹:

(1) $\sqrt{(x-\sin\alpha)^2+(y-\cos\alpha)^2}=|x\sin\alpha+y\cos\alpha-1|$;

(2) $\sqrt{(x-\sin\alpha)^2+(y-\cos\alpha)^2}=2|x\sin\alpha+y\cos\alpha-2|$;

(3) $2\sqrt{(x-\sin\alpha)^2+(y-\cos\alpha)^2}=|x\sin\alpha+y\cos\alpha-2|$;

(4) $\sqrt{(x-\sin\alpha)^2+(y-\cos\alpha)^2}=|x\sin\alpha+y\cos\alpha-2|$.

解 (1) 轨迹为过点 $(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 且垂直于直线 $x\sin\alpha+y\cos\alpha-1=0$ 的直线,即 $x\cos\alpha-y\sin\alpha=0$;

(2) 轨迹为以 $(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 为焦点,直线 $x\sin\alpha+y\cos\alpha-2=0$ 为准线且离心率为 2 的双曲线;

(3) 轨迹为以 $(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 为焦点,直线 $x\sin\alpha+y\cos\alpha-2=0$ 为准线且离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆;

(4) 轨迹为以 $(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 为焦点,直线 $x\sin\alpha+y\cos\alpha-2=0$ 为准线的抛物线.

参考文献

[1] 李爱清,刘继红.加强题组教学　提高学生能力[J].数学通报,2007(7):37-38.

一个有趣的解析几何问题

笔者阅读文献[1]的例1后,想到了如下推广问题:在平面上,过一定点与两定直线所围成三角形面积为定值的直线有几条?

定理1 如图1,两条定直线 l_1,l_2 交于点 O,且定点 P 在 l_1 或 l_2 上(但 P,O 不重合),则过点 P 与 l_1,l_2 围成三角形的面积为定值 S 的直线 l 有且仅有两条.

定理2 如图2,两条定直线 l_1,l_2 交于点 O,且定点 P 不在 l_1,l_2 上,过点 P 的直线 l_0 与 l_1,l_2 分别交于点 A_0,B_0,且 P 是线段 A_0B_0 的中点(可证 l_0 唯一存在),设 $S_{\triangle OA_0B_0}=S_0$,则:

(1) 过定点 P 的直线 l 与 l_1,l_2 围成的三角形面积 S 的最小值是 S_0.

(2)① 当 $0<S<S_0$ 时,直线 l 有且仅有两条;

② 当 $S=S_0$ 时,直线 l 有且仅有三条;

③ 当 $S>S_0$ 时,直线 l 有且仅有四条.

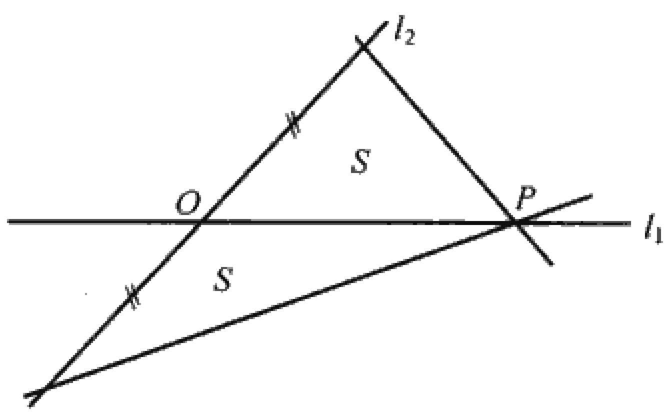


图1

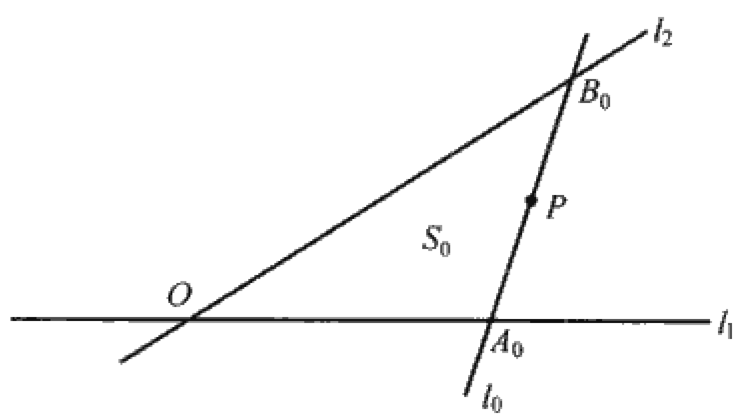


图2

证明 (1) 以下的纯几何证法简洁有趣,不过它来源于文献[2]:在图3中作平行线后可得两个三角形全等,要证的结论就显然了.

(2) 如图4所示建立平面直角坐标系,l_1 即 x 轴,可设 $l_2:x=y\cot\alpha(0<\alpha<\pi)$.

易得 $A_0(2x_0-2y_0\cot\alpha,0)$,$B_0(2y_0\cot\alpha,2y_0)$,所以

$$S_0=\frac{1}{2}|OA_0|\cdot|y_{B_0}|=\frac{1}{2}|2x_0-2y_0\cot\alpha|\cdot|2y_0|=2|y_0(x_0-y_0\cot\alpha)|$$

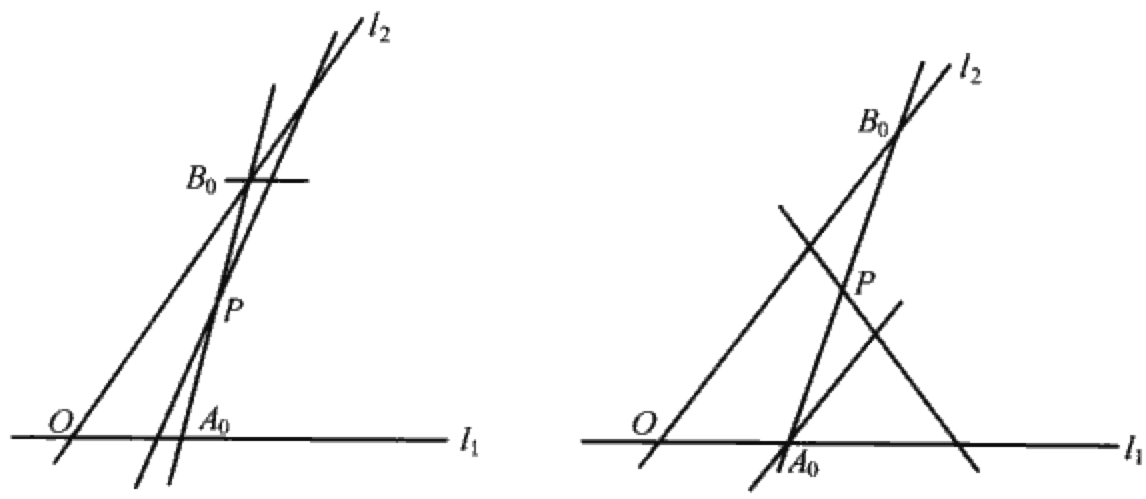


图 3

可设 l 与 l_1, l_2 的交点分别为 $A(a,0), B(u\cot\alpha, u)$.

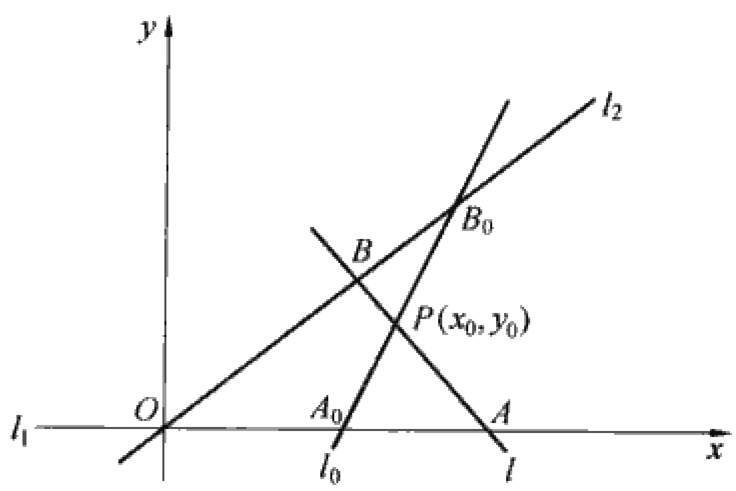


图 4

由向量$\overrightarrow{AP} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AB}$,得$(x_0 - a, y_0) \mathbin{/\!/} (u\cot\alpha - a, u)$,所以

$$u = \frac{ay_0}{a - x_0 + y_0\cot\alpha}$$

$$S = S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|y_B| = \frac{1}{2}|a|\cdot\left|\frac{ay_0}{a - x_0 + y_0\cot\alpha}\right|$$

当 $a > x_0 - y_0\cot\alpha$ 时

$$|y_0|a^2 - 2Sa + 2S(x_0 - y_0\cot\alpha) = 0 \qquad ①$$

其判别式 $\Delta_1 = 4S[S - 2|y_0|(x_0 - y_0\cot\alpha)]$.

当 $a < x_0 - y_0\cot\alpha$ 时

$$|y_0|a^2 + 2Sa - 2S(x_0 - y_0\cot\alpha) = 0 \qquad ②$$

其判别式 $\Delta_2 = 4S[S + 2|y_0|(x_0 - y_0\cot\alpha)]$.

若 $x_0 - y_0\cot\alpha < 0$,则 $\Delta_1 > 0$,由式①得 a 的两个不同值且均满足 $a > x_0 - y_0\cot\alpha$.

① 当 $0 < S < S_0$ 时,$\Delta_2 < 0$,由式②得不到 a 的值,共得到 a 的两个值,

所以此时直线 l 有且仅有两条;

② 当 $S = S_0$ 时,$\Delta_2 = 0$,由式 ② 得到 $a = -\frac{S}{|y_0|} < -\frac{S}{2|y_0|} = x_0 - y_0\cot\alpha$,共得到 a 的三个值,所以此时直线 l 有且仅有三条;

③ 当 $S > S_0$ 时,$\Delta_2 > 0$,由式 ② 得到 a 的两个不同值且均满足 $a < x_0 - y_0\cot\alpha$,共得到 a 的四个值,所以此时直线 l 有且仅有四条.

若 $x_0 - y_0\cot\alpha > 0$,同上可证得结论(2)成立!

定理2的证明中 l_2 方程的设法很巧妙,避免了分类讨论.在定理2中令 $\alpha = \frac{\pi}{2}$,得如下推论.

推论 在平面直角坐标系中,设过定点 $P(x_0, y_0)(x_0y_0 \neq 0)$ 的直线 l 与两坐标轴围成的三角形面积为定值 $S(S > 0)$,则:

(1) 当 $0 < S < 2|x_0y_0|$ 时,直线 l 有且仅有两条;

(2) 当 $S = 2|x_0y_0|$ 时,直线 l 有且仅有三条(且其中有一条与两坐标轴交点的中点是 P);

(3) 当 $S > 2|x_0y_0|$ 时,直线 l 有且仅有四条.

参考文献

[1] 李爱清,刘继红.加强题组教学 提高学生能力[J].数学通报,2007(7):37-38.
[2] 陈志清.一个解析几何问题的解法及启示[J].中学生数学,2004,7(上):13-14.

用伸缩变换求椭圆的切线

定理 设直线 l 与二次曲线 Γ 经过伸缩变换 $\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}(ab \neq 0)$ 分别变为 l' 与 Γ'，则 l 与 Γ 相交(相切、相离)$\Leftrightarrow$ l' 与 Γ' 相交(相切、相离)，且交点(切点)之间也满足这种伸缩变换的对应.

证明 l 与 Γ 相交、相切或相离 $\Leftrightarrow$

方程组 $\begin{cases} l: F_1(x,y) = 0 \\ \Gamma: F_2(x,y) = 0 \end{cases}$ 有两组解、一组解或无解 $\Leftrightarrow$

方程组 $\begin{cases} l': F_1'(x',y') = 0 \\ \Gamma': F_2'(x',y') = 0 \end{cases}$ 有两组解、一组解或无解(因为由伸缩变换知，(x,y) 与 (x',y') 是一一对应的)$\Leftrightarrow$

l' 与 Γ' 相交、相切或相离

推论 设直线 l 与椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，经过伸缩变换 $\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$ 后分别变为 l' 与圆 $\Gamma': x'^2 + y'^2 = 1$，则 l 与 Γ 相交(相切、相离)$\Leftrightarrow$ l' 与 Γ' 相交(相切、相离)，且交点(切点)之间也满足这种伸缩变换的对应.

例 1 求椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的过点 $P(2,0)$ 的切线.

解 作伸缩变换 $\begin{cases} x = 2x' \\ y = y' \end{cases}$ 后，椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 变为圆 $x'^2 + y'^2 = 1$，点 $P(2,0)$ 变成点 $P'(1,0)$.

易知圆 $x'^2 + y'^2 = 1$ 的过点 $P'(1,0)$ 的切线为 $x' = 1$，再由伸缩变换 $\begin{cases} x = 2x' \\ y = y' \end{cases}$ 知，椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的过点 $P(2,0)$ 的切线为 $x = 2$.

例 2 过点 $P(4,2)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两条切线，切点分别是 A, B，求直线 AB 的方程.

解 作伸缩变换 $\begin{cases} x = 2x' \\ y = y' \end{cases}$ 后，椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 变为圆 $x'^2 + y'^2 = 1$，点 $P(4,2)$ 变成点 $P'(2,2)$.

由熟知的切点弦方程可得直线 $A'B'$ 的方程是：$2x' + 2y' = 1$.

也可这样求直线 $A'B'$ 的方程：

如图 1，易知以 $O'P'$ 为直径的圆 $(x'-1)^2+(y'-1)^2=2$ 与单位圆 $x'^2+y'^2=1$ 的公共弦即 $A'B'$，由这两个解析式可得 $2x'+2y'=1$，此即直线 $A'B'$ 的方程(由"两点确定一直线"可证此结论).

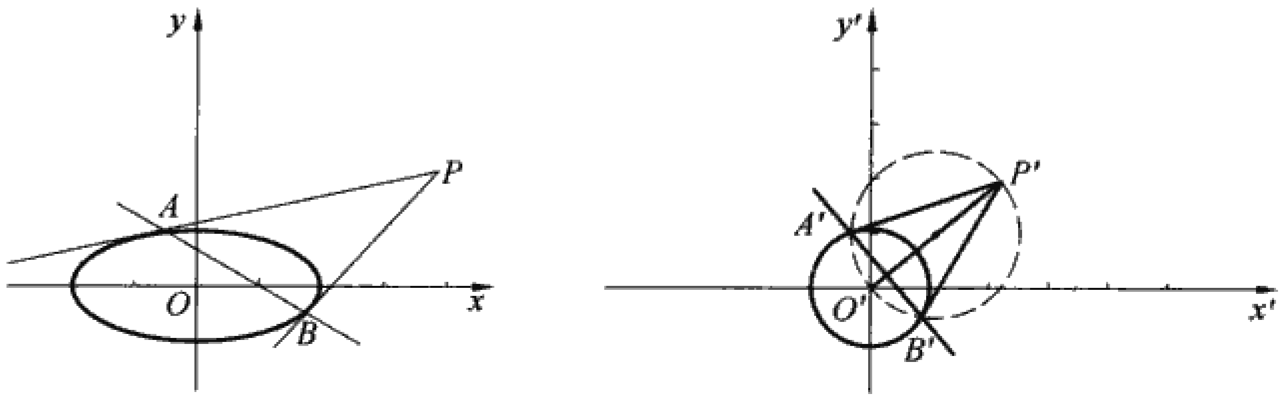


图 1

再由伸缩变换 $\begin{cases} x=2x' \\ y=y' \end{cases}$ 知，所求直线 AB 的方程为 $x+2y=1$.

圆锥曲线的一条性质

武汉市2005届高三年级四月调考《数学试题(理科)》(2005年4月14日武汉市教育科学研究院命制)的压轴题是:

过椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$外一定点$A(r,0)$作一直线$l$交椭圆$\Gamma$与$P,Q$两点,又$Q$关于$x$轴的对称点为$Q'$,$PQ'$交$x$轴于点$B$(图1).

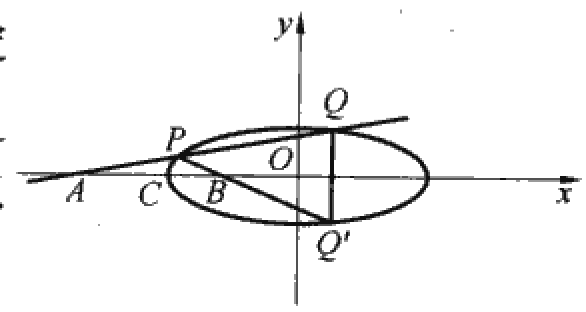


图1

(1) 若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$,求证:$\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{BQ'}$;

(2) 求证:点B为定点$(\frac{a^2}{r},0)$.

由(2)还可得$OA\cdot OB=OC^2$(C是椭圆与x轴的一个交点).

实际上,这是所有中心圆锥曲线(圆,椭圆和双曲线)的一条性质.

定理1 过中心圆锥曲线Γ(其中心是O)的一条对称轴l(l与Γ相交,设两个交点分别是C,C')上除C,C'外的一定点A作直线交Γ于两点P,Q,Q关于l的对称点是Q',$PQ'\cap l=B$(当P,Q'重合时,直线PQ'表示Γ的过点P的切线),则B是定点,且$|OA|\cdot|OB|=|OC|^2$.

证明 可设$\Gamma:mx^2+ny^2=1(m>0,n\neq0)$.

只需证明l是x轴的情形.

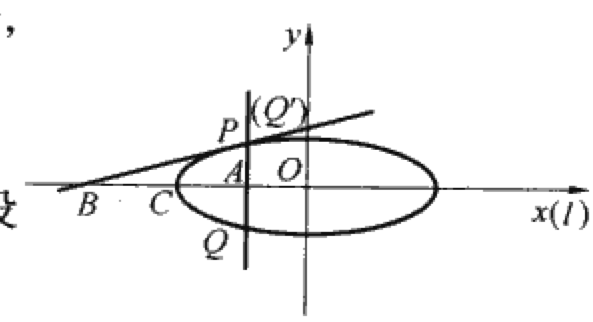


图2

(1) 当$PAQ\perp l$时(图2),点P,Q'重合.设$A(r,0),P(r,y_1)$.

由$mx^2+ny^2=1$,得

$$2mx+2ny\cdot y'=0,y'=-\frac{mx}{ny}$$

切线$PQ':y-y_1=-\frac{mr}{ny_1}(x-r)$,它与$x$轴的交点$B(r+\frac{ny_1^2}{mr},0)$.

由点$P(r,y_1)$在Γ上,得$mr^2+ny_1^2=1$,所以点B即定点$(\frac{1}{mr},0)$.

易得l与Γ的交点为$(\pm\frac{1}{\sqrt{m}},0)$,所以

$$|OA|\cdot|OB| = |r|\cdot\frac{1}{m|r|} = \frac{1}{m} = |OC|^2$$

(2) 当 PAQ 不垂直于 l 时(图 1).

设 $A(r,0),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),Q'(x_2,-y_2)$.

设 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AQ}$,得

$$\lambda = \frac{y_A - y_P}{y_A - y_Q} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_P - y_B}{y_B - y_{Q'}}$$

所以 $$y_1 = \lambda y_2, \overrightarrow{PB} = \lambda\overrightarrow{BQ'}$$

由 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AQ}$,得

$$r = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$$

由 $\overrightarrow{PB} = \lambda\overrightarrow{BQ'}$,得

$$x_B = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

所以 $$x_1^2 - \lambda^2 x_2^2 = r x_B(1 - \lambda^2)$$

又 $mx_1^2 + ny_1^2 = 1, mx_2^2 + ny_2^2 = 1, y_1 = \lambda y_2$,得

$$x_1^2 - \lambda^2 x_2^2 = \frac{1 - \lambda^2}{m}$$

再由 $\lambda^2 \neq 1$,得 $x_B = \frac{1}{mr}$,点 B 为定点$(\frac{1}{mr},0)$.也有

$$|OA|\cdot|OB| = |OC|^2$$

定理 1 成立.

定理 2 过抛物线 Γ 的对称轴 l 上除抛物线的顶点外的一定点 A 作直线交 Γ 于两点 P,Q,Q 关于 l 的对称点是 Q',$PQ \cap l = B$(当 P,Q' 重合时,直线 PQ' 表示 Γ 的过点 P 的切线),则抛物线的顶点是线段 AB 的中点.

证明 设 $\Gamma: y^2 = tx(t > 0)$,l 即 x 轴.

(1) 当 $PAQ \perp l$ 时(图 3),可设 $A(ty_0^2,0),P(ty_0^2,ty_0)$.

由 $y^2 = tx$,得 $2y\cdot y' = t, y' = \frac{t}{2y}$.

切线 $PQ': y - ty_0 = \frac{t}{2ty_0}(x - ty_0^2)$,它与 x 轴的交点为 $B(-ty_0^2,0)$,得抛物线的顶点 O 是线段 AB 的中点.

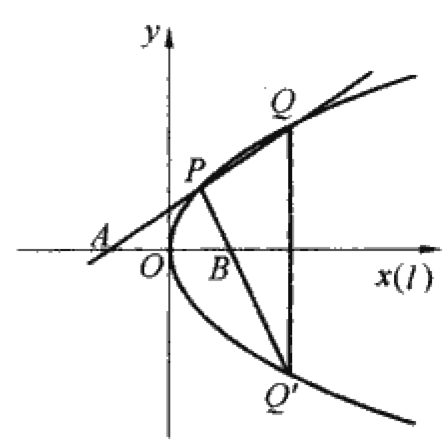


图 3

(2) 当 PAQ 不垂直于 l 时(图 4),用前面的向量方法也可证得结论成立.

下面再给出一种代数证法(前面的问题均可这样证出,只是计算繁一点).

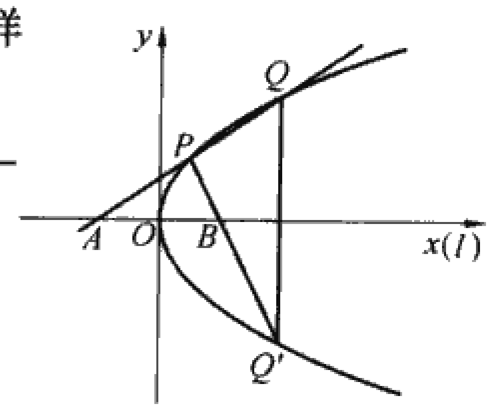


图4

可设 $A(r,0)$, $P(ty_1^2, ty_1)$, $Q(ty_2^2, ty_2)$, $Q'(ty_2^2, -ty_2)$,有 $y_1 \neq y_2$.

由 A, P, Q 共线,得

$$\frac{ty_1}{ty_1^2 - r} = \frac{ty_2}{ty_2^2 - r}, ty_1y_2 = -r$$

由 P, B, Q' 共线,得

$$\frac{ty_1 + ty_2}{ty_1^2 - ty_2^2} = \frac{ty_1}{ty_1^2 - x_B}$$

所以 $x_B = ty_1y_2 = -r$,即抛物线的顶点 O 是线段 AB 的中点.

定理2也成立.

易知定理1,2中的点 B 是由点 A 及圆锥曲线 Γ 唯一确定的,读者可再研究点 B 的其他性质.

椭圆中一类张角的取值范围①

本文将给出椭圆上的点到长轴所在直线上关于椭圆中心成中心对称的定线段的两端张角的取值范围.

定理 1 设 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)(\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi))$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0, c=\sqrt{a^2-b^2})$ 上非长轴两端 $A(-a,0), B(a,0)$ 的动点,则 $\angle APB$ 的取值范围是 $(\frac{\pi}{2}, \pi-\arctan\frac{2ab}{c^2}]$,当且仅当 $\theta\to 0,\pi,2\pi$ 时,$\angle APB\to\frac{\pi}{2}$;当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$ 时,$\angle APB=\pi-\arctan\frac{2ab}{c^2}$.

证明 由椭圆的对称性知,只需证明 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 的情形.

如图 1,有

$$k_{PA}=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+a}, k_{PB}=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-a}$$

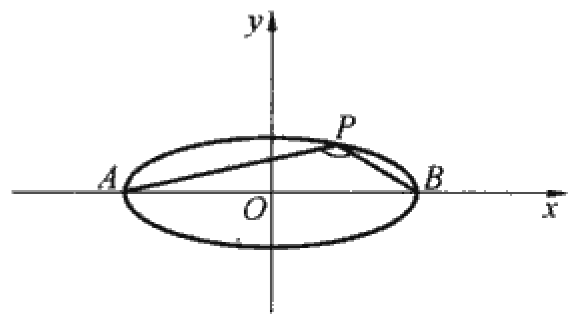


图 1

易证 k_{PA}, k_{PB} 均存在,且 $k_{PA}\cdot k_{PB}\neq -1$,所以

$$\tan\angle APB=\frac{k_{PB}-k_{PA}}{1+k_{PB}\cdot k_{PA}}=-\frac{2ab}{c^2\sin\theta}$$

易知 $\tan\angle APB$ 的值随 θ 的增加而增加,从而可得定理 1 成立.

定理 2 设 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)(\theta\in[0,2\pi))$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0, c=\sqrt{a^2-b^2})$ 上的动点,点 $A(-t,0), B(t,0)$ 是 x 轴上的两个定点($t>a$),则:

(1) 当 $t\geqslant\sqrt{a^2+c^2}$ 时,$\angle APB$ 的取值范围是 $[\pi-\arctan\frac{2bt}{t^2-b^2}, \pi]$,当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ 时,$\angle APB=\pi-\arctan\frac{2bt}{t^2-b^2}$;当且仅当 $\theta=0,\pi$ 时,$\angle APB=\pi$.

① 本文参照了贺德光在数学通讯2005年第24期发表的《椭圆中两类张角最大值的推求及其应用》中的部分内容.

(2) 当 $a < t < \sqrt{a^2 + c^2}$ 时,$\angle APB$ 的取值范围是$[\pi - \arctan \frac{bt}{c\sqrt{t^2 - a^2}},\pi]$,当且仅当 $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{c}, \pi \pm \arcsin \frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{c}, 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{c}$ 时,$\angle APB = \pi - \arctan \frac{bt}{c\sqrt{t^2 - a^2}}$;当且仅当 $\theta = 0, \pi$ 时,$\angle APB = \pi$.

证明 显然 $\angle APB$ 的最大值是 π(当且仅当 $\theta = 0, \pi$ 时取到),所以只需证明 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 的情形.

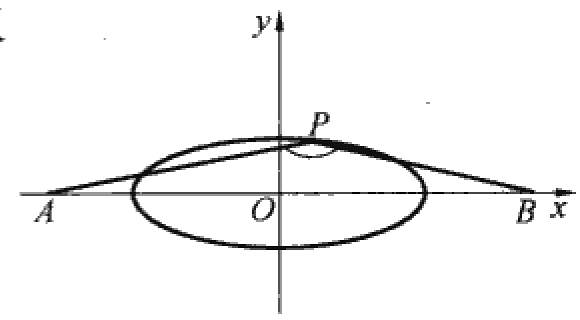


图 2

如图 2,有

$$k_{PA} = \frac{b\sin \theta}{a\cos \theta + t}, k_{PB} = \frac{b\sin \theta}{a\cos \theta - t}$$

易证 k_{PA}, k_{PB} 均存在,且 $k_{PA} \cdot k_{PB} \neq -1$,所以

$$\tan\angle APB = \frac{k_{PB} - k_{PA}}{1 + k_{PB} \cdot k_{PA}} = \frac{2bt\sin \theta}{a^2 - t^2 - c^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{-2bt}{\tan\angle APB} = \frac{t^2 - a^2}{\sin \theta} + c^2\sin \theta$$

设$\frac{-2bt}{\tan\angle APB} = y, \sin \theta = x(0 < x < 1)$,得函数 $y = \frac{t^2 - a^2}{x} + c^2x$(它在 $(0, \frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{c}]$ 上是减函数,在$[\frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{c}, +\infty)$ 上是增函数).

(1) 当 $t \geqslant \sqrt{a^2 + c^2}$ 时,$\frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{c} \geqslant 1$,此时函数 y 在$(0,1]$ 上是减函数,从而可得$\frac{-2bt}{\tan \angle APB}$ 的值随θ 的增加而减少,所以 $\tan \angle APB$ 的值随θ 的增加而减少,从而可得要证结论成立.

(2) 当 $a < t < \sqrt{a^2 + c^2}$ 时,$\frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{c} < 1$,此时函数 y 在$(0, \frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{c}]$ 上是减函数,在$[\frac{\sqrt{t^2 - a^2}}{c}, 1]$ 上是增函数,得 $y = \frac{-2bt}{\tan \angle APB}$ 的取值范围是$[2c\sqrt{t^2 - a^2}, +\infty)$,从而可得要证结论成立.

定理 3 设 $P(a\cos \theta, b\sin \theta)(\theta \in [0, 2\pi))$ 是椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0, c = \sqrt{a^2 - b^2})$ 上的动点,点 $A(-t, 0), B(t, 0)$ 是 x 轴上的两个定点($0 < t < a$),则 $\angle APB$ 的取值范围是$[0, \alpha]$(当 $t \neq b$ 时,α 由 $\tan \alpha = \frac{2bt}{b^2 - t^2}$ 及 $\alpha \in$

$(0,\pi)$ 确定;当 $t = b$ 时,$\alpha = \frac{\pi}{2}$),当且仅当 $\theta = 0,\pi$ 时,$\angle APB = 0$;当且仅当 $\theta = \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ 时,$\angle APB = \alpha$.

证明 因为$\angle APB$的大小是连续变化的,所以只需推求 $\angle APB$ 的最大值和最小值.

显然 $\angle APB$ 的最小值是0(当且仅当 $\theta = 0,\pi$ 时取到),所以只需证明 $\theta \in (0,\frac{\pi}{2}]$ 的情形.

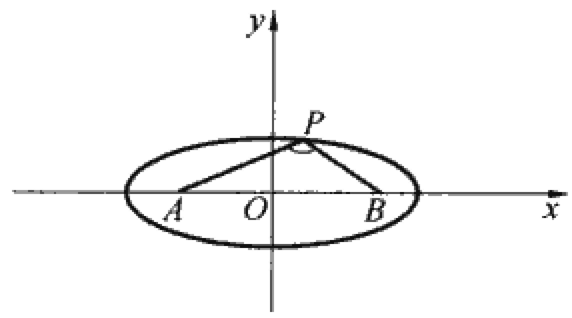


图 3

如图 3,有

$$k_{PA} = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta + t}, k_{PB} = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta - t}(\text{当} \cos\theta \neq \frac{t}{a} \text{时})$$

$$\tan\angle APB = \frac{k_{PB} - k_{PA}}{1 + k_{PB}\cdot k_{PA}} = \frac{2bt\sin\theta}{a^2 - t^2 - c^2\sin^2\theta}$$(当 $k_{PB}\cdot k_{PA} \neq -1$,即 $a^2 - t^2 \neq c^2\sin^2\theta$ 时也即 $\angle APB \neq \frac{\pi}{2}$ 时).

(因为可证 $\cos\theta = \frac{t}{a}$ 时上式仍成立:

此时 $\tan\angle APB = \cot A = \frac{1}{k_{PA}} = \frac{a\cos\theta + t}{b\sin\theta} = \frac{2at}{b\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{2bt\sin\theta}{a^2 - t^2 - c^2\sin^2\theta}$.)

$$\frac{2bt}{\tan\angle APB} = \frac{a^2 - t^2}{\sin\theta} - c^2\sin\theta(\text{当} \angle APB \neq \frac{\pi}{2} \text{时}) \quad ①$$

上式右边的值随 θ 的增加而减少,但不能说 $\tan\angle APB$ 的值随θ 的增加而增加,须分以下三种情况讨论:

(1) 当 $0 < t < b$ 时(可证 $\angle APB \neq \frac{\pi}{2}$),得 $a^2 - t^2 > c^2 \geqslant c^2\sin^2\theta$,所以由式 ① 可得 $\tan\angle APB > 0$,$\angle APB$ 是锐角,此时有 $\tan\angle APB$ 的值随θ 的增加而增加,此时得定理 3 成立.

(2) 当 $t = b$ 时(当且仅当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,$\angle APB = \frac{\pi}{2}$),又当 $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$ 时,由 ①,得

$$\frac{2bt}{\tan\angle APB} = c^2(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta) > 0$$

此时 $\angle APB$ 也是锐角;而当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,$\angle APB = \frac{\pi}{2}$,说明此时定理 3 也成立.

(3) 当 $b < t < a$ 时,$\angle APB$ 可以是钝角(比如 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时),所以当且仅当

式①的右边取最小负值也即最小值(即 $\theta=\frac{\pi}{2}$)时 $\angle APB$ 取到最大值,此时也得定理3成立.

由定理3,立得:

推论1 设 F_1,F_2 是椭圆 Γ 的两个焦点,P 是 Γ 上的动点,则 $\angle F_1PF_2$ 的取值范围是 $[0,\angle F_1CF_2]$,其中 C 是 Γ 短轴的端点,当且仅当 P 为短轴的端点时,$\angle F_1PF_2$ 取得最大值.

推论2 设 F_1,F_2 是椭圆 Γ 的两个焦点,则 Γ 上存在点 P 使 $\angle F_1PF_2=\alpha(0<\alpha<\pi)\Leftrightarrow\Gamma$ 的离心率 $e\in[\sin\frac{\alpha}{2},1)$.

证明 由推论1知,Γ 上存在点 P 使 $\angle F_1PF_2=\alpha(0<\alpha<\pi)\Leftrightarrow\angle F_1CF_2\geqslant\alpha$(其中 C 是 Γ 短轴的一个端点)$\Leftrightarrow\sin\angle F_1CO=\frac{c}{a}=e\geqslant\sin\frac{\alpha}{2}$(其中 O 是椭圆 Γ 的中心)$\Leftrightarrow e\in[\sin\frac{\alpha}{2},1)$.

用本文的方法还可推求椭圆上的点到短轴所在直线上关于椭圆中心对称的定线段的两端张角的取值范围.

一类椭圆的离心率问题

定理 椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上存在点 P 使 $\angle F_1PF_2=\alpha(0<\alpha<\pi, F_1, F_2$ 是 Γ 的左、右焦点)的充要条件为 Γ 的离心率 e 的取值范围是 $[\sin\frac{\alpha}{2},1)$.

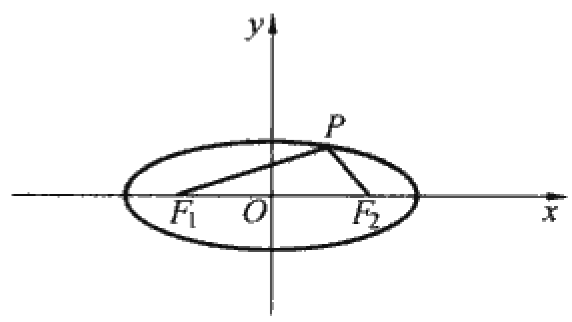


图 1

证法 1 如图 1，Γ 上存在点 P 使 $\angle F_1PF_2=\alpha$ 的充要条件是 Γ 上存在点 P 使得

$$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a\\|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\alpha=4c^2(c=\sqrt{a^2-b^2})\end{cases}$$

也即
$$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a\\|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{b^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\end{cases}$$

也即关于 z 的一元二次方程

$$z^2-2az+\frac{b^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=0$$

有且只有正数解，这又等价于此方程有实数解，即

$$\Delta=4a^2-\frac{4b^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\geqslant 0$$

得 $e\geqslant\sin\frac{\alpha}{2}$，即 $e\in[\sin\frac{\alpha}{2},1)$，证毕！

用到角公式可以证明：

引理① 设 P 是椭圆 Γ 上的动点，$F_1,F_2;A,B;C,D$ 分别是 Γ 的左、右焦点，左、右顶点，上、下顶点，又设 $\angle F_1CF_2=\theta$，则 $\angle F_1PF_2$ 的取值范围是 $[0,\theta]$，且当且仅当 P 与 A,B 重合时 $\angle F_1PF_2=0$；P 与 C,D 重合时 $\angle F_1PF_2=\theta$.

而下面对引理的证法也很巧妙.

① 贺德光. 椭圆中两类张角最大值的推求及其应用. 数学通讯，2005(24).

如图 2,设椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,它的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)(c=\sqrt{a^2-b^2})$,上顶点为 $C(0,b)$.

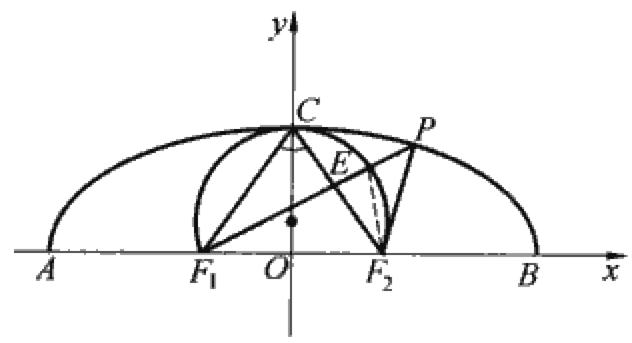


图 2

容易求得过 F_1,F_2,C 的圆的方程为

$$x^2+(y-\frac{b^2-c^2}{2b})^2=\frac{a^4}{4b^2}$$

它与上半椭圆的交点即以下方程组的解

$$\begin{cases}x^2+(y-\frac{b^2-c^2}{2b})^2=\frac{a^4}{4b^2}\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geqslant 0)\end{cases}$$

消去 x 并运用 $a^2=b^2+c^2$,可求得 $y=b,-\frac{b^3}{c^2}$,所以 $y=b$.进而得此圆与上半椭圆有唯一公共点 $C(0,b)$.再由图 2 及同弧所对的圆周角相等,得 $\angle F_1CF_2=\angle F_1EF_2\geqslant\angle F_1PF_2$(当且仅当 C,E,P 重合时取等号),进而可得引理成立.

由引理可得定理的另一巧妙证明:

证法 2 如图 3,由引理知,题设即 $\angle F_1P'F_2\geqslant\alpha$,也即 $\angle F_1P'O\geqslant\frac{\alpha}{2}$,$\sin\angle F_1P'O=\frac{c}{a}\geqslant\sin\frac{\alpha}{2}$,即 $e\in[\sin\frac{\alpha}{2},1)$.

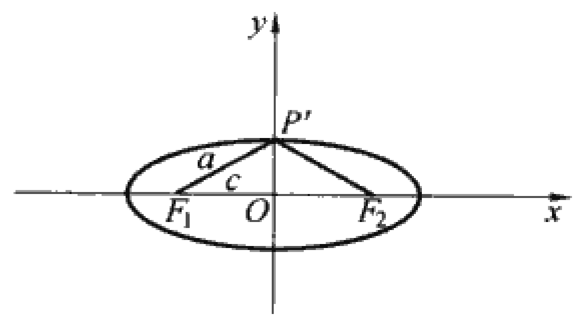


图 3

圆锥曲线焦点弦的两条性质

定理 1　圆锥曲线过焦点的弦被焦点分成两条线段长度的倒数和(或差)为定值.具体的结论是:

(1) 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的任一焦点 F 作弦 AB,则$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=\frac{2a}{b^2}$.

(2) 过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的任一焦点 F 作弦 AB.

① 当 A,B 在双曲线的一支上时,$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=\frac{2a}{b^2}$(图 1);

② 当 A,B 在双曲线的两支上且 $FA<FB$ 时,$\frac{1}{FA}-\frac{1}{FB}=\frac{2a}{b^2}$(图 2).

(3) 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作弦 AB,则$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=\frac{2}{p}$.

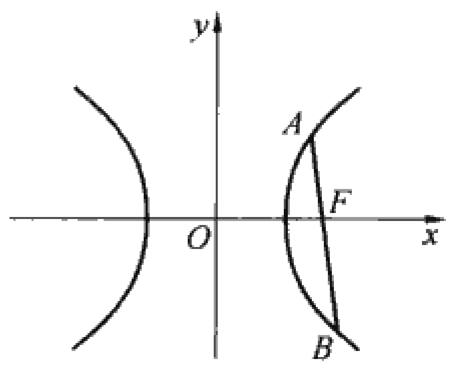


图 1

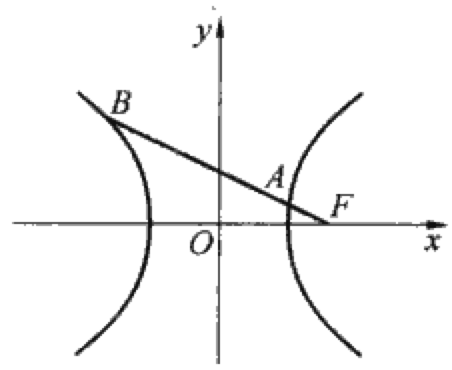


图 2

证明　以下只证(2),并且只证 F 是右焦点$(c,0)$的情形(其中 $c^2=a^2+b^2,c>0$).

① 如图 1,当直线 AB 的斜率不存在时,容易验证此时结论成立.

当直线 AB 的斜率存在时,设斜率为 k,得直线 $AB:y=k(x-c)$,又设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=k(x-c)\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$,得

$$(b^2-a^2k^2)x^2+2a^2ck^2x-a^2(b^2+k^2c^2)=0$$

$$x_1+x_2=\frac{2a^2ck^2}{a^2k^2-b^2},x_1x_2=\frac{a^2(b^2+k^2c^2)}{a^2k^2-b^2} \quad ①$$

又由焦半径公式,得

$$|FA|=|a-ex_1|,FB=|a-ex_2|(\text{其中 } e=\frac{c}{a})$$

所以

$$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=\frac{1}{ex_1-a}+\frac{1}{ex_2-a}=\frac{e(x_1+x_2)-a}{ex_1x_2-ae(x_1+x_2)+a^2} \qquad ②$$

再由式①,可证得此时结论①也成立.

② 显然直线 AB 的斜率存在.设 $AB:y=k(x-c),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$. 可得结论①在这里也成立,所以

$$\frac{1}{FA}-\frac{1}{FB}=\frac{1}{ex_1-a}-\frac{1}{a-ex_2}=\frac{1}{ex_1-a}+\frac{1}{ex_2-a}$$

再由式②可得结论②成立.

定理 2 若焦点 F 在 x 轴上的圆锥曲线的焦点弦 AFB 与 y 轴交于点 P,则 A,B 分有向线段 $\overline{PF}$ 所成的定比之和为定值.具体的情形是:

(1) 当圆锥曲线是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 时,定值为 $-\frac{2a^2}{b^2}$;

(2) 当圆锥曲线是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^*)$ 时,定值为 $\frac{2a^2}{b^2}$;

(3) 当圆锥曲线是抛物线 $y^2=2px(p\neq 0)$ 时,定值为 -1.

(对于焦点在 y 轴上的圆锥曲线也有类似的结论)

证明 (1) 不妨设 $F(c,0)$.

又设 $AB:y=k(x-c),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AF}}+\frac{\overline{PB}}{\overline{BF}}=\frac{x_P-x_1}{x_1-x_F}+\frac{x_P-x_2}{x_2-x_F}=\frac{0-x_1}{x_1-c}+\frac{0-x_2}{x_2-c}=$$

$$-\frac{a^2ck^2+ab^2\sqrt{k^2+1}}{-b^2(c-a\sqrt{k^2+1})}-\frac{a^2ck^2-ab^2\sqrt{k^2+1}}{-b^2(c+a\sqrt{k^2+1})}=-\frac{2a^2}{b^2}$$

(2) 即把以上证明中的"b^2"改为"$-b^2$"即可.

(3) 得 $F(\frac{p}{2},0)$,设 $AB:x=my+\frac{p}{2}(m\neq 0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(0,-\frac{p}{2m})$.

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AF}}+\frac{\overline{PB}}{\overline{BF}}=\frac{y_P-y_1}{y_1-y_F}+\frac{y_P-y_2}{y_2-y_F}=\frac{-\frac{p}{2m}-y_1}{y_1}+\frac{-\frac{p}{2m}-y_2}{y_2}=$$

$$-\frac{p}{2m}\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}-2=-\frac{p}{2m}\cdot\frac{2pm}{-p^2}-2=-1$$

以上定理 2 的证明中的 x_1,x_2 是直接解一元二次方程得到的结果,这比用韦达定理要简洁(定理 1 也可这样证).

一个问题的解答

定理 过定点 $P(a,b)(ab\neq 0)$ 的直线 l 与两坐标轴围成的三角形面积为常数 S 的直线 l 的条数为：

(1) 当 $0<S<2|ab|$ 时为 2 条；

(2) 当 $S=2|ab|$ 时为 3 条；

(3) 当 $S>2|ab|$ 时为 4 条.

证明 设 $l:\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$，则

$$\begin{cases}\frac{a}{A}+\frac{b}{B}=1\\ \frac{1}{2}|AB|=S\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\frac{a}{A}+\frac{b}{B}=1\\ \frac{a}{A}\cdot\frac{b}{B}=\pm\frac{|ab|}{2S}\end{cases}$$

所以 $\frac{a}{A},\frac{b}{B}$ 是以下每个关于 z 的一元二次方程

$$z^2-z\pm\frac{|ab|}{2S}=0$$

的两个根.

因为方程

$$z^2-z-\frac{|ab|}{2S}=0 \qquad ①$$

的判别式 $\Delta_1=1+\frac{2|ab|}{S}>0$，所以①有两个不相等的实数根，此时可得 (A,B) 的两组解，也得满足条件的两条直线 l.

因为方程

$$z^2-z+\frac{|ab|}{2S}=0 \qquad ②$$

的判别式 $\Delta_2=1-\frac{2|ab|}{S}=\frac{S-2|ab|}{S}$，所以

当 $0<S<2|ab|$ 时，方程②无实数解，此时得不到 (A,B) 的解；

当 $S=2|ab|$ 时,方程②有两个相等的实数解,此时得 (A,B) 的一组解;

当 $S>2|ab|$ 时,方程②有两个不相等的实数解,此时得 (A,B) 的两组解.

综上所述,可得定理成立.

注 由定理的证明过程还可求出满足条件的直线 l 的方程.

例 若过点 $P(-1,1)$ 的直线 l 与两坐标轴围成的三角形面积分别是1,2,10,则这样的直线 l 分别有几条?

解 由定理立知,分别为2,3,4条.

立体几何



地球表面已知经纬度的两点的球面距离公式

文献[1]给出了任意时刻钟表上时针、分针、秒针所夹角度的计算公式,本文再给出地球表面任意两点(知道它们的经度和纬度)的球面距离公式.

当我们把地球看做一个球时(通常认为地球半径 $R \approx 6\ 371$ km),经线就是地球表面从北极到南极的半个大圆;赤道是一个大圆,其余的纬线都是小圆.经线所在的平面与赤道面垂直,纬线所在的平面与赤道面平行.0° 经线也叫做本初子午线,东经 180° 经线和西经 180° 经线重合,即 180° 经线,0° 经线和 180° 经线合成一个通过南北两极的大圆.某地点的经度,就是经过这点的经线及地轴确定的半平面与 0° 经线及地轴确定的半平面所成二面角的度数;某地点的纬度,就是经过这点的球半径与赤道面所成角的度数.

地球表面某点的经纬度坐标定义 设地球表面点 A 的经度是 α(指东经 α,把西经 $-\alpha$ 也记作东经 α,$\alpha \in [-180^\circ, 180^\circ]$),纬度是 β(指北纬 β,把南纬 $-\beta$ 也记作北纬 β,$\beta \in [-90^\circ, 90^\circ]$),就说地球表面上点 A 的经纬度坐标是 (α, β),记作 $A(\alpha, \beta)$.显然,地球表面除南极点,北极点之外的点与其经纬度坐标是一一对应的.

引理 设地球表面上点 A, B 的经度分别是 α_1, α_2,过点 A, B 的经线分别与赤道交于点 A', B',点 O 是球心(下同),则 $\angle A'OB'$(本文中角的范围是 $[0^\circ, 180^\circ]$)$= 180^\circ - |180^\circ - |\alpha_1 - \alpha_2||$,$\cos \angle A'OB' = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$.

证明 当 $|\alpha_1 - \alpha_2| \in [0^\circ, 180^\circ]$ 时,$\angle A'OB' = |\alpha_1 - \alpha_2|$;

当 $|\alpha_1 - \alpha_2| \in (180^\circ, 360^\circ]$ 时,$\angle A'OB' = 360^\circ - |\alpha_1 - \alpha_2|$.

从而可得,恒有 $\angle A'OB' = 180^\circ - |180^\circ - |\alpha_1 - \alpha_2||$.

由 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ 及 $\cos|\alpha| = \cos\alpha$,可证 $\cos\angle A'OB' = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$.

定理 若地球表面上点 A, B 的经纬度坐标分别是 $A(\alpha_1, \beta_1)$,$B(\alpha_2, \beta_2)$,则 A, B 的球面距离 $\overset{\frown}{AB} = R\arccos[\sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$.

证明 分四种情形来证.

(1)当 $\beta_1 \geqslant 0, \beta_2 \geqslant 0$ 时.

先证 $\beta_1 > \beta_2 > 0$ 的情形.

如图1,设 AC, BD 均是赤道面上的垂线,C, D 是垂足,得

$\angle AOC = \beta_1, \angle BOD = \beta_2, AC = R\sin\beta_1$

$BD = R\sin\beta_2, OC = R\cos\beta_1, OD = R\cos\beta_2$

因为 $\beta_1 > \beta_2 > 0$,所以

$$AC > BD. \angle COD = \angle A'OB'$$

由余弦定理及引理,得

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD\cos\angle A'OB' = R^2\cos^2\beta_1 + R^2\cos^2\beta_2 - 2R^2\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \quad ①$$

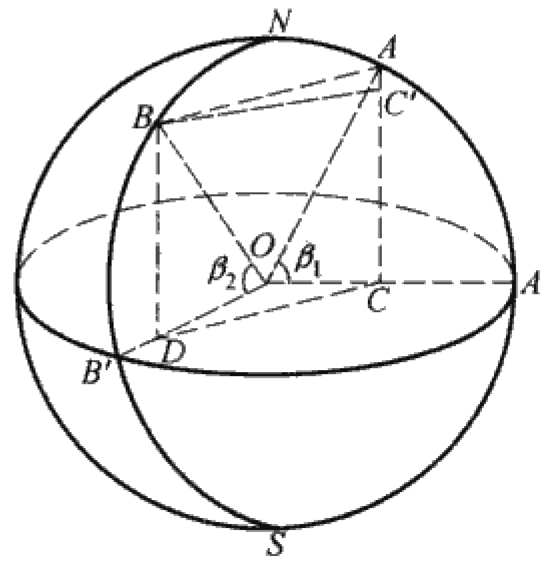


图 1

因为 $AC \parallel BD$,所以作 $BC' \parallel DC$ 时,可得 C' 在线段 AC 上(C' 与 A,C 均不重合),且 $\angle AC'B = 90°$,有

$$AB^2 = AC'^2 + BC'^2 = (AC - BD)^2 + CD^2 = (R\sin\beta_1 - R\sin\beta_2)^2 + R^2\cos^2\beta_1 + R^2\cos^2\beta_2 - 2R^2\cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 2R^2[1 - \sin\beta_1\sin\beta_2 - \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \quad ②$$

再由余弦定理,得

$$\cos\angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \quad ③$$

所以 $\overset{\frown}{AB} = R\theta$($\theta$ 表示 $\angle AOB$ 的弧度数,下同) $=$

$$R\arccos[\sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \quad ④$$

对于"$\beta_1 \geqslant 0, \beta_2 \geqslant 0$"的除"$\beta_1 > \beta_2 > 0$"的其他情形,把以上证法略加改动也可证出.

(2) 当 $\beta_1 \leqslant 0, \beta_2 \leqslant 0$ 时.

同(1)可证得

$$\overset{\frown}{AB} = R\arccos[\sin(-\beta_1)\sin(-\beta_2) + \cos(-\beta_1)\cos(-\beta_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

从而可得此时定理成立.

(3) 当 $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$ 时.

如图 2,设 AC, BD 均是赤道面的垂线,C, D 是垂足,得

$$\angle AOC = \beta_1, \angle BOD = -\beta_2, AC = R\sin\beta_1$$

$$BD = R\sin(-\beta_2) = -R\sin\beta_2, OC = R\cos\beta_1$$

$$OD = R\cos(-\beta_2) = R\cos\beta_2, \angle COD = \angle A'OB'$$

可证式 ① 在这里也成立.

因为 $AC \parallel BD$，所以作 $BC' \parallel DC$ 时，可得 C' 在 AC 的延长线上，且 $\angle AC'B = 90°$，有

$$AB^2 = AC'^2 + BC'^2 = (AC + BD)^2 + CD^2 = (R\sin\beta_1 - R\sin\beta_2)^2 + CD^2$$

从而有 ②，③，④ 在这里均成立，即此时定理也成立.

(4) 当 $\beta_1 < 0, \beta_2 > 0$ 时，同(3) 可证.

总之，定理成立.

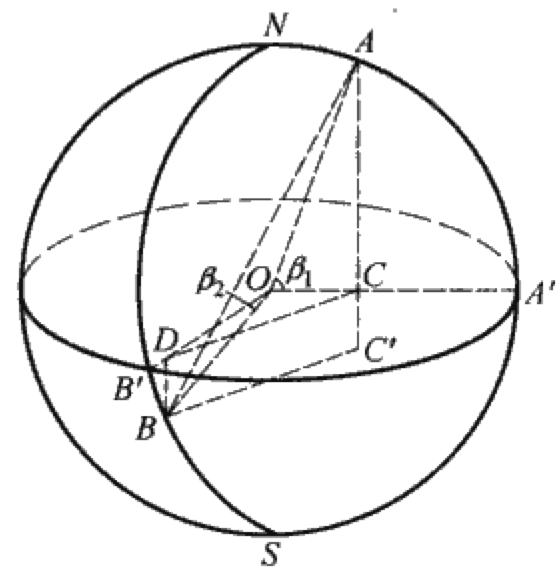


图 2

推论 (1) 若地球表面 β 纬线上两点 A, B 的经度分别是 α_1, α_2，则 $\widehat{AB} = R\arccos[\sin^2\beta + \cos^2\beta\cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$；

(2) 若地球表面 α 经线上两点 A, B 的纬度分别是 β_1, β_2，则 $\widehat{AB} = \frac{\pi R}{180}|\beta_1 - \beta_2|$.

证明 在定理中 $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ 可证得(1)，令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ 可证得(2).

高中生也可用以下方法直接证得：

(1) 只证 $\beta > 0$ 的情形.

如图 3，设 β 纬线的圆心是 O'，有 $OA' \parallel O'A, OB' \parallel O'B$，所以 $\angle A'OB' = \angle AO'B$，$\angle O'AO = \angle AOA' = \beta$，也可由引理得

$$\cos\angle AO'B = \cos\angle A'OB' = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

有 $OO' \perp O'A$，所以

$$O'A = O'B = R\cos\beta$$

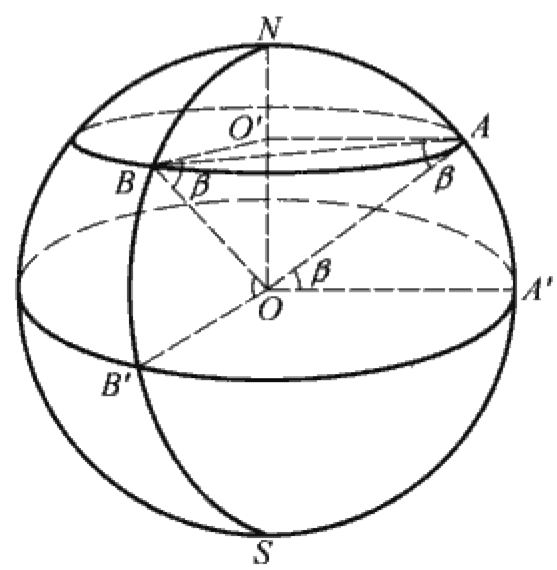


图 3

$$AB^2 = O'A^2 + O'B^2 - 2O'A \cdot O'B\cos\angle AO'B = 2R^2\cos^2\beta[1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

$$\cos\angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \sin^2\beta + \cos^2\beta\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

所以 $$\widehat{AB} = R\arccos[\sin^2\beta + \cos^2\beta\cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

(2) 因为“经线就是地球表面从北极到南极的半个大圆”，所以

$$\widehat{AB} = R\theta = \frac{\pi R}{180}|\beta_1 - \beta_2|$$

例 城市 A 位于东经 110°，南纬 60°，城市 B 位于西经 25°，北纬 45°. 一架飞机从 A 竖直上升到 15 km 的高空，再沿最短路程飞行到城市 B 竖直 15 km 的高

空,最后竖直下降到 B.飞机在整个行程中的平均速度是 1 200 km/h, 取地球半径 R = 6 371 km,求飞机飞行的路程 s 及时间 t(答案取整数).

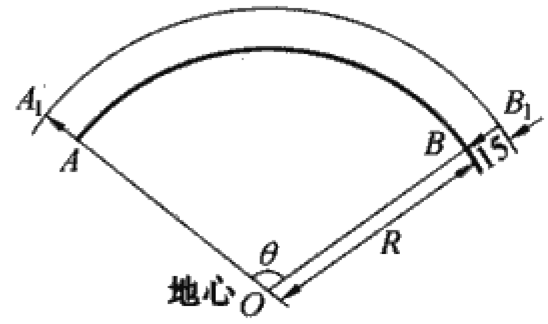


图 4

解 A,B 的经纬度坐标分别是 $A(110°,-60°)$,$B(-25°,45°)$.把 $\alpha_1=110°,\beta_1=-60°,\alpha_2=-25°,\beta_2=45°$ 代入定理,得

$$\overset{\frown}{AB}=R\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}+1}{4}\right)$$

由图 4 及弧长公式,得

$$\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\overset{\frown}{AB}}=\frac{(R+15)\theta}{R\theta}=\frac{R+15}{R}$$

所以
$$\overset{\frown}{A_1B_1}=\frac{R+15}{R}\cdot\overset{\frown}{AB}=(R+15)\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}+1}{4}\right)$$

$$s=\overset{\frown}{A_1B_1}+2\times15\approx16\ 702\ (\text{km})$$

$$t=\frac{S}{v}\approx14\ (\text{h})$$

注 也可用定理直接计算 $\overset{\frown}{A_1B_1}$:只需把定理中的"R"换成"$R+15$"即可.

参考文献

[1] 甘志国.钟表上时针、分针、秒针所夹的角度[J].数学通讯,2000(7):35-36.

正棱锥的侧面所成二面角的范围

例 求证:正四棱锥相邻两个侧面所成的二面角大于90°.这个结论对于正三棱锥还成立吗?

这是文献[1]及很多资料上都可见到的例题.实际上还有以下一般的结论:

定理 设正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边 A_1A_2 与边 A_iA_{i+1}($i=2,3,\cdots,n$,约定 $A_{n+1}=A_1$)所成角的大小是 α_i(α_i 是这样规定的:当 $A_1A_2 /\!/ A_iA_{i+1}$ 时,$\alpha_i=0°$;当 A_1A_2 与 A_iA_{i+1} 不平行时,设 $A_1A_2\cap A_iA_{i+1}=E$,则 $\alpha_i=\angle A_1EA_2$.用正 n 边形的性质可以求出 α_i,但笔者希望读者能求出 α_i 的表达式),则正 n 棱锥 $V-A_1A_2\cdots A_n$ 的侧面 VA_1A_2,VA_iA_{i+1} 所成二面角的大小 U_i 的取值范围是$(\alpha_i,180°)$.

证明 (1)当 $A_1A_2 /\!/ A_iA_{i+1}$ 时,以下只证正四棱锥的情形(其余情形的证明是类似的).

如图1,在正四棱锥中,$A_1A_2 /\!/ A_3A_4$,$\alpha_3=0°$.设面 VA_1A_2,VA_3A_4 的交线是 VT,因为 $A_1A_2 /\!/ A_3A_4$,所以 $A_1A_2 /\!/ A_3A_4 /\!/ VT$(两个相交平面内各一条直线若互相平行,则这两条直线也与这两个平面的交线平行).

作 $VB\perp A_1A_2$,$VC\perp A_3A_4$,B,C 是垂足,则 $\angle BVC$ 为面 VA_1A_2,VA_3A_4 所成二面角的大小 U_3.

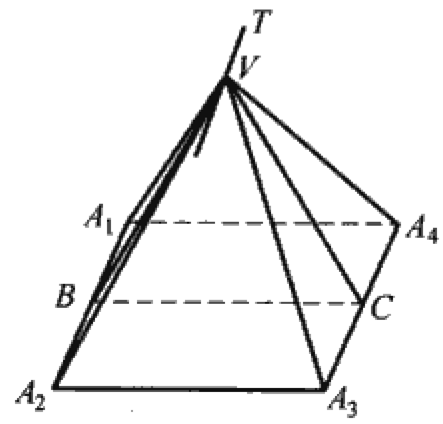


图1

可证此时等腰$\triangle VBC$的顶角$\angle BVC$即U_3的取值范围是$(0°,180°)$.

(2)当 A_1A_2 与 A_iA_{i+1} 不平行时,以下只证正五棱锥中 $i=3$ 的情形(其余情形的证明也是类似的).

如图2,设 $A_1A_2\cap A_3A_4=E$,$\angle A_1EA_3=\alpha_3$.

在正五棱锥中,设顶点 V 在底面上的射影是点 O,则点 O 是底面正多边形的中心,也是内心,所以点 O 到A_1A_2,A_3A_4的距离相等,OE是$\angle A_1EA_3$的角平分线.

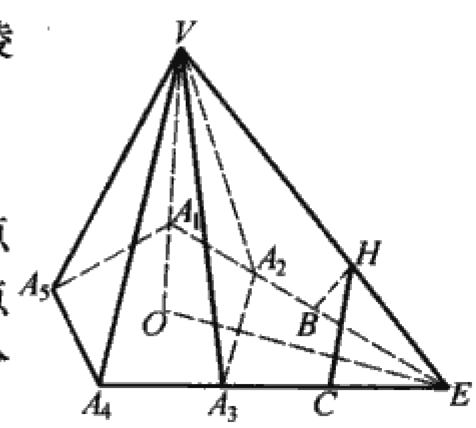


图2

又 VE 在底面上的射影是 OE,所以 $\angle VEA_3=$

$\angle VEA_1$.

设 $H \in VE$，作 $HB \perp VE$，$HC \perp VE$，H 为垂足，$B \in A_2E$，$C \in A_3E$，则 $\triangle BHE \cong \triangle CHE$（角边角），得

$$HB = HC, EB = EC, U_3 = \angle BHC$$

$$\cos U_3 = \frac{HB^2 + HC^2 - BC^2}{2HB \cdot HC} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{HB}\right)^2$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{EB^2 + EC^2 - BC^2}{2EB \cdot EC} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{EB}\right)^2$$

可得 $\cos U_3 < \cos \alpha_3$，所以 $U_3 > \alpha_3$.

当 $VO \to 0$ 时，点 H 与线段 BC 的中点靠近，$\frac{BC}{HB} \to 2$，$\cos U_3 \to -1$，$U_3 \to 180°$；

当 $VO \to +\infty$ 时，$\angle HEB \to 90° = \angle BHE$，$HB \to EB$，$\cos U_3 \to \cos \alpha_3$，$U_3 \to \alpha_3$.

说明 U_3 的取值范围是 $(\alpha_3, 180°)$.

推论　正 n 棱锥相邻两侧面所成的二面角大于 $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$.

参考文献

[1] 金凌云. 中等数学基础知识纵横讲[M]. 武汉：武汉工业大学出版社，1989:352.

三角余弦定理的一个运用

三角余弦定理 如图 1，AO，AB 分别是平面 α 的斜线，垂线；斜足，垂足分别是 O，B；$OC \subset \alpha$，$AC \perp OC$，C 为垂足，则

$$\cos\angle AOB \cdot \cos\angle BOC = \cos\angle AOC \quad ①$$

由 ① 立得 $\angle AOB < \angle AOC$，此结论即最小角定理.

下面给出三角余弦定理的一个运用.

例 如图 2，直线 a，b 相交于点 O，a，b 所成的锐角是 $60°$，过 O 与 a，b 都成 α($0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$) 角的直线有几条？

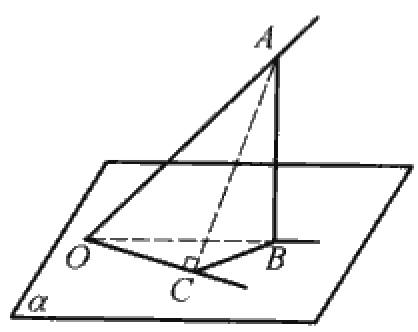


图 1

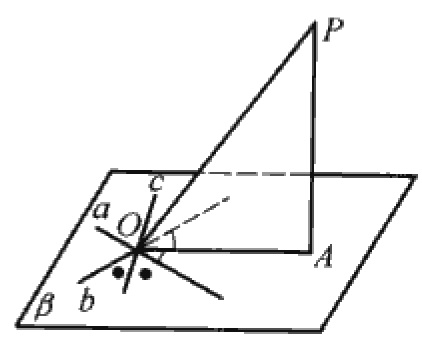


图 2

解 由全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(下 A)》(2004 年人民教育出版社)第 29 页第 11 题的结论"从一个角的顶点引这个角所在平面的斜射线，使斜射线和这个角两边的夹角相等，则斜射线在平面内的射影是这个角的平分线"可得：

过点 O 与 a，b 都成 α 角的直线 OP 在 α 内的射影是 a，b 形成角的平分线所在的直线(图 2 中的直线 c，OA).

在图 2 中，直线 OA 与 a，b 所成的锐角都是 $30°$，直线 c 与 a，b 所成的锐角都是 $60°$，当图 2 中的 OP 与 OA 不重合时(OP 在 α 内的射影是 OA)，由 ① 得

$$\cos\angle POA \cdot \cos 30° = \cos\angle POB = \cos\alpha$$

所以 $\cos 30° > \cos\alpha$，$\alpha > 30°$.

由以上讨论，可得本题的答案为：

(1) 当 $0° \leqslant \alpha < 30°$ 时，所求直线的条数为 0；

(2) 当 $\alpha = 30°$ 时，所求直线的条数为 1；

(3) 当 $30° < \alpha < 60°$ 时，所求直线的条数为 2；

(4) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时,所求直线的条数为 3;

(5) 当 $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时,所求直线的条数为 4;

(6) 当 $\alpha = 90^\circ$ 时,所求直线的条数为 1.

正三棱锥的两个充要条件

定理 1 底面是正三角形的三棱锥是正三棱锥的充要条件是这个三棱锥有两组对棱互相垂直.

证明 如图 1,设点 S 在底面上的射影是点 O,则:

三棱锥 $S-ABC$ 是正三棱锥 $\Leftrightarrow$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的中心 $\Leftrightarrow OA\perp BC$ 且 $OB\perp AC\Leftrightarrow SA\perp BC$ 且 $SB\perp AC$.

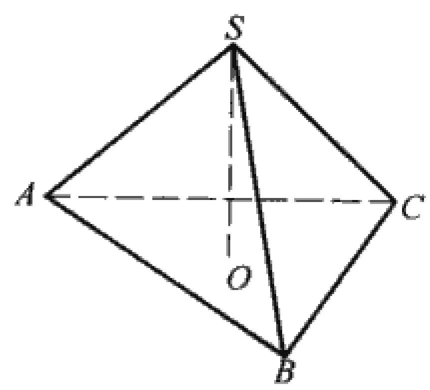


图 1

定理 2 底面是正三角形的三棱锥是正三棱锥的充要条件是这个三棱锥的底面(正三角形)有一个顶点在它所对侧面上的射影是该侧面的垂心.

证明 如图 2,设点 A 在侧面 $\triangle SBC$ 上的射影是点 H,则:

三棱锥 $S-ABC$ 是正三棱锥 $\Leftrightarrow SA\perp BC$ 且 $SB\perp AC$(定理 1)$\Leftrightarrow SH\perp BC$ 且 $SB\perp CH\Leftrightarrow$ 点 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心.

例 1 如图 3,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,底面 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形,点 A 在面 BCC_1B_1 上的射影是 $\triangle BCC_1$ 的垂心 H,$CC_1=2\sqrt{3}$.

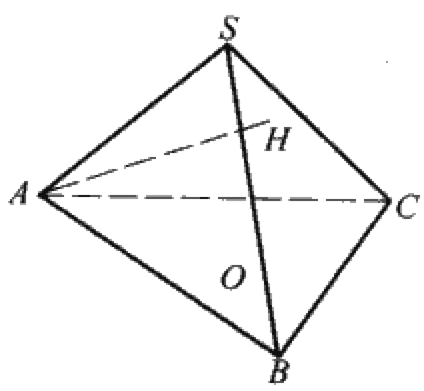


图 2

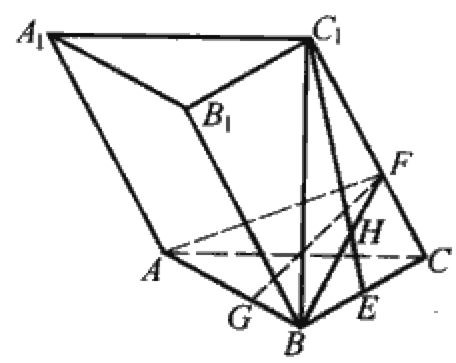


图 3

(1) 求证:$CC_1\perp AB$;

(2) 求二面角 $A-BB_1-C$ 的大小;

(3) 求 C_1 到面 ABB_1A_1 的距离.

解 (1) 在三棱锥 C_1-ABC 中,$\triangle ABC$ 是正三角形,点 A 在侧面 $\triangle BCC_1$

上的射影是 $\triangle BCC_1$ 的垂心,所以有正三棱锥 C_1-ABC(定理2),所以 $CC_1\perp AB$(定理1).

(2) 如图3,设 $BH\cap CC_1=F$.因为 H 是 $\triangle BCC_1$ 的垂心,所以 $CC_1\perp BF$.又由(1)得 $CC_1\perp AB$,所以 $CC_1\perp$ 面 ABF.也得 $BB_1\perp$ 面 ABF,所以 $\angle ABF$ 是二面角 $A-BB_1-C$ 的平面角.

由正三棱锥 C_1-ABC 知,$C_1B=C_1C=2\sqrt{3}$,所以 $BE=EC=\frac{3}{2}$.由此,得

$$C_1E=\sqrt{2(\sqrt{3})^2-(\frac{3}{2})^2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$BF=\frac{BC\cdot C_1E}{CC_1}=\frac{3\times\frac{\sqrt{39}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{13}$$

在三棱锥 C_1-ABC 中,可证 $AF=BF=\frac{3}{4}\sqrt{13}$.设 G 是 AB 的中点,得

$$BG=\frac{3}{2},FG=\sqrt{(\frac{3}{4}\sqrt{13})^2-(\frac{3}{2})^2}=\frac{9}{4}$$

$$\tan\angle ABF=\frac{FG}{BG}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

所以所求二面角的大小为 $\angle ABF=\arctan\frac{3}{2}$.

(3) 在(2)中已证 $BB_1\perp$ 面 ABF,所以 $FG\perp BB_1$.

又由 $FA=FB$,G 是 AB 的中点知 $FG\perp AB$,所以 $FB\perp$ 面 ABB_1A_1.

由 $CC_1\,//$ 面 ABB_1A_1 知,C_1 到面 ABB_1A_1 的距离即 F 到面 ABB_1A_1 的距离,也即 $FG=\frac{9}{4}$.

例2 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形,点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心,$SA=a$,则此三棱锥体积的最大值是(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$　　C. $\frac{1}{3}a^3$　　D. $\frac{1}{6}a^3$

解 由定理理2,得正三棱锥 $S-ABC$.由图2,得

$$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}AH\cdot S_{\triangle SBC}=\frac{1}{3}AH\cdot(\frac{1}{2}SB\cdot SC\cdot\sin\angle BSC)\leqslant$$

$$\frac{1}{3}SA\cdot(\frac{1}{2}SB\cdot SC)=\frac{1}{6}a^3$$

即当且仅当 SA, SB, SC 两两垂直时，V_{S-ABC} 取得最大值$\frac{1}{6}a^3$，选 D.

在例 2 的解答中，还证明了：

定理 3　在三棱锥 $S-ABC$ 中，若三条侧棱长分别为 $SA=a, SB=b, SC=c$，则当且仅当 SA, SB, SC 两两垂直时，V_{S-ABC} 取得最大值，且最大值是 $\frac{1}{6}abc$.

一种求二面角问题的通法

我们经常会遇到求有公共边的两个三角形平面所成二面角的大小.

如图1,三棱锥 $A-BPQ$ 的六条棱均已知,求二面角 $P-AB-Q$ 的大小.

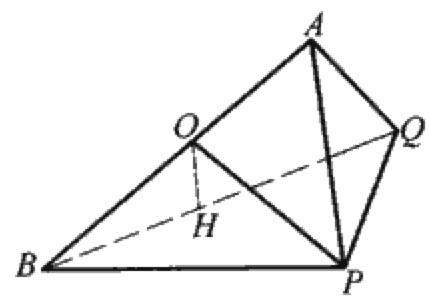


图1

作 $PO\perp AB$,$HO\perp AB$,O 均为垂足,O,H 分别在直线 AB,BQ 上.

由面积法容易算出 PO,进而也可得 BO 的长度.在 $\triangle ABQ$ 中可算出 $\angle ABQ$,所以在 $\triangle BOH$ 中,可算出 OH,BH.在 $\triangle PBQ$ 中可算出 $\angle PBQ$,所以在 $\triangle PBH$ 中可算出 PH.$\triangle OHP$ 的三边均已算出,$\angle POH$ 当然可以算出,$\angle POH$ 即二面角 $P-AB-Q$ 的大小.

例 如图2,已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是直角梯形:$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$,$AB=BC=PB=PC=2CD=2$,侧面 $PBC\perp$ 底面 $ABCD$,O 是 BC 的中点,$AO\cap BD=E$.

(1) 求二面角 $B-PA-O$ 的大小;

(2) 求二面角 $C-PA-O$ 的大小;

(3) 求证面 $PAD\perp$ 面 PAB.

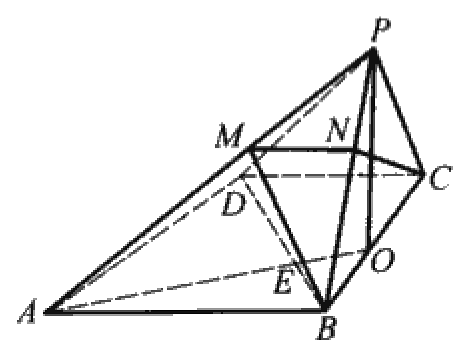


图2

解 (1) 易知 $PO\perp$ 面 $ABCD$,所以 $BE\perp PO$.又

$$\tan\angle AOB=\frac{AB}{BO}=2,\cot\angle CBD=\frac{BC}{CD}=2$$

所以 $\angle AOB$ 与 $\angle CBD$ 互余,得 $BE\perp AO$,所以 $BE\perp$ 面 APO.

设 M 是 AP 的中点,因为 $BA=BP=2$,所以 $BM\perp AP$.由三垂线定理知,$\angle BME$ 是二面角 $B-PA-O$ 的平面角.

易得 $AM=MP=\sqrt{2}$,所以

$$BM=\sqrt{BA^2-AM^2}=\sqrt{2}$$

$$BE=\frac{AB\cdot BO}{AO}=\frac{2\times 1}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\angle BME=\frac{BE}{BM}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

二面角 $B-PA-O$ 的大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$.

注 此解法比较巧妙,巧在要观察出 $BE\perp$ 面 PAO,进而由三垂线定理作出二面角的平面角.读者也可用本文介绍的通法来解决(运算量略大一些).

(2) 只好用通法来解答了.

如图 3,$PA=2\sqrt{2}$,$PO=\sqrt{3}$,$AO=\sqrt{5}$,$PC=2$,$AC=2\sqrt{2}$,$OC=1$.

作 $OT\perp PA$,$ST\perp PA$,T 均为垂足,T,S 分别在直线 AP,AC 上.

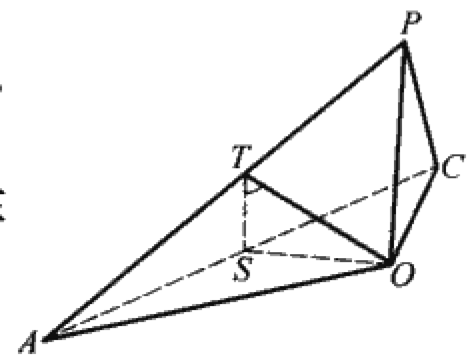


图 3

直角 $\triangle AOP$ 斜边上的高

$$OT=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{30}}{4}$$

$$AT=\sqrt{AO^2-OT^2}=\sqrt{5-\frac{30}{16}}=\frac{5}{4}\sqrt{2}$$

$$\cos\angle PAC=\frac{3}{4},\sin\angle PAC=\frac{\sqrt{7}}{4},TS=AT\sin\angle PAC=\frac{5}{16}\sqrt{14}$$

$$AS=AT\cos\angle PAC=\frac{15}{16}\sqrt{2},\cos\angle OAC=\frac{3}{\sqrt{10}},OS=\frac{\sqrt{290}}{16}$$

在 $\triangle OST$ 中,$OS=\frac{\sqrt{290}}{16}$,$ST=\frac{5}{16}\sqrt{14}$,$OT=\frac{\sqrt{30}}{4}$,所以

$$\cos\angle OTS=\frac{9}{140}\sqrt{105}$$

二面角 $C-PA-O$ 的大小为 $\arccos\frac{9}{140}\sqrt{105}$.

(3) 设 PB 的中点是 N,连结 DM,MN,NC.

因为 $MN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$,得 $\square CDMN$,$CN\parallel DM$.

由 $CN\perp PB$,$CN\perp AB$(因为 $AP\perp PO$,$AB\perp BC$,所以 $AB\perp$ 面 PBC).

得 $CN\perp$ 面 PAB,$DM\perp$ 面 PAB,面 $PAD\perp$ 面 PAB.

如果没想到作此辅助线,也可用本文的通法求二面角 $B-PA-D$ 的大小.

一个猜想的否定

文献[1],[2]证明了：

定理1 球与其外切多面体（圆柱或圆锥、圆台）的表面积之比等于它们的体积之比.

文献[2]进而又提出：

猜想1 球与其外切几何体的表面积之比等于它们的体积之比.

本文否定这个猜想.

由定理1,可联想到以下结论：

定理2 圆与其外切多边形的周长之比等于它们的面积之比.

证明 如图1,只证圆外切多边形是四边形的情形（其余的情形完全类似）.可不妨设圆的半径为1.连结圆心 O 与各切点,若能证得

$$\frac{\overset{\frown}{RS}}{AR+AS}=\frac{\text{扇形 } ORS \text{ 的面积}}{\text{四边形 } ORAS \text{ 的面积}}$$

再由等比性质,立得定理2成立.

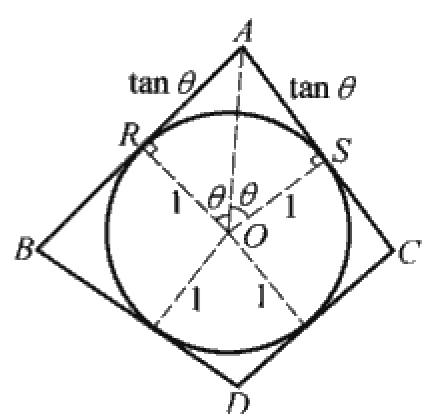


图1

设 $\angle AOS$ 的弧度数是 θ,得 $AR = AS = \tan\theta$,即证

$$\frac{2\theta\times 1}{2\tan\theta}=\frac{\frac{1}{2}\times 2\theta\times 1^2}{2\times\frac{1}{2}\tan\theta\times 1}$$

这是成立的！所以定理2成立.

由定理2成立,可以提出：

猜想2 圆与其外切曲边形（曲边形的各边为线段或曲线段）的周长之比等于它们的面积之比.

否定 由图2可举出反例：可得

$$\frac{\text{圆 } O \text{ 的周长}}{\text{扇形 } O'AB \text{ 的周长}}\neq\frac{\text{圆 } O \text{ 的面积}}{\text{扇形 } O'AB \text{ 的面积}}$$

即

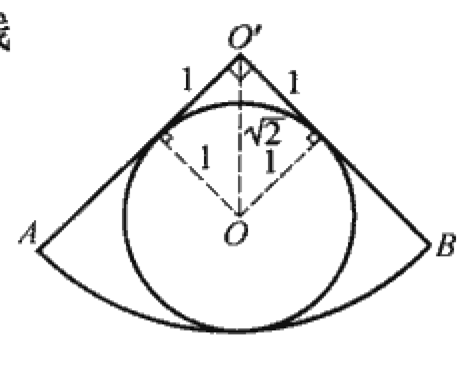


图2

$$\frac{2\pi\times 1}{2(1+\sqrt{2})+\frac{1}{4}\times 2\pi(\sqrt{2}+1)}\neq\frac{\pi\times 1^2}{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)^2}$$

这由 $\pi\neq 2\sqrt{2}$ 可得.

猜想1的否定 如图3,设想将球 O' 从球心 O' 处互相垂直的切三刀,得到几何体 $O'-ABC(O'A,O'B,O'C$ 两两垂直),设其内切球 O 的半径为1,可算得球 O' 的半径为$\sqrt{2}+1$,得

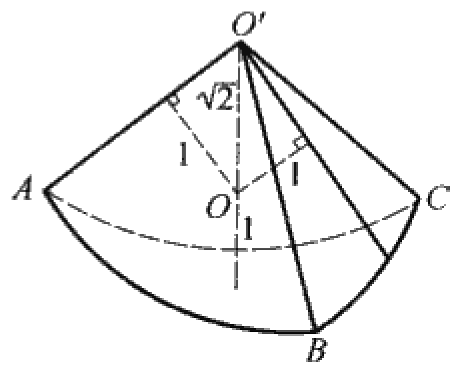


图3

$$\frac{\text{球 }O\text{ 的表面积}}{\text{几何体 }O'-ABC\text{ 的表面积}}\neq\frac{\text{球 }O\text{ 的体积}}{\text{几何体 }O'-ABC\text{ 的体积}}$$

即
$$\frac{4\pi\cdot 1^2}{3\cdot\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+1)^2+\frac{1}{8}\cdot 4\pi(\sqrt{2}+1)^2}\neq\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3}{\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}+1)^3}$$

这由 $3\neq 2\sqrt{2}$ 可得.

本文否定了文献[2]的猜想1,又文献[2]的猜想2与猜想1等价,所以文献[2]的猜想1,2均不成立.

本文降维、升维的思想方法也很重要.

参考文献

[1] 于新华.从"圆柱容球"谈起——"柱锥台球"中的一个有趣共性[J].数学通讯,2006(5):17-18.

[2] 田富德.多面体容球的一个有趣共性[J].数学通讯,2006(17):15-17.

用平面几何中的平行公理证立体几何中的公理4

在平面几何中，平行线的传递性是平行公理(过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行)的推论；在立体几何中，平行线的传递性即教科书[1]第10页的公理4.

实际上，该公理4可由平面几何中的平行公理简洁证得(这是高中师生应当明白的)，当然还要用到直线和平面平行的判定定理及性质定理(文献[1]的第17页). 虽然文献[1]把线面平行的判定、性质定理安排在公理4之后，但线面平行的判定、性质定理的证明丝毫没有用到公理4，所以以下证明没有犯"循环论证"的错误.

已知：$a \parallel c, b \parallel c$，求证：$a \parallel b$.

证明 当 a,b,c 共面时，由平面几何中的平行公理知成立.

下证 a,b,c 不共面的情形.

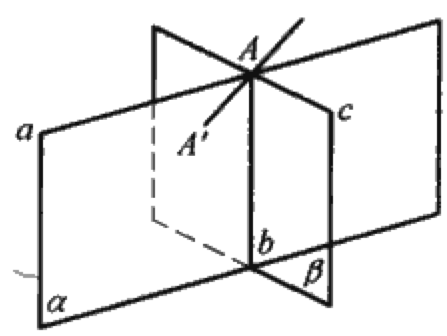


图1

如图1，可选点 $A \in b, A \notin a$，a, A 确定的平面为 α；b,c 确定的平面为 β(β 也可由 A, c 确定).

因为 a,b,c 不共面，所以 $a \not\subset \beta$，而 $a \subset \alpha$，得 α，β 不重合，可设 $\alpha \cap \beta = AA'$.

因为 $c \parallel a, a \subset \alpha, c \not\subset \alpha$，所以 $c \parallel \alpha$(线面平行的判定).

所以过 c 的平面 β 与 α 的交线 $AA' \parallel c$(线面平行的性质).

又 $b \parallel c$，得在 β 内过点 A 有两条直线 AA'，b 均与 c 平行.

所以 AA'，b 重合(平行公理)，得 $\alpha \cap \beta = b$.

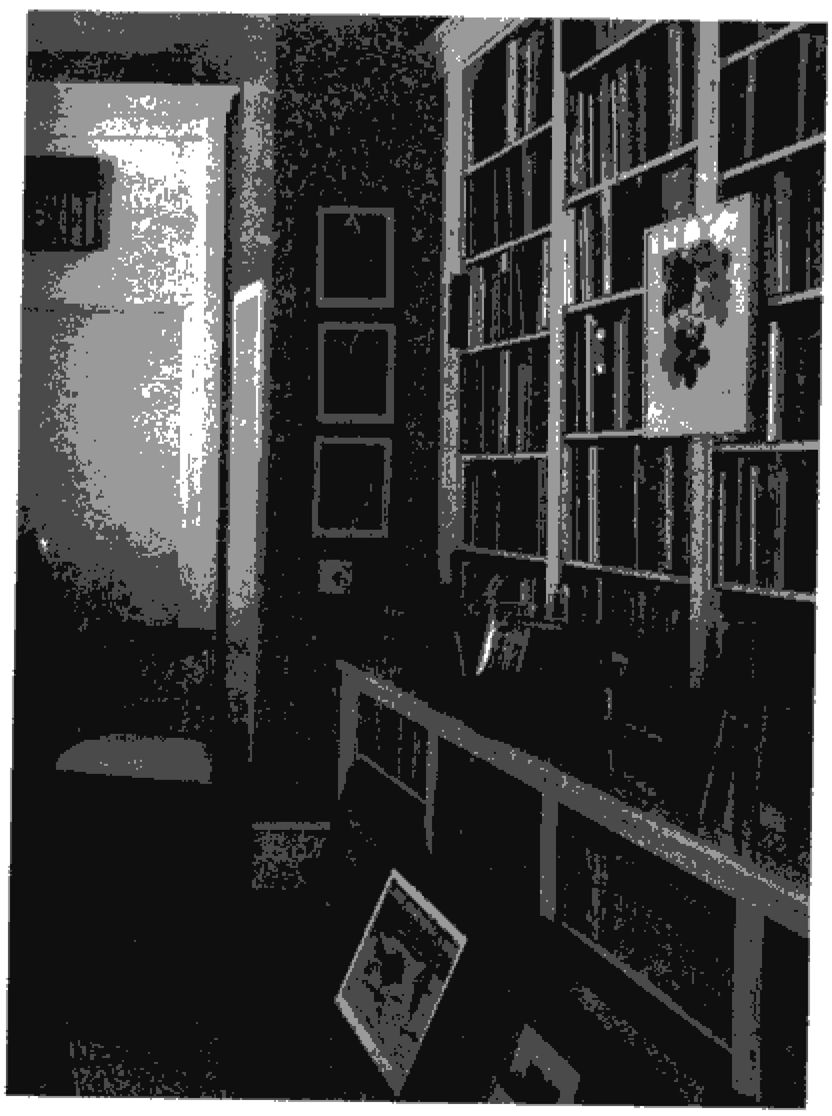
因为 $a \parallel c, c \subset \beta, a \not\subset \beta$，所以 $a \parallel \beta$.

所以过 a 的平面 α 与 β 的交线 $b \parallel a$，即 $a \parallel b$. 此时要证结论也成立.

参考文献

[1] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(下A)》[M]. 北京：人民教育出版社，2004.

排列、组合与二项式定理



$12\cdots n$ 的所有 m 元排列的反序数之和及其应用

《高等代数》[1] 中讲述了 $12\cdots n$ 的全排列(即 n 元排列)及其反序数(也叫逆序数)的定义,本文将推广这些定义,介绍 $12\cdots n$ 的 m 元排列及其反序数,正序数.

定义 由 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 中的 $m(m\leqslant n)$ 个数码排成的一个序列 $i_1i_2\cdots i_m$ 称为 $12\cdots n$ 的一个 m 元排列.在这个排列中,较大数码出现在较小数码前面(后面)的总次数叫做这个排列的反序数(正序数).

本文旨在求出 $12\cdots n$ 的所有 m 元排列的反序数(正序数)之和,并给出其一个应用.

定理 1 $12\cdots n$ 的所有 m 元排列的反序数之和,正序数之和均为 $\frac{1}{4}m(m-1)A_n^m$.

容易理解,反序数之和 = 正序数之和,这只要考虑 $i_1i_2\cdots i_m$ 与 $(n-i_1)(n-i_2)\cdots(n-i_m)$ 这两个排列.下面只求正序数之和.

这里给出定理 1 的两种巧妙证明(均只证 $m\geqslant 2$ 的情形).

证法 1 在 $12\cdots n$ 的所有 m 元排列中,出现 $\cdots a\cdots b\cdots(a<b)$ 的数对 (a,b) 有 C_n^2 种.对于每对固定的数对 (a,b),形如 $\cdots a\cdots b\cdots(a<b)$ 的 m 元排列又有 $\frac{1}{2}C_{n-2}^{m-2}m!$ 种.

所以所求正序数之和为 $C_n^2\cdot\frac{1}{2}C_{n-2}^{m-2}m!$,也即 $\frac{1}{4}m(m-1)A_n^m$.

证法 2 因为对于 $12\cdots n$ 的任一固定 m 元排列 $i_1i_2\cdots i_m$ 中的二元数对 $(i_j,i_k)(1\leqslant j<k\leqslant m)$ 有 C_m^2 对,所以对于任一 m 元排列 $i_1i_2\cdots i_m$ 的反序数与正序数之和为 C_m^2.又 $12\cdots n$ 的 m 元排列有 A_n^m 个,所以 $12\cdots n$ 的所有 m 元排列的反序数之和与正序数之和的和为 $C_m^2\cdot A_n^m$,又反序数之和 = 正序数之和,所以要证结论成立.

推论 $12\cdots n$ 的所有全排列的反序数之和,正序数之和均为 $\frac{1}{4}n(n-1)n!$.

笔者看到的《高等代数》教材中均没有推论这个结论.

运用定理1,我们来解决以下问题.

问题1 有 n 本不同的书从上到下摞在一起,要从中依次找出需要的 $m(m \leqslant n)$ 本书,从上到下每次找一本,每找到一本就拿出来,剩下的依然按原顺序摞在一起.要找出这 m 本书:

(1) 最少要多少次?

(2) 最多要多少次?

(3) 可能的情形有多少种?

(4) 平均要多少次?

解 将摞在一起的 n 本书从上到下依次编号 $1,2,\cdots,n$,设依次要找的 m 本书在这 n 本书中的编号依次为 $i_1,i_2,\cdots,i_m$(这 m 个数两两不等).又设 $i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}$ 中小于 i_k 的数有 r_k 个($k=1,2,\cdots,m$,约定 $r_1=0$),则找出 i_k 这本书要 i_k-r_k 次,所以依次找出这 m 本书需要的次数为

$$(i_1-r_1)+(i_2-r_2)+\cdots+(i_m-r_m)=\sum_{j=1}^{m} i_j-\sum_{j=1}^{m} r_j$$

(1) 最少的次数为 m,当且仅当 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 分别为 $1,2,\cdots,m$ 时所找的次数最少.

(2) 当且仅当 $\sum\limits_{j=1}^{m} i_j$ 最大且 $\sum\limits_{j=1}^{m} r_j$ 最小即 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 分别为 $n,n-1,\cdots,n-m+1$ 时所找的次数最多,最多次数为

$$n+(n-1)+\cdots+(n-m+1)=\frac{m}{2}(2n-m+1)$$

(3) 有排列数 A_n^m 种.

(4) 先求 A_n^m 个找出的次数 $\sum\limits_{j=1}^{m} i_j-\sum\limits_{j=1}^{m} r_j$($i_1i_2\cdots i_m$ 为 $12\cdots n$ 的任一 m 元排列)之和 $\sum\left(\sum\limits_{j=1}^{m} i_j-\sum\limits_{j=1}^{m} r_j\right)=\sum\left(\sum\limits_{j=1}^{m} i_j\right)-\sum\left(\sum\limits_{j=1}^{m} r_j\right)$.

先求 A_n^m 个数 $\sum\limits_{j=1}^{m} i_j$ 之和 $\sum\left(\sum\limits_{j=1}^{m} i_j\right)$,此和也即 mA_n^m 个加数之和,且每个加数都是 $1,2,\cdots,n$ 之一.容易理解 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数在这 mA_n^m 个加数中出现的次数相等,所以均出现了 $\frac{mA_n^m}{n}$ 次,得

$$\sum\left(\sum_{j=1}^{m} i_j\right)=(1+2+\cdots+n)\cdot\frac{mA_n^m}{n}=\frac{m}{2}(n+1)A_n^m$$

而 $\sum\left(\sum\limits_{j=1}^{m} r_j\right)$ 即 $12\cdots n$ 的所有 m 元排列的正序数之和为 $\frac{1}{4}m(m-$

1)A_n^m(定理 1),所以

A_n^m 个找出的次数之和为$[\frac{m}{2}(n+1)-\frac{m}{4}(m-1)]A_n^m$,所求平均次数为$\frac{m}{2}(n+1)-\frac{m}{4}(m-1)=\frac{m}{4}(2n-m+3)$.(这个平均次数正好是最少次数与最多次数的平均数)

再给出问题 1 的伴随问题及其解答.

问题 2 有 n 本不同的书从上到下摞在一起,这 n 本书中有 $m(m\leqslant n)$ 本书属于集合 A,其余的 $n-m$ 本书不属于 A.要把属于 A 的 m 本书都找出来,找法是从上到下每次找一本,每找到一本就拿出来,剩下的依然按原顺序摞在一起.要找出这 m 本书:

(1) 最少要多少次?

(2) 最多要多少次?

(3) 可能的情形有多少种?

(4) 平均要多少次?

解 将摞在一起的 n 本书从上到下依次编号 $1,2,\cdots,n$,设要找的 m 本书在这 n 本书中的编号为 $i_1,i_2,\cdots,i_m(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n)$,则找出这 m 本书需要的次数为

$$i_1+(i_2-1)+(i_3-2)+\cdots+[i_m-(m-1)]=\sum_{j=1}^{m}i_j-\frac{1}{2}m(m-1)$$

因为 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n$,所以:

(1) 当且仅当 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 分别为 $1,2,\cdots,m$ 时所找的次数最少,最少的次数为 m.

(2) 当且仅当 $i_m,i_{m-1},\cdots,i_1$ 分别为 $n,n-1,\cdots,n-m+1$ 时所找的次数最多,最多的次数为 $m(n-m+1)$.

(3) 有组合数 C_n^m 种(不应理解为 A_n^m 种).

(4) 先求 C_n^m 个找出的次数

$$\sum_{j=1}^{m}i_j-\frac{1}{2}m(m-1)(i_1i_2\cdots i_m\text{ 为 }12\cdots n\text{ 的任一 }m\text{ 元组合})$$

之和为

$$\sum[\sum_{j=1}^{m}i_j-\frac{1}{2}m(m-1)]=\sum(\sum_{j=1}^{m}i_j)-\frac{1}{2}m(m-1)C_n^m=$$

$$(1+2+\cdots+n)\cdot\frac{mC_n^m}{n}-\frac{1}{2}m(m-1)C_n^m=\frac{1}{2}m(n-m+2)C_n^m$$

所以,所求平均次数为$\frac{1}{2}m(n-m+2)$.(这个平均次数也正好是最少次数

与最多次数的平均数,且 $m>1$ 时该平均数小于问题 1 中的平均数)

我们常做问题 1,2 中的事,但很少算过这样的题.笔者近日在给某校高三(4) 班 60 名毕业生办理升学档案,要把每位毕业生的各种档案资料装入一个档案袋内,有一项就是要从全校 600 名毕业生的《高中学籍登记表》中把三(4) 班的 60 本表按学生考试成绩名次依次找出来,此工作量较大,到底有多大?

若不按顺序的找出 60 本表,由问题 2 的结果知:最少找 60 次,最多要找 32 460(即 541×60) 次,平均要找 16 260(即$\frac{1}{2}(60+32\ 460)$) 次;

若按顺序的找出 60 本表(比如按学习成绩名次),由问题 1 的结果知:最少找 60 次,最多要找 34 230(即 $600+599+\cdots+541$) 次,平均要找 17 145 次.

参考文献

[1] 张禾瑞,郝钢新.高等代数[M].2 版.北京:人民教育出版社,1980:87.

球入盒问题①

球入盒问题就是把 m 个球放入 n 个盒中有多少种不同的放法(以下放法，分法均指不同的放法，分法). 对于球而言分为都相同(下简称相同)和互不相同(下简称不同);对于盒而言，也分为相同和不同.

例 1 把 6 个不同的球放入 3 个不同的盒中，有多少种放法?

解 先把这 6 个球分成 3 组(每组至少一个球)，有 $1+1+4$，$1+2+3$，$2+2+2$ 三种类型，共 $C_6^4+C_6^3C_3^2+\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=230$ 种分法;对于每一种分法，有 $3!$ 种球入盒放法. 所以所求为 $230\times 3!=1\ 380$.

定理 1 把 m 个不同的球放入 $n(n\leqslant m)$ 个不同的盒中且无空盒的放法数为 $n!s_2(m,n)$，这里 $s_2(m,n)$ 指把 m 个不同的球分成 n 组(应注意均匀分组和非均匀分组)的分法数.($s_2(m,n)$ 是第二类 Stirling 数，其求法较复杂，这里不作介绍，读者可参见文献[1]的第 50 ~ 51 页.)

推论 m 元集合 A 到 $n(n\leqslant m)$ 元集合 B 的满射(即 B 中的元素都有原象的映射)个数为 $n!s_2(m,n)$.

例 2 把 6 个不同的球放入 3 个相同的盒中，放球数不限，有多少种放法?

解 先把这 6 个球分成 1 组，2 组或 3 组，分别有 $s_2(6,1)=1$，$s_2(6,2)=C_6^5+C_6^2C_4^4+\frac{C_6^3C_3^3}{A_2^2}=31$，$s_2(6,3)=230$ 种分法;对于每一种分法，都只有 1 种球入盒放法. 所以所求为 $s_2(6,1)+s_2(6,2)+s_3(6,3)=262$.

定理 2 把 m 个不同的球放入 n 个相同的盒中，放球数不限，则:

(1) 当 $m\geqslant n$ 时，放法数为 $s_2(m,1)+s_2(m,2)+\cdots+s_2(m,n)$;

(2) 当 $m\leqslant n$ 时，放法数为 $s_2(m,1)+s_2(m,2)+\cdots+s_2(m,m)$.

例 3 (1) 把 6 个相同的球放入 3 个不同的盒中且无空盒，有多少种放法?

(2) 把 16 个相同的球放入 3 个不同的盒 a,b,c 中，这 3 个盒中的球分别不少于 3 个，9 个，1 个，有多少种放法?

(3) 把 6 个相同的球放入 3 个不同的盒中，放球数不限，有多少种放法?

解 (1) 用隔板法. 从并排的 6 个球之间的 5 个空隙中选出 2 个各插入一个

---

① 原载于《数学通讯》(2008 年第 12 期).

隔板有 $C_5^2=10$ 种方法,所以所求答案为 10.

(2) 先把盒 a,b,c 中分别放 2 个,8 个,0 个球,用去了 10 个球,剩下 6 个球.再用(1) 的放法即达到要求,所以所求答案为 10.

(3) 先把 3 个盒中各放 -1 个球,用去了 -3 个球,剩下 9 个球.再把这 9 个相同的球放入这 3 个不同的盒中且无空盒即达到要求,所以所求答案为 $C_8^2=28$.(读罢以下例 4(4) 的解法后,这种解法就不足为怪了.)

例 4 求以下不定方程解的组数:

(1)$x_1+x_2+x_3=6(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{N}^*)$;

(2)$x_1+x_2+x_3=16(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{N}^*$ 且 $x_1\geqslant 3,x_2\geqslant 9)$;

(3)$x_1+x_2+x_3=6(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{N})$;

(4)$x_1+x_2+x_3=6(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{Z}$ 且 $x_1\geqslant 5,x_2\geqslant -6,x_3\geqslant 1)$;

(5)$x_1+x_2+x_3=6(x_1,x_2,x_3\in\mathbf{Z}$ 且 $x_1\leqslant 5,x_2\leqslant -7,x_3\leqslant 11)$.

解 设例 3 中 3 个盒放的球数分别为 x_1,x_2,x_3,则例 3 的 3 个问题就是例 4(1),(2),(3),所以它们的答案分别是:(1)10;(2)10;(3)28;

(4) 可用(3) 的方法求解,而下面的变换解法也具有一般性.

设 $x_1=x'_1+4,x_2=x'_2-7,x_3=x'_3$,得

$$x'_1+x'_2+x'_3=9(x'_1,x'_2,x'_3\in\mathbf{N}^*)$$

其解的组数为 $C_8^2=28$,即为所求.

(5) 设 $x_1=-x'_1+6,x_2=-x'_2-6,x_3=-x'_3+12$,得

$$x'_1+x'_2+x'_3=6(x'_1,x'_2,x'_3\in\mathbf{N}^*)$$

其解的组数为 $C_5^2=10$,即为所求.

定理 3 (1) 把 m 个相同的球放入 $n(n\leqslant m)$ 个不同的盒中且无空盒的放法数为 C_{m-1}^{n-1};

(2) 把 m 个相同的球放入 n 个不同的盒中,放球数不限的放法数为 C_{m+n-1}^{n-1};

(3) 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m(m\in\mathbf{N})$ 的正整数解的组数为 C_{m-1}^{n-1}(当 $m<n$ 时约定该数为 0,下同);

(4) 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m(m\in\mathbf{N})$ 的自然数解的组数为 C_{m+n-1}^{n-1};

(5) 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m(x_i\geqslant a_i;m,x_i,a_i\in\mathbf{Z},i=1,2,\cdots,n)$ 解的组数为 $C_{m+n-1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}^{n-1}$;

(6) 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m(x_i\leqslant a_i;m,x_i,a_i\in\mathbf{Z},i=1,2,\cdots,n)$ 解的组数为 $C_{a_1+a_2+\cdots+a_n+n-m-1}^{n-1}$.

例 5 (1) 把 6 个相同的球放入 3 个相同的盒中且无空盒,有多少种放法?

(2) 把 6 个相同的球放入 3 个相同的盒中,放球数不限,有多少种放法?

解 (1) 即把6无序分拆成3个正整数的方法数,也即把6个相同的球分成3组(每组至少一个球)的分法数,由例1的解法知,有 $1+1+4$,$1+2+3$,$2+2+2$ 三种.本题的答案为3.

(2) 每个盒中先放 -1 个球,用去了 -3 个球,剩下9个球.再把这9个相同的球放入这3个相同的盒中且无空盒即达到要求,所以所求答案为9无序分拆成3个正整数的方法数,有 $1+1+7$,$1+2+6$,$1+3+5$,$1+4+4$,$2+2+5$,$2+3+4$,$3+3+3$ 七种.本题的答案为7.

定理4 (1) 把 m 个相同的球放入 $n(n \leqslant m)$ 个相同的盒中且无空盒的放法数为把 m 无序分拆成 n 个正整数的方法数 $P_m(n)$(其求法较复杂,这里也不作介绍,读者可参见文献[1]的第87 ~ 102页).

(2) 把 m 个相同的球放入 n 个相同的盒中,放球数不限的放法数为 $P_{m+n}(n)$;

(3) 把 m 个相同的球放入 n 个相同的盒中,且这 n 个盒中有一个盒中的球不少于 a_1 个,剩下 $n-1$ 个盒中有一个盒中的球不少于 a_2 个,…,剩下2个盒中有一个盒中的球不少于 a_{n-1} 个,最后一个盒中的球不少于 a_n 个($a_1,a_2,\cdots,a_n \in \mathbf{Z}$),则放法数为 $P_{m+n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}(n)$.

我们将常见的球入盒问题列入表1(本文未证的结论读者容易自证).

表1

m 个球	n 个盒	有无空盒	放 法 数
不同	不同	有空盒	n^m
不同	不同	无空盒	$n!s_2(m,n)$
不同	相同	有空盒	$s_2(m,1)+s_2(m,2)+\cdots+s_2(m,n)(m \geqslant n)$ $s_2(m,1)+s_2(m,2)+\cdots+s_2(m,m)(m \leqslant n)$
不同	相同	无空盒	$s_2(m,n)$
相同	不同	有空盒	C_{m+n-1}^{n-1}
相同	不同	无空盒	C_{m-1}^{n-1}
相同	相同	有空盒	$P_{m+n}(n)$
相同	相同	无空盒	$P_m(n)$

参考文献

[1] 胡端平,鲁晓成.组合数学[M].武汉:武汉大学出版社,2001.

数学问题 1466 的二项式定理解法

《数学通报》2003 年第 12 期的数学问题 1466 为：

设 $M = 5^{2001} + 7^{2002} + 9^{2003} + 11^{2004}$,求证 $8 \mid M$.

《数学通报》2004 年第 1 期是用数学归纳法证明的(篇幅较长)；该刊 2005 年第 6 期第 58 页上又给出了两种简便证法,但分别要用到中学生不熟知的数论中的 Euler 定理.

下面用二项式定理证得($p \parallel a$ 指 $p \mid a$ 且 $p^2 \nmid a$)：

(1)$2^6 \parallel M$;

(2)$3 \parallel M-1$;

(3)$5 \parallel M+1$;

(4)$7^2 \parallel M-4$;

(5)$11 \parallel M-2$.

证明 (1)$5^{2001} = (2^2+1)^{2001} = (2^2)^{2001} + C_{2001}^{1}(2^2)^{2000} + \cdots + C_{2001}^{1998}(2^2)^3 + C_{2001}^{1999}(2^2)^2 + 2001 \times 2^2 + 1 = 2^7A + 2^2 \times 2001 + 1$(可证 A 是奇数)

$11^{2004} = (2^3 \times 15 + 1)^{1002} = (2^3 \times 15)^{1002} + C_{1002}^{1}(2^3 \times 15)^{1001} + \cdots + C_{1002}^{1000}(2^3 \times 15)^2 + 1002 \times 2^3 \times 15 + 1 = 2^6B + 2^4 \times 7515 + 1$($B$ 是奇数)

$7^{2002} = (2^3-1)^{2002} = (2^3)^{2002} - C_{2002}^{1}(2^3)^{2001} + \cdots + C_{2002}^{2000}(2^3)^2 - 2002 \times 2^3 + 1 = 2^6C - 2^4 \times 1001 + 1$($C$ 是奇数)

$9^{2003} = (2^3+1)^{2003} = (2^3)^{2003} + C_{2003}^{1}(2^3)^{2002} + \cdots + C_{2003}^{2001}(2^3)^2 + 2003 \times 2^3 + 1 = 2^6D + 2^3 \times 2003 + 1$($D$ 是奇数)

所以 $M = 2^6(2A + B + C + D) + 2^2(2001 + 2^2 \times 7515 - 2^2 \times 1001 + 2 \times 2003) + 4 = 2^6E + 2^8 \times 501$($E$ 是奇数)

即 $2^6 \parallel M$.

(2) 记 $M_1 = 5^{2001} + 7^{2002} + 11^{2004}$,只需证 $3 \parallel M_1 - 1$.有：

$5^{2001} = (3 \times 2 - 1)^{2001} = (3 \times 2)^{2001} - C_{2001}^{1}(3 \times 2)^{2000} + \cdots - C_{2001}^{1999}(3 \times 2)^2 + 2001 \times (3 \times 2) - 1 =$

3^2A-1($A\in \mathbf{Z}$,下文中表示数的字母均表整数)

$$7^{2\,002}=(3\times 2+1)^{2\,002}=(3\times 2)^{2\,002}+C_{2\,002}^{1}(3\times 2)^{2\,001}+\cdots+C_{2\,002}^{2\,000}(3\times 2)^2+2\,002\times(3\times 2)+1=3^2B+3\times 4\,004+1$$

$$11^{2\,004}=(3\times 40+1)^{1\,002}=(3\times 40)^{1\,002}+C_{1\,002}^{1}(3\times 40)^{1\,001}+\cdots+C_{1\,002}^{1\,000}(3\times 40)^2+1\,002\times(3\times 40)+1=3^2C+1$$

所以
$$M_1-1=3^2D+3\times 4\,004$$
即
$$3\parallel M_1-1$$

(3) 记 $M_2=7^{2\,002}+9^{2\,003}+11^{2\,004}$,只需证 $5\parallel M_2+1$,有

$$7^{2\,002}=(5^2\times 2-1)^{1\,001}=5^2A-1$$
$$9^{2\,003}=(5\times 2-1)^{2\,003}=5^2B+2\,003\times(5\times 2)-1$$
$$11^{2\,004}=(5\times 2+1)^{2\,004}=5^2C+2\,004\times(5\times 2)+1$$

所以
$$M_2=5^2D+5\times 2\times 4\,007$$
即
$$5\parallel M_2+1$$

(4) 记 $M_3=5^{2\,001}+9^{2\,003}+11^{2\,004}$,只需证 $7\parallel M_3-4$ 有

$$5^{2\,001}=(7\times 18-1)^{667}=7^3A-C_{667}^{665}(7\times 18)^2+667\times(7\times 18)-1$$
$$9^{2\,003}=81(7\times 104+1)^{667}=7^3B+81C_{667}^{665}(7\times 104)^2+81\times 667\times(7\times 104)+81$$
$$11^{2\,004}=(7\times 190+1)^{668}=7^3C+C_{668}^{666}(7\times 190)^2+668\times(7\times 190)+1$$

所以
$$M_3-4=7^3D+7^2\times 667(7\times 43\,384\,211-1)+7^3\times 117\,505$$
即
$$7^2\parallel M_3-4$$

(5) 设 $M_4=5^{2\,001}+7^{2\,002}+9^{2\,003}$,只需证 $11\mid M_4-2$.有:

$$5^{2\,001}=5(11\times 284+1)^{400}=11^2A+5\times 400\times(11\times 284)+5$$
$$7^{2\,002}=49(11\times 1\,528-1)^{400}=11^2B-49\times 400\times(11\times 1\,528)+49$$
$$9^{2\,003}=3^{4\,006}=3(11\times 22+1)^{801}=11^2C+3\times 801\times(11\times 22)+3$$

所以
$$M_4-2=11^2D-11(2\,666\,175\times 11+4)$$
即
$$11\parallel M_4-2$$

一类排列最值问题

1 一道概率题及其解答

题 袋中有红球和白球共17个,如果从此袋中任取3个球,问袋中有几个红球时,使得取出的3个球同色的概率最大、最小?

解 设袋中有 x 个红球,y 个白球,则 $x+y=17(x,y\in\mathbf{N})$.

从袋中取出的3个球同色的概率为

$$p=\frac{C_x^3+C_y^3}{C_{17}^3}=\frac{A_x^3+A_y^3}{A_{17}^3}(\text{当 } k=0,1,2 \text{ 时,规定 } C_k^3=A_k^3=0).$$

欲求 p 的最值,即求

$$z=f(x,y)=A_x^3+A_y^3(x,y\in\mathbf{N},x+y=17)$$

的最值.

$$\begin{aligned}z=A_x^3+A_y^3&=x(x-1)(x-2)+y(y-1)(y-2)=\\&(x^3+y^3)-3(x^2+y^2)+2(x+y)=\\&[(x+y)^3-3xy(x+y)]-3[(x+y)^2-2xy]+2(x+y)=\\&A_{x+y}^3-3xy(x+y-2)=A_{17}^3-45xy\end{aligned}$$

当且仅当 xy 取最小(大)值时,z 取最大(小)值.

因为 $4xy=(x+y)^2-|x-y|^2$,所以:

若 $x+y$ 为定值,则当且仅当 $|x-y|$ 取最大(小)值时,xy 取最小(大)值 ①

所以当且仅当 $(x,y)=(8,9)$ 或 $(9,8)$ 时,z 取最小值;当且仅当 $(x,y)=(17,0)$ 或 $(0,17)$ 时,z 取最大值.

即袋中有8个或9个红球时,取出3个球同色的概率最小;袋中的17个球全是红球或全是白球时,取出的3个球同色的概率最大.

2 一类最值问题

定义 符号 $A_x^k(x\in\mathbf{R},k\in\mathbf{Z})$ 定义如下:

(1) 当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时,$A_x^k=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$;

(2) 当 $k=0$ 时,$A_x^k=1$;

(3) 当 $k\in\mathbf{Z}^-$ 时,$A_x^k=0$.

这种定义当然来源于文献[1]第66页的"组合数的推广".

问题1 设 $x,y\in\mathbf{N},x+y=n\geqslant k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}$,求 $f_k(x,y)=\mathrm{A}_x^k+\mathrm{A}_y^k$ 的最值.

定理 对于问题1,当 $k=2,3$ 时,均有:当且仅当 $|x-y|$ 取最小(大)值时,$f_k(x,y)$ 取最小(大)值.

证明 可以验证

$$f_2(x,y)=\mathrm{A}_{x+y}^2-2xy$$

$$f_3(x,y)=\mathrm{A}_{x+y}^3-3xy(x+y-2)$$

$$f_4(x,y)=\mathrm{A}_{x+y}^4+2(xy)^2-[4(x+y)^2-18(x+y)+22]xy$$

再由结论①得定理成立.

猜想1 对于问题1,有:当且仅当 $|x-y|$ 取最小(大)值时,$f_k(x,y)$ 取最小(大)值.

问题2 设 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in\mathbf{R},\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=n\geqslant k\geqslant 2,k\in\mathbf{N}$,求 $f_k(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum\limits_{i=1}^{m}\mathrm{A}_{x_i}^k$ 的最值.

猜想2 对于问题2,有:当且仅当 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}|x_i-x_j|$ 取最小(大)值时,$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 取最小(大)值.

参考文献

[1] Brualdi R A. 组合学导引[M]. 李盘林,王天明,译. 武汉:华中理工大学出版社,1982.

概率与统计



广义几何分布的期望与方差

1 问题的提出——广义几何分布

全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修Ⅱ)》(2004年人民教育出版社)的"概率与统计"中介绍了几何分布:在独立重复试验中,某事件发生的概率是 $p(0 < p < 1)$,则该事件第一次发生时所作试验的次数 ξ 是一个离散型随机变量,且 $P(\xi = k) = pq^{k-1}(k = 1,2,3,\cdots)$,其中 $q = 1 - p$.且随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi = \frac{1}{p}$,方差 $D\xi = \frac{q}{p^2}$.

(选修Ⅱ)第9页第9题又是一道与几何分布类似的问题:

在独立重复试验中,每次实验中某事件发生的概率是0.8,求第3次事件发生所需要的试验次数 ξ 的分布列.

由此,笔者提出:

广义几何分布 在独立重复试验中,某事件发生的概率是 $p(0 < p < 1, q = 1 - p$,下同),则该事件在第 $m(m \in \mathbf{N}^*)$ 次发生时所作试验的次数的概率分布为

$$P(\xi = k) = C_{k-1}^{m-1} q^{k-m} p^m (k = m, m+1, m+2, \cdots)$$

这种分布叫做 $m - p$ 几何分布(相对于原来的几何分布,这种概率分布就叫做广义几何分布),记作 $\xi \sim G(m,p)$.

求广义几何分布 $\xi \sim G(m,p)$ 的期望 $E\xi$ 与方差 $D\xi$ 是当然要解决的问题,文献[1]求出了 $m = 2,3$ 时的 $E\xi$,并猜想一般情形的 $E\xi = \frac{m}{p}$.

定理 若 $\xi \sim G(m,p)$,则 $E\xi = \frac{m}{p}$,$D\xi = \frac{mq}{p^2}$.

2 引理

$$A_k^m C_n^k = A_n^m C_{n-m}^{k-m} \quad ①$$

(由排列数,组合数的定义易证)

在①中令 $m = 1$,得

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$

又得

$$mC_k^m = kC_{k-1}^{m-1} \quad ②$$

在 ① 中令 $m=2$,得

$$k(k-1)C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$

又得

$$m(m+1)C_{k+1}^{m+1}=k(k+1)C_{k-1}^{m-1}$$

所以 $k^2C_{k-1}^{m-1}=k(k+1)C_{k-1}^{m-1}-kC_{k-1}^{m-1}=m(m+1)C_{k+1}^{m+1}-kC_{k-1}^{m-1}$

即

$$k^2C_{k-1}^{m-1}=m(m+1)C_{k+1}^{m+1}-kC_{k-1}^{m-1} \tag{③}$$

可对 m 用数学归纳法证明

$$\sum_{k=m}^{\infty}C_k^m q^{k-m}=\frac{1}{p^{m+1}}(m\in\mathbf{N}^*,0<p<1,q=1-p) \tag{④}$$

即证

$$1+C_{m+1}^m q+C_{m+2}^m q^2+\cdots=\frac{1}{p^{m+1}}(\text{条件同上}) \tag{⑤}$$

我们来证 $m\in\mathbf{N}$ 时式 ⑤ 均成立.

$m=0$ 时成立: $1+q+q^2+\cdots=\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1}{p}$.

假设 $m=m'(m'\in\mathbf{N})$ 时式 ⑤ 成立.

设 $x=1+C_{m'+2}^{m'+1}q+C_{m'+3}^{m'+1}q^2+\cdots$,得

$$qx=C_{m'+1}^{m'+1}q+C_{m'+2}^{m'+1}q^2+\cdots$$

所以 $(1-q)x=px=1+C_{m'+1}^{m'}q+C_{m'+2}^{m'}q^2+\cdots=\dfrac{1}{p^{m'+1}}$(用归纳假设)

即

$$x=\frac{1}{p^{m'+2}}$$

即 $m=m'+1$ 时也成立.所以式 ⑤ 成立,式 ④ 当然成立!

由式 ⑤,立得

$$C_{m+1}^{m+1}+C_{m+2}^{m+1}q+C_{m+3}^{m+1}q^2+\cdots=\sum_{k=m}^{\infty}C_{k+1}^{m+1}q^{k-m}=\frac{1}{p^{m+2}}(\text{条件同上}) \tag{⑥}$$

3 原问题的解决——定理的证明

$$E\xi=\sum_{k=m}^{\infty}kC_{k-1}^{m-1}q^{k-m}p^m=mp^m\sum_{k=m}^{\infty}C_k^m q^{k-m}(\text{用式 ②})=\frac{m}{p}(\text{用式 ④})$$

$$\begin{aligned}D\xi&=E\xi^2-(E\xi)^2=\sum_{k=m}^{\infty}k^2C_{k-1}^{m-1}q^{k-m}p^m-\left(\frac{m}{p}\right)^2=\\&m(m+1)p^m\sum_{k=m}^{\infty}C_{k+1}^{m+1}q^{k-m}-\sum_{k=m}^{\infty}kC_{k-1}^{m-1}q^{k-m}p^m-\left(\frac{m}{p}\right)^2(\text{用式 ③})=\\&m(m+1)p^m\cdot\frac{1}{p^{m+2}}-E\xi-\left(\frac{m}{p}\right)^2(\text{用式 ⑥})=\\&\frac{m^2+m}{p^2}-\frac{m}{p}-\frac{m^2}{p^2}=\frac{mq}{p^2}\end{aligned}$$

证毕!

4 原问题的另解

由分布列的性质,得

$$\sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = 1 \tag{7}$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} C_{k-1}^{m} p^m q^{k-m} = \frac{q}{p} \tag{8}$$

所以

$$\sum_{k=m}^{\infty} C_k^m p^m q^{k-m} = \sum_{k=m}^{\infty} (C_{k-1}^{m} + C_{k-1}^{m-1}) p^m q^{k-m} = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_{k-1}^{m} p^m q^{k-m} + \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = \frac{q}{p} + 1(\text{用式⑦,⑧}) = \frac{1}{p}$$

又由 ②,得

$$E\xi = \sum_{k=m}^{\infty} k C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = m \sum_{k=m}^{\infty} C_k^m p^m q^{k-m} = \frac{m}{p} \tag{9}$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} k C_{k-1}^{m} p^m q^{k-m} = \frac{(m+1)q}{p^2} \tag{10}$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=m}^{\infty} k^2 C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = m \sum_{k=m}^{\infty} k C_k^m p^m q^{k-m} = m \sum_{k=m}^{\infty} k (C_{k-1}^{m} + C_{k-1}^{m-1}) p^m q^{k-m} = m\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} k C_{k-1}^{m} p^m q^{k-m} + \sum_{k=m}^{\infty} k C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}\right) = \frac{m(m+q)}{p^2} (\text{用式⑨,⑩})$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{m(m+q)}{p^2} - \left(\frac{m}{p}\right)^2 = \frac{mq}{p^2}$$

也证得定理成立!

5 原问题的拓展 —— 广义几何分布中随机变量 ξ 的 n 阶距

在广义几何分布 $\xi \sim G(m,p)$ 中,随机变量 ξ 的 n 阶距 $E\xi^n$ 是期望 $E\xi$ 的自然推广[2],对它的研究也是有意义的.

设 $E\xi^n = \sum_{k=m}^{\infty} k^n C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = f(m,n)$,得

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} k^n C_{k-1}^{m} p^m q^{k-m} = \frac{q}{p} f(m+1,n)$$

$$f(m,n+1) = E\xi^{n+1} = \sum_{k=m}^{\infty} k^{n+1} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = m \sum_{k=m}^{\infty} k^n C_k^m p^m q^{k-m} (\text{用式②}) = m \sum_{k=m}^{\infty} k^n (C_{k-1}^{m-1} + C_{k-1}^{m}) p^m q^{k-m} = m\left(f(m,n) + \frac{q}{p} f(m+1,n)\right)$$

$$f(m,n+1)=mf(m,n)+\frac{mq}{p}f(m+1,n)(n\in\mathbf{N}^*)\qquad ⑪$$

该式就是求 $E\xi^n$ 的递推式.由此及 $f(m,1)=E\xi=\frac{m}{p}$,得

$$E\xi^2=f(m,2)=\frac{m(m+q)}{p^2}$$

$$E\xi^3=f(m,3)=\frac{m}{p^3}(m^2+3mq+q^2+q)$$

$$E\xi^4=f(m,4)=\frac{m}{p^4}(m^3+6m^2q+7mq^2+4mq+q^3+4q^2+q)$$

但笔者还不能求出 $E\xi^n$ 的表达式,请有兴趣的读者研究.

6 另一求和问题

问题 由 $C_m^m+C_{m+1}^m+C_{m+2}^m+\cdots+C_{n-1}^m=C_n^{m+1}$(全日制普通高级中学教科书《数学·第二册(下A)》(2004年人民教育出版社)第116页第3(2)题)及式④笔者联想到如何求下面的和

$$S_n=C_m^m+C_{m+1}^m q+C_{m+2}^m q^2+\cdots+C_{n-1}^m q^{n-m}\qquad ⑫$$

笔者认为该问题也颇有难度,请有志之士解答.

参考文献

[1] 徐卫明,赵成平.一道概率题的探索与引申[J].数学通讯,2006(3):13
[2] 魏宗舒.概率论与数理统计教程[M].北京:高等教育出版社,1983:156-157.

看三道概率题

题1 在3张票中有2张是奖票,从中抽出的2张中至少有1张是奖票的概率是多少?

解法1 这3张票中每张是奖票的概率都是$\frac{2}{3}$,不是奖票的概率都是$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.所以抽出的2张都不是奖票的概率是$(\frac{1}{3})^2$,至少有1张是奖票的概率$1-(\frac{1}{3})^2=\frac{8}{9}$.

解法2 易知抽出的2张票中至多有1张不是奖票,所以"至少有1张是奖票"是必然事件,其概率为1.

我们深信解法2正确,所以解法1错误.错在何处呢?"解法1"中的"所以抽出的2张都不是奖票的概率是$(\frac{1}{3})^2$"不对,因为抽出的"第1张不是奖票","第2张不是奖票"这两个事件不是相互独立的,因而不能用公式"$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$"来计算(见教科书[1]第133～134页).

题2 甲,乙两人参加一次考试,已知在被选的10道试题中,甲能答对其中的6道题,乙能答对其中的8道题.现规定每次考试都从备选题中随机抽出3道进行测试,分别求甲,乙答对的试题数ξ,η的概率分布列及数学期望$E\xi,E\eta$.

错解 甲在抽出的3道题中能回答其中每道题的概率都是$\frac{6}{10}=0.6$,乙在抽出的3道题中能回答其中每道题的概率都是$\frac{8}{10}=0.8$.根据"在n次独立重复试验中这个事件恰好发生k次的概率"公式(文献[1]第137页),得ξ,η的概率分布列及数学期望$E\xi,E\eta$为:

ξ	0	1	2	3
p	$0.4^3=0.064$	$C_3^1\times0.6\times0.4^2=0.288$	$C_3^2\times0.6^2\times0.4=0.432$	$0.6^3=0.216$

$$E\xi=0\times0.064+1\times0.288+2\times0.432+3\times0.216=1.8$$

η	0	1	2	3
p	$0.2^3=0.008$	$C_3^1\times0.8\times0.2^2=0.096$	$C_3^2\times0.8^2\times0.2=0.384$	$0.8^3=0.512$

$$E\eta=0\times0.008+1\times0.096+2\times0.384+3\times0.512=2.4$$

此解法也是滥用“相互独立”而导致错误的(显然 η 不能取 0).

正解

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$	$\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$	$\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$

$$E\xi=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=1.8$$

ξ	1	2	3
p	$\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$	$\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$	$\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$

$$E\eta=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{7}{15}+3\times\frac{7}{15}=2.4$$

读者是否注意到:以上错解,正解中的 $E\xi,E\eta$ 均一致,这是“巧合”吗?

题 3 小张参加一次考试.已知在备选的 n 道试题中能答对其中的 $r(r\leqslant n;r,n\in\mathbf{N}^*)$ 道题.现从备选题中抽出 $m(m\leqslant n,m\in\mathbf{N}^*)$ 道进行测试,求小张答对的试题数 ξ 的概率分布列及数学期望 $E\xi$.

(若按错解,得 $E\xi=m\cdot\frac{r}{n}$(见教科书[2] 第 13 页的二项分布的期望公式).若能求出题 3 中 $E\xi$ 的正确答案也是“$m\cdot\frac{r}{n}$”,就说明以上“巧合”具有一般性了.)

引理 1 (1)$iC_r^i=rC_{r-1}^{i-1}(r,i\in\mathbf{N}^*,r\geqslant i,r\geqslant 2)$;

(2)$\frac{C_{n-1}^{m-1}}{C_n^m}=\frac{m}{n}(m,n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant m,n\geqslant 2)$.((1),(2) 等价)

引理 2 若 $r,m,n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant m,n\geqslant r\geqslant 2$,则:

(1)$\sum\limits_{i=1}^{m}C_{r-1}^{i-1}C_{n-r}^{m-i}=C_{n-1}^{m-1}(m\leqslant n-r,m\leqslant r)$;

(2)$\sum\limits_{i=1}^{r}C_{r-1}^{i-1}C_{n-r}^{m-i}=C_{n-1}^{m-1}(r\leqslant m\leqslant n-r)$;

(3)$\sum\limits_{i=m-n+r}^{m}C_{r-1}^{i-1}C_{n-r}^{m-i}=C_{n-1}^{m-1}(n-r<m\leqslant r)$;

(4)$\sum\limits_{i=m-n+r}^{r}C_{r-1}^{i-1}C_{n-r}^{m-i}=C_{n-1}^{m-1}(m>n-r,m>r)$.

证明 它们均可用恒等式$(1+x)^{r-1}(1+x)^{n-r}=(1+x)^{n-1}$两边的展开式中含 x^{m-1} 项的系数相等证得.仅以(3) 证明如下

$$(C_{r-1}^0+C_{r-1}^1x+C_{r-1}^2x^2+\cdots+C_{r-1}^{r-1}x^{r-1})(C_{n-r}^0+C_{n-r}^1x+C_{n-r}^2x^2+\cdots+C_{n-r}^{n-r}x^{n-r})$$

的展开式中含 x^{m-1} 项的系数为(注意 $n-r<m\leqslant r$)

$$C_{n-r}^{0}C_{r-1}^{m-1}+C_{n-r}^{1}C_{r-1}^{m-2}+\cdots+C_{n-r}^{n-r}C_{r-1}^{m-n+r-1}=C_{n-1}^{m-1}$$

此即(3).

题 3 的解法 先看 $r=1$ 的情形,ξ 的概率分布列为:

ξ	0	1
p	$\dfrac{C_{n-1}^{m}}{C_n^m}$	$\dfrac{C_{n-1}^{m-1}C_1^1}{C_n^m}$

$$E\xi=\frac{C_{n-1}^{m-1}}{C_n^m}=\frac{m}{n}(\text{用引理 }2(1))=\frac{mr}{n}$$

再看 $r\geqslant 2$ 的情形,又分四种情形:

(1) 当 $m\leqslant n-r$ 且 $m\leqslant r$ 时,ξ 的概率分布列为

$$p(\xi=i)=\frac{C_r^iC_{n-r}^{m-i}}{C_n^m}(i=0,1,2,\cdots,m)$$

$$E\xi=\sum_{i=0}^{m}\frac{iC_r^iC_{n-r}^{m-i}}{C_n^m}=\frac{r}{C_n^m}\sum_{i=1}^{m}C_{r-1}^{i-1}C_{n-r}^{m-i}(\text{引理 }1(1))=$$

$$\frac{r}{C_n^m}C_{n-1}^{m-1}(\text{引理 }2(1))=\frac{mr}{n}(\text{引理 }1(2))$$

(2) 当 $r<m\leqslant n-r$ 时,ξ 的概率分布列为

$$p(\xi=i)=\frac{C_r^iC_{n-r}^{m-i}}{C_n^m}(i=0,1,2,\cdots,r)$$

$$E\xi=\sum_{i=0}^{r}\frac{iC_r^iC_{n-r}^{m-i}}{C_n^m}=\frac{r}{C_n^m}\sum_{i=1}^{r}C_{r-1}^{i-1}C_{n-r}^{m-i}=\frac{r}{C_n^m}C_{n-1}^{m-1}(\text{引理 }2(2))=\frac{mr}{n}$$

(3) 当 $n-r<m\leqslant r$ 时,ξ 的概率分布列为

$$p(\xi=i)=\frac{C_r^iC_{n-r}^{m-i}}{C_n^m}(i=m-n+r,m-n+r+1,\cdots,m)$$

$$E\xi=\sum_{i=m-n+r}^{m}\frac{iC_r^iC_{n-r}^{m-i}}{C_n^m}=\frac{r}{C_n^m}\sum_{i=m-n+r}^{m}C_{r-1}^{i-1}C_{n-r}^{m-i}=\frac{r}{C_n^m}C_{n-1}^{m-1}(\text{引理 }2(3))=\frac{mr}{n}$$

(4) 当 $m>n-r$ 且 $m>r$ 时,ξ 的概率分布列为

$$p(\xi=i)=\frac{C_r^iC_{n-r}^{m-i}}{C_n^m}(i=m-n+r,m-n+r+1,\cdots,r)$$

$$E\xi=\sum_{i=m-n+r}^{r}\frac{iC_r^iC_{n-r}^{m-i}}{C_n^m}=\frac{r}{C_n^m}\sum_{i=m-n+r}^{r}C_{r-1}^{i-1}C_{n-r}^{m-i}=\frac{r}{C_n^m}C_{n-1}^{m-1}(\text{引理 }2(4))=\frac{mr}{n}$$

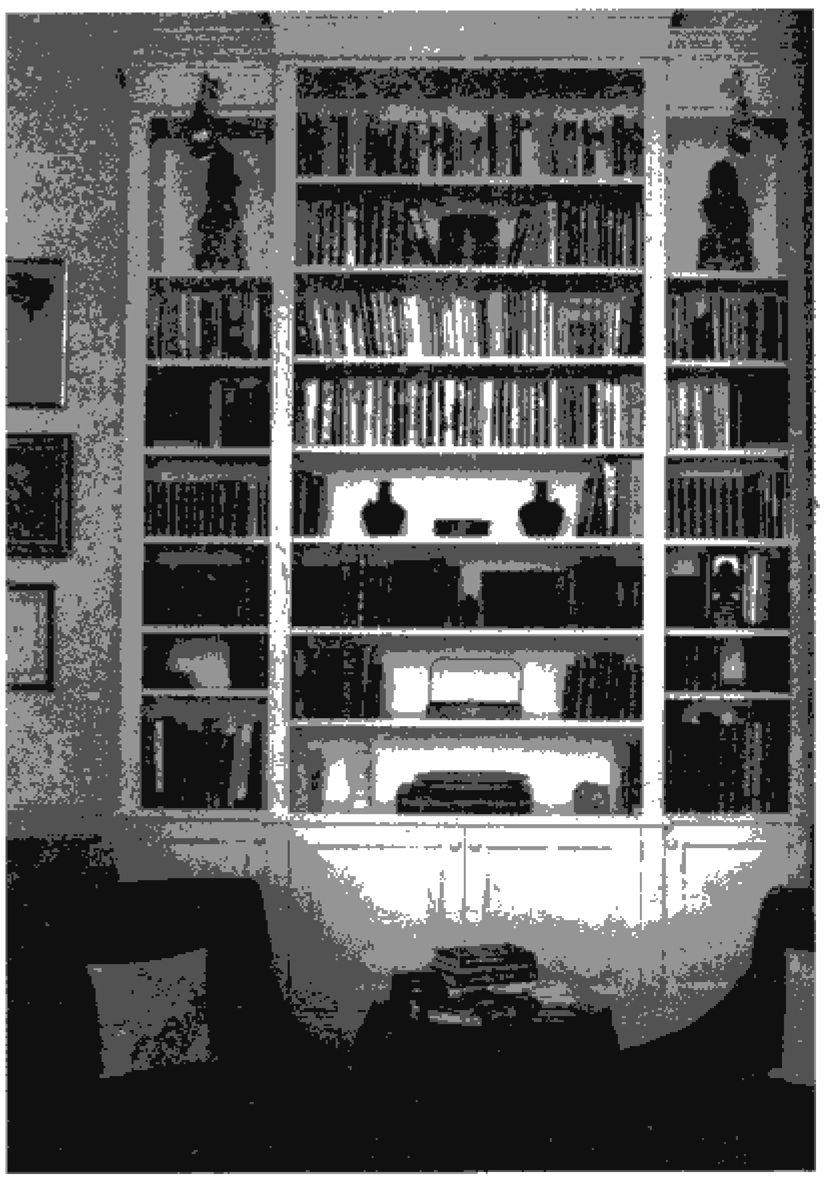
总之,均有 $E\xi=m\cdot\dfrac{r}{n}$.

有兴趣的读者,还可计算题 3 中 ξ 的方差 $D\xi$.

参考文献

[1] 人民教育出版社中学数学室.全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(下A)》[M].北京:人民教育出版社,2004.
[2] 人民教育出版社中学数学室.全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修Ⅱ)》[M].北京:人民教育出版社,2004.

极　　限



几个极限问题

笔者通过按计算器,发现了下面几个极限问题:

猜想1　设 $\theta \in \mathbf{R}$,定义 $f_1(\theta) = \cos\theta$, $f_{n+1}(\theta) = \cos(f_n(\theta))$ ($n \in \mathbf{N}^*$,下同),则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\theta)$ 存在,且这个极限为 0.739 085 133….

要解决猜想1,就是要证明:

(1) 数列 $\{f_{2n+1}(\theta)\}$ 是递减数列,因而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n+1}(\theta)$ 存在(单调递减且有下界的数列必有极限),将此极限记为 a;

(2) 数列 $\{f_{2n}(\theta)\}$ 是递增数列,因而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n}(\theta)$ 存在,将此极限记为 b;

(3) $a = b = 0.739\ 085\ 133\cdots$.

还要解决:

猜想1中的 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\theta)$ 是有理数,无理数,还是超越数?它表示一个怎样的准确数(不用极限表示)?

猜想2　设 $\theta \in \mathbf{R}$,定义 $g_1(\theta) = \sin\theta$, $g_{n+1}(\theta) = \sin(g_n(\theta))$ ($n \in \mathbf{N}^*$),则 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\theta)$ 存在,且这个极限为0.

猜想3　设 $\theta \in \mathbf{R}$,定义 $h_1(\theta) = \sin(\cos\theta)$, $h_{n+1}(\theta) = \sin(\cos(h_n(\theta)))$ ($n \in \mathbf{N}^*$),则 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(\theta)$ 存在.

还可作出类似于猜想3的很多猜想.

可去奇点的应用
——用极限求解析函数值

教材《复变函数》[1]第187页中写道:设 $F(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 内解析,$z=a$ 为 $F(z)$ 的可去奇点,若定义 $F(a)=\lim\limits_{z\to a}F(z)$,则 $F(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析.由此,得:

定理 在 $0<|z-a|<R$ 内 $F(z)=G(z)$,$G(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析,$z=a$ 为 $F(z)$ 的可去奇点,则 $G(a)=\lim\limits_{z\to a}F(z)$.

推论 若 $G(z)$ 同时满足条件:

(1) 在 $0<|z-a|<R$ 内 $G(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$($f(z)$,$g(z)$ 在点 a 解析),$G(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析;

(2) $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\lim\limits_{z\to a}g(z)=0$,$\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=A\neq\infty$.

则 $G(a)=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=A$.

证明 由 L'Hospital 法则(文献[1]第85页的习题2),有 $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=A$,$A\neq\infty$,所以孤立奇点 $z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点(文献[1]第187页).再由定理知,推论成立.

用推论求解析函数值 $G(a)$,就是求一个 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式极限.要求 $G(z)$ 是解析函数,$a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n$,$e^z$,$\sin z$,$\cos z$,$\dfrac{a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n}{b_0z^m+\cdots+b_{m-1}z+b_m}$(分母 $\neq 0$)都是解析函数.

例1 已知 $G(z)=(z+1)(z^2+1)$,求 $G(1)$,$G(0)$.

解 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内,$G(z)=\dfrac{(z-1)(z+1)(z^2+1)}{z-1}=\dfrac{z^4-1}{z-1}$ 解析,所以 $G(1)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^4-1}{z-1}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{4z^3}{1}=4$.

同样，有 $G(0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z(z+1)(z^2+1)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}(4z^3+3z^2+2z+1)=1.$

例 2　设 $x_i(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 3)$ 是 $x^n-1=0$ 的 n 个根，求以下各式的值：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j),\ \sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)^{-1}$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)^2,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)^{-2}$；

(3) $\prod\limits_{i=3}^{n}(x_1-x_i)$.

解　有

$$\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)=x^n-1$$

$$\sum x_1=\sum x_1x_2=\sum x_1\cdots x_{n-2}=\sum x_1\cdots x_{n-1}=0,\ x_1\cdots x_n=-(-1)^n$$

(1) $$\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)=\lim_{x\to x_i}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(x-x_j)}{x-x_i}=\lim_{x\to x_i}\frac{x^n-1}{x-x_i}=\lim_{x\to x_i}nx^{n-1}=\frac{n}{x_i}$$

所以

$$\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)^{-1}=\frac{x_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{x_i}=n\cdot\frac{\sum x_1\cdots x_{n-1}}{x_1\cdots x_n}=n\cdot\frac{0}{-(-1)^n}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}=\frac{\sum x_1}{n}=0$$

(2) $$\sum x_1^2=(\sum x_1)^2-2\sum x_1x_2=0$$

$$\sum(x_1\cdots x_{n-1})^2=(\sum x_1\cdots x_{n-1})^2-2x_1\cdots x_n\sum x_1\cdots x_{n-2}=0$$

$$\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)^2=\lim_{x\to x_i}\frac{(x^n-1)^2}{(x-x_i)^2}=\frac{n^2}{x_i^2};\ \prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)^{-2}=\frac{x_i^2}{n^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)^2=n^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}=n^2\cdot\frac{\sum(x_1\cdots x_{n-1})^2}{(x_1\cdots x_n)^2}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(x_i-x_j)^{-2}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

(3) $\prod_{i=3}^{n}(x_1 - x_i) = \lim_{x \to x_1} \frac{x^n - 1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{\lim_{x \to x_1} nx^{n-1}}{x_1 - x_2} = \frac{n}{x_1(x_1 - x_2)}$

参考文献

[1] 钟玉泉.复变函数论[M].2版.北京:高等教育出版社,1998.

圆内接正 $2n$ 边形边长的求法及关于 π 的一个极限

本文给出圆内接正 $2n$ 边形的边长 a_{2n} 的求法，即用圆内接正 $n(n\geqslant 3)$ 边形的边长 a_n 表示出 a_{2n}(可不妨在单位圆中讨论). 本文最后还得到了关于圆周率 π 的一个极限.

定理 1　$a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$.

证明　如图 1, AB 为单位圆 O 的内接正 n 边形的边长 a_n, AC 为圆 O 的内接正 $2n$ 边形的边长 a_{2n}, 有

$$2S_{\triangle ACE}=EC\cdot AD=AC\cdot AE$$

又 $EC=2$, 所以

$$AC\cdot AD=2AD$$

即

$$a_{2n}\cdot AE=a_n$$

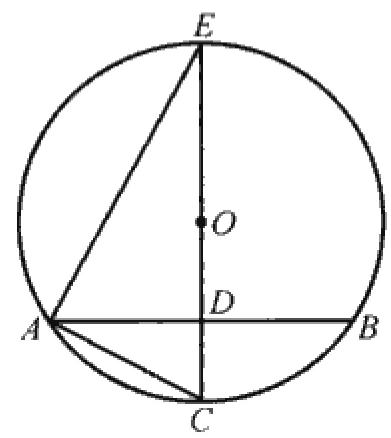


图 1

又 $AE=\sqrt{EC^2-AC^2}=\sqrt{4-a_{2n}^2}$, 所以

$$a_{2n}\sqrt{4-a_{2n}^2}=a_n, a_{2n}=\sqrt{2\pm\sqrt{4-a_n^2}}$$

由 $n\geqslant 3, a_{2n}\leqslant a_6=1$, 得

$$a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$$

定理 2　若 $k\in\mathbf{N}^*$, 则

$$a_{2^kn}=\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}}}}\ (k+1\text{ 个根号})$$

(可用定理 1 并对 k 用数学归纳法证明)

在单位圆中，易知 $a_n=2\sin\frac{\pi}{n}$.

当 $k\to+\infty$ 时，单位圆的内接正 2^kn 边形的周长 $2^kna_{2^kn}\to$ 单位圆的周长 2π.

所以，由定理 2，得:

定理 3　当 $n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 3$ 时

$$\lim_{k\to+\infty}2^{k-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2+\cos\frac{\pi}{n}}}}}\ (k\text{ 个根号})=\frac{\pi}{n}$$

在定理 3 中,选 $n=3,4$,得

推论 (1) $\lim\limits_{k\to+\infty}2^{k-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ (k 个根号) $=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $\lim\limits_{k\to+\infty}2^{k}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ (k 个根号) $=\pi$.

推论(2) 说明定理 3 在 $n=2$ 时也成立.

猜想 定理 3 在 $n\in\mathbf{R}$ 且 $n\geqslant 2$ 时均成立.

导　　数



用导数研究一类不等式
—— 以直代曲法的应用

文献[1],[2]介绍了如下不等式:

若 $a,b,c \in \mathbf{R}^+$, $a+b+c=1$,则

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2} \leqslant \frac{27}{10} \qquad ①$$

文献[3]给出了①的一个初等证明,文献[4]又将①推广为:

若 $a,b,c,d \in \mathbf{R}^+$, $a+b+c+d=1$,则

$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3} \leqslant \frac{256}{65} \qquad ②$$

文献[5]又证得

$$\frac{1}{(1+a^2)^2}+\frac{1}{(1+b^2)^2}+\frac{1}{(1+c^2)^2}+\frac{1}{(1+d^2)^2} \leqslant \frac{1\,024}{289} \text{(条件同③的条件)} \qquad ③$$

证明时用到了:

引理　若 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}(0<x<1)$,则 $f(x) \leqslant \dfrac{5\,376-4\,096x}{4\,913}$(当且仅当 $x=\dfrac{1}{4}$ 时取等号).

引理的证明初等但复杂.实际上,用导数易证引理且还可看出其来历及背景:曲线 $y=f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{4}$ 处的切线在该曲线上方(切点除外,下同).这种想法已有人得到——以直代曲法[6].全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修Ⅱ)》(2004年人民教育出版社)第126页的近似计算公式

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \text{(当 } \Delta x \text{ 充分小时)}$$

也可用以直代曲法得到;文献[4]的式(3)也是这种背景及来历.

(文献[5]的右栏有七处印刷错误:定理及其证明中的两处"$\dfrac{824}{289}$"均应改为"$\dfrac{1\,024}{289}$",证明中的五处"$\dfrac{4\,096}{4\,913}$"均应改为"$-\dfrac{4\,096}{4\,913}$";文献[4]的式(2)中"$\dfrac{1}{x_1^3}$"应

改为“$\frac{1}{1+x_1^3}$”.)

本文将用以直代曲法来推广不等式①,②,③,并判明文献[4]末的猜想.

定理1 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 2,\sum_{i=1}^{n}a_i=1.\alpha>(<)1$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 取得最小(大)值.

证明 设 $f(x)=(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(0<x<1)$,得

$$f'(x)=x^{\alpha-1}(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1},f''(x)=\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+x^\alpha}(0<x<1)$$

当 $\alpha>(<)1$ 时,$f''(x)>(<)0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 是下(上)凸函数,曲线 $f(x)$ 在该曲线上任一点切线的上(下)方.而 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{n}$ 处的切线方程为

$$y-(1+\frac{1}{n^\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}=(n^\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}-1}(x-\frac{1}{n})$$

$$y=(n^\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}-1}x+(1+\frac{1}{n^\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

所以 $$(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant(\leqslant)(n^\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}-1}x+(1+\frac{1}{n^\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-1}(0<x<1)$$

当且仅当 $x=\frac{1}{n}$ 时取等号.

在此式中分别令 $x=a_1,a_2,\cdots,a_n$ 后相加即得要证结论成立.

注 文献[6]的前三个例题均可用定理1的证法简洁证出.

定理2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 2,\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.

(1)若 $m(m+1)>(<)0$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i)^m}$ 取得最小(大)值.

(2)① 若 $m<0$ 或($m>\frac{n^2-1}{2}$ 且 $n^{2m}(n^2+2m+1)\leqslant(n^2+1)^{m+1}$),则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i^2)^m}$ 取得最小值;

② 若 $0<m\leqslant\frac{n-1}{2}$ 或($\frac{n-1}{2}<m<\frac{n^2-1}{2}$ 且 $2^mn^{2m}(n^2-2mn+2m+1)\geqslant(n^2+1)^{m+1}$),则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i^3)^m}$ 取

得最大值.

(3)① 若 $m<0$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i^3)^m}$ 取得最小值;

② 若 $0<m\leqslant\frac{n^2+n-1}{3}$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i^3)^m}$ 取得最大值.

(4)① 若 $k\in\mathbf{N},k\geqslant2,m<0$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i^k)^m}$ 取得最小值;

② 若 $k\in\mathbf{N},k\geqslant2,m>0,n^{k-1}\geqslant km+1$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i^k)^m}$ 取得最大值.

证明　设 $f(x)=\frac{1}{(1+x^k)^m}(0<x<1)$,得

$$f'(x)=-mkx^{k-1}(1+x^k)^{-m-1}$$

曲线 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{n}$ 处的切线方程为

$$y-\left(\frac{n^k}{n^k+1}\right)^m=-\frac{kmn^{km+1}}{(n^k+1)^{m+1}}\left(x-\frac{1}{n}\right)$$

$$y=\frac{n^{km}}{(n^k+1)^{m+1}}(n^k+km+1-kmnx)$$

若能证得

$$\frac{1}{(1+x^k)^m}\geqslant(\leqslant)\frac{n^{km}}{(n^k+1)^{m+1}}(n^k+km+1-kmnx)(0<x<1)\text{(当且仅当 }x=\tfrac{1}{n}\text{ 时取等号)}\quad④$$

(此式便是文献[5]的引理等诸多结论的推广)

在 ④ 中分别令 $x=a_1,a_2,\cdots,a_n$ 后相加得

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i^k)^m}$ 取得最小(大)值　⑤

④ 即 $(x^k+1)^m(kmnx-n^k-km-1)\geqslant(\leqslant)-n^{-km}(n^k+1)^{m+1}(0<x<$

1),当且仅当 $x=\frac{1}{n}$ 时取等号.

令 $g(x)=(x^k+1)^m(kmnx-n^k-km-1)(0<x<1)$ ⑥

即证当且仅当 $x=\frac{1}{n}$ 时 $g(x)$ 取得最小(大)值 ⑦

$g'(x)=km(x^k+1)^{m-1}[x^{k-1}(kmnx-n^k-km-1)+n(x^k+1)](0<x<1)$ ⑧

(1) 当 $k=1$ 时,由⑧得

$$g'(x)=nm(m+1)(x+1)^{m-1}(x-\frac{1}{n})(0<x<1)$$

当 $m(m+1)>(<)0$ 时,$g'(x)$ 与 $x-\frac{1}{n}$ 同(异)号,所以当且仅当 $x=\frac{1}{n}$ 时 $g(x)$ 取到最小(大)值,再由⑦,⑤知要证结论成立.

(2) 当 $k=2$ 时,由⑧得

$$g'(x)=2nm(2m+1)(x^2+1)^{m-1}(x-\frac{1}{n})(x-\frac{n}{2m+1})(0<x<1)$$ ⑨

① 当 $m<-\frac{1}{2}$ 时成立:$\frac{n}{2m+1}<0,x-\frac{n}{2m+1}>0$,由⑨知 $g'(x)$ 与 $x-\frac{1}{n}$ 同号,从而可得欲证.

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时成立:在定理1中令 $\alpha=2$ 立得.

当 $-\frac{1}{2}<m<0$ 时,$0<2m+1<1,\frac{n}{2m+1}>1,x-\frac{n}{2m+1}<0$,由⑨知 $g'(x)$ 与 $x-\frac{1}{n}$ 同号,也得欲证.

当 $m>\frac{n^2-1}{2}$ 且 $n^{2m}(n^2+2m+1)\leqslant(n^2+1)^{m+1}$ 时,$m>0,0<\frac{n}{2m+1}<\frac{1}{n}<1$,由⑨知 $g'(x)$ 与 $(x-\frac{n}{2m+1})(x-\frac{1}{n})$ 同号,所以 $g'(x)$ 的符号如图1所示,进而得 $g(x)$ 的增减性如图2所示,又可得 $g(\frac{1}{n})\leqslant g(0)$(即 $(\frac{1}{n^2}+1)^m(-n^2-1)\leqslant-n^2-2m-1$,$g(x)$ 即⑥中 $k=2$ 的情形),所以当且仅当 $x=\frac{1}{n}$ 时 $g(x)$ 取得最小值,可得欲证.

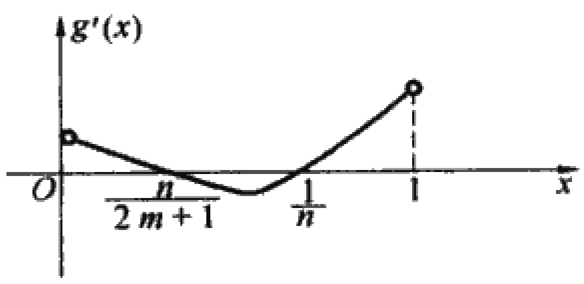


图 1

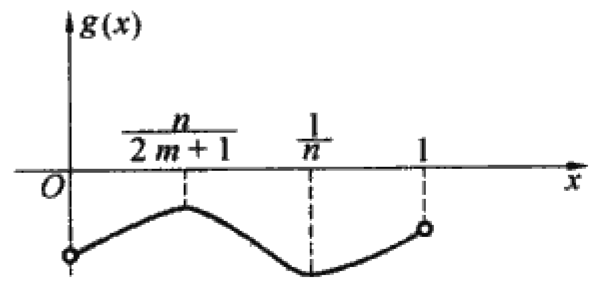


图 2

② 即证在条件下，当且仅当 $x=\frac{1}{n}$ 时 $g(x)$ 取得最大值.

当 $0<m\leqslant\frac{n-1}{2}$ 时，$\frac{n}{2m+1}\geqslant 1$，$x-\frac{n}{2m+1}<0$，由 ⑨ 知 $g'(x)$ 与 $\frac{1}{n}-x$ 同号，可得欲证.

当 $\frac{n-1}{2}<m<\frac{n^2-1}{2}$ 且 $2^m n^{2m}(n^2-2mn+2m+1)\geqslant(n^2+1)^{m+1}$ 时，$m>0$，$0<\frac{1}{n}<\frac{n}{2m+1}<1$，由 ⑨ 知 $g'(x)$ 与 $(x-\frac{1}{n})(x-\frac{n}{2m+1})$ 同号，$g'(x)$ 的符号如图 3 所示，$g(x)$ 的增减性如图 4 所示，又可得 $g(\frac{1}{n})\geqslant g(1)$，所以当且仅当 $x=\frac{1}{n}$ 时 $g(x)$ 取得最大值.

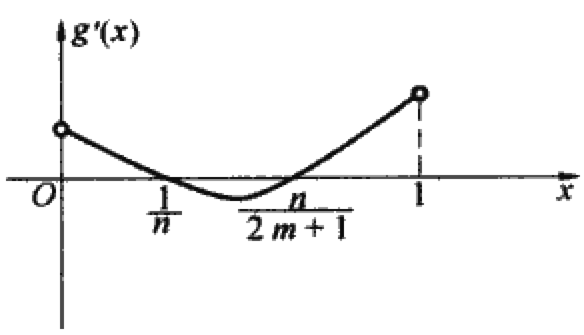


图 3

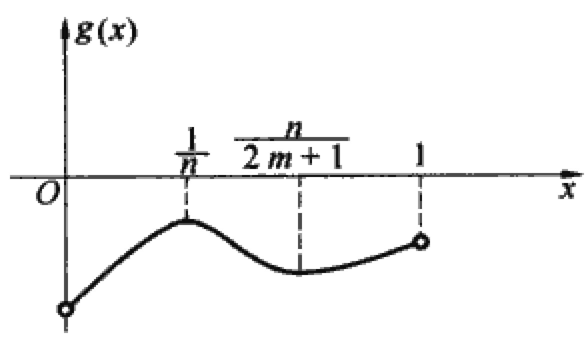


图 4

(3) 当 $k=3$ 时，由 ⑧ 得

$$g'(x)=3mn(x^3+1)^{m-1}(x-\frac{1}{n})[(3m+1)x^2-n^2x-n](0<x<1) \quad ⑩$$

① 当 $m<-\frac{1}{3}$ 时成立：由 ⑩ 知 $g'(x)$ 与 $x-\frac{1}{n}$ 同号，要证结论成立.

当 $m=-\frac{1}{3}$ 时成立：在定理 1 中令 $\alpha=3$ 立得.

当 $-\frac{1}{3}<m<0$ 时，$n^2>2>6m+2>0$，$\frac{n^2}{6m+2}>1$，二次函数

$$h(x)=(3m+1)x^2-n^2x-n(0<x<1) \quad ⑪$$

是减函数，$h(x) < h(0) < 0$，由 ⑩ 知 $g'(x)$ 与 $x - \frac{1}{n}$ 同号，要证结论成立.

② 当 $0 < m \leqslant \frac{n^2 - 2}{6}$ 时，$\frac{n^2}{6m + 2} \geqslant 1$，可得函数 ⑪ 是减函数，$h(x) < 0$，由 ⑩ 知 $g'(x)$ 与 $\frac{1}{n} - x$ 同号，要证结论成立.

当 $\frac{n^2 - 2}{6} < m \leqslant \frac{n^2 + n - 1}{3}$ 时，函数 ⑪ 的对称轴为 $x = \frac{n^2}{6m + 2}(0 < \frac{n^2}{6m + 2} < 1)$，又 $h(0) < 0, h(1) = 3m + 1 - n^2 - n \leqslant 0$，所以 $h(x) < 0$. 再由 ⑩ 知 $g'(x)$ 与 $\frac{1}{n} - x$ 同号，要证结论成立.

(4) 由 ⑧，得

$$g'(x) = km(x^k + 1)^{m-1}\{n[1 - (nx)^{k-1}] - (km + 1)x^{k-1}(1 - nx)\} = kmn(x^k + 1)^{m-1}(1 - nx)[1 + (nx) + (nx)^2 + \cdots + (nx)^{k-2} - \frac{km + 1}{n}x^{k-1}] \tag{⑫}$$

① 当 $k = 2$ 时

$$g'(x) = 2mn(x^2 + 1)^{m-1}(1 - nx)(1 - \frac{2m + 1}{n}x) \tag{⑬}$$

由 $m < 0$，得 $2m + 1 < 1, \frac{2m + 1}{n}x < \frac{x}{n} < 1, 1 - \frac{2m + 1}{n}x > 0$，$g'(x)$ 与 $x - \frac{1}{n}$ 同号，要证结论成立.

当 $k \geqslant 3$ 时，可证 $(nx)^{k-2} > \frac{km + 1}{n}x^{k-1}$（当 $km + 1 > 0$ 时，$n^{k-1} > 1 > km + 1 > (km + 1)x$；当 $km + 1 \leqslant 0$ 时也有 $n^{k-1} > (km + 1)x$），由 ⑫ 得 $g'(x)$ 与 $x - \frac{1}{n}$ 同号，要证结论成立.

② 当 $k = 2$ 时，$n \geqslant 2m + 1, 1 - \frac{2m + 1}{n}x > 0$，由 ⑬ 知 $g'(x)$ 与 $\frac{1}{n} - x$ 同号，要证结论成立.

当 $k \geqslant 3$ 时，同 ① 的证明得 $g'(x)$ 与 $\frac{1}{n} - x$ 同号，要证结论成立.

定理 2 证毕！

在定理 2(2)② 中分别令 $m = 1,2,3$，得

若 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+, n \geqslant 3, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，则当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$ 时，$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + a_i^2}$ 取得最大值 ⑭

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 4,\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i^2)^2}$ 取得最大值　⑮

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 6,\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i^2)^3}$ 取得最大值　⑯

在 ⑭,⑮ 中分别令 $n=3,4$ 便得 ①,③.

在定理 2(3)② 中可令 $m=1$,得

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 2,\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^3}$ 取得最大值　⑰

在 ⑰ 中令 $n=4$ 便得 ②.

在定理 2(4)② 中可令 $k=n-1(n\geqslant 3),m=1$,得

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 3,\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i^{n-1}}$ 取得最大值　⑱

还可用均值不等式证得

若 $a,b\in\mathbf{R}^+,a+b=1$,则当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$ 取得最小值　⑲

由 ⑱,⑲ 知文献[4]末的猜想在 $n=2$ 时不成立,在其余的情形均成立.

读者用本文的方法还可研究如下最值问题:

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n,p\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 2,\sum_{i=1}^{n}a_i=1,p,k,m$ 是常数,求 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(p+a_i^k)^m}$ 的最值.

应当指出的是,有些最值问题不能用以直代曲法来解决,比如 ⑮ 中 $n=3$ 的情形:

若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+,a+b+c=1$,求 $\frac{1}{(1+a^2)^2}+\frac{1}{(1+b^2)^2}+\frac{1}{(1+c^2)^2}$ 的最值.

请读者解决它(可参见文献[7]的解决多元函数最值的方法).

参考文献

[1] 安振平,梁丽平.精彩问题来自不断的探索与反思[J].中学数学教学参考,2002(8):27-28.

[2] 佟成军.一个不等式的再质疑与另证[J].数学通讯,2005(21):31.

[3] 刘宜兵.一个不等式的初等证明[J].中学数学,2006(10):34.

[4] 田彦武.一个不等式的推广及猜想[J].中学数学,2007(2):11.

[5] 陈宝安,安振平.一个四元分式不等式[J].中学数学,2007(7):41.

[6] 丁兴春.以直代曲法证明不等式[J].数学通讯,2007(5):17-19.

[7] 甘志国.对两个结论的注记[J].数学通讯,2006(19):20-21.

切线的斜率与割线的斜率的关系
——2006年四川卷理科压轴题的简解

函数图象的割线斜率与切线斜率有下面的关系.

定理　设函数$f(x)$在开区间Ⅰ上可导，$a \in \mathbf{R}$，则：

(1) 对于任意的区间$(x_1, x_2) \subset$ Ⅰ有$\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > a \Leftrightarrow$对于任意的$x \in$ Ⅰ有$f'(x) \geqslant a$且对于任意的区间$Ⅰ_0 \subset$ Ⅰ，当$x \in Ⅰ_0$时$f'(x) = a$不能恒成立；

(2) 对于任意的区间$(x_1, x_2) \subset$ Ⅰ有$\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a \Leftrightarrow$对于任意的$x \in$ Ⅰ有$f'(x) \leqslant a$且对于任意的区间$Ⅰ_0 \subset$ Ⅰ，当$x \in Ⅰ_0$时$f'(x) = a$不能恒成立；

(3) 对于任意的区间$(x_1, x_2) \subset$ Ⅰ有$\left|\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| > a \Leftrightarrow$对于任意的$x \in$ Ⅰ有$|f'(x)| \geqslant a$且对于任意的区间$Ⅰ_0 \subset$ Ⅰ，当$x \in Ⅰ_0$时$f'(x) = a$及$f'(x) = -a$均不能恒成立；

(4) 对于任意的区间$(x_1, x_2) \subset$ Ⅰ有$\left|\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| < a \Leftrightarrow$对于任意的$x \in$ Ⅰ有$|f'(x)| \leqslant a$且对于任意的区间$Ⅰ_0 \subset$ Ⅰ，当$x \in Ⅰ_0$时$f'(x) = a$及$f'(x) = -a$均不能恒成立.

引理1　对于任意的$a \in \mathbf{R}$，有：

(1) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$或$x < -a$；

(2) $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a$或$x \leqslant -a$；

(3) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$；

(4) $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

证明　只证(1)：当$a > 0$时是熟知的结论；

当$a = 0$时，$|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow x > 0$或$x < -0$；

当$a < 0$时，$|x| > a \Leftrightarrow x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x > a$或$x < -a$.

引理2　若$f(x)$在区间Ⅰ上可导，则$f(x)$在Ⅰ上单调增加(减少)$\Leftrightarrow$在

Ⅰ上$f'(x) \geqslant (\leqslant) 0$且对于任意的区间 $I_0 \subset I$,当 $x \in I_0$ 时$f'(x) = 0$不恒成立.(参见文献[1]第236页的定理)

定理的证明　只证(1),(3).

(1) 左边$\Leftrightarrow \dfrac{[f(x_1) - ax_1] - [f(x_2) - ax_2]}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$(其中 $g(x) = f(x) - ax$)$\Leftrightarrow g(x)$在Ⅰ上是增函数$\Leftrightarrow g'(x) = f'(x) - a \geqslant 0$(用引理2,这里省去了一些文字的叙述,下同)$\Leftrightarrow$右边.

(2) 左边 $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > a$ 或$\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < -a$(用引理1)$\Leftrightarrow \dfrac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$或$\dfrac{h(x_1) - h(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$(其中 $g(x) = f(x) - ax, h(x) = f(x) + ax$)$\Leftrightarrow f'(x) \geqslant a$ 或$f'(x) \leqslant -a \Leftrightarrow$右边.

例1　已知函数$f(x) = -x^3 + ax^2 + b(a, b \in \mathbf{R})$的图象上任意不同的两点连线的斜率小于1,求 a 的取值范围.

解　由定理(2),得$f'(x) = -3x^2 + 2ax \leqslant 1$在 $x \in \mathbf{R}$ 时恒成立,即

$$3x^2 - 2ax + 1 \geqslant 0$$

恒成立,所以$\Delta = (2a^2) - 12 \leqslant 0, a \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

所以所求 a 的取值范围是$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

注　可以验证:当 $a = \sqrt{3}, b = 0$时,$f(x) = -x^3 + \sqrt{3}x^2$的图象上任一条割线的斜率小于1,但图象在拐点(即凹凸性的分界点,其二阶导数值为0,参见文献[1]的第258页)$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$处切线的斜率为1(图1).

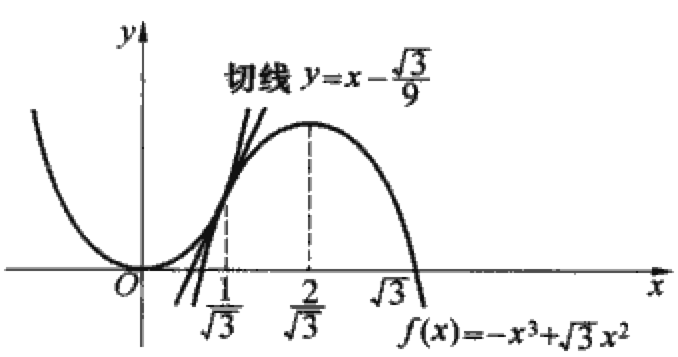


图1

例2　(2006年四川理科压轴题最后一问)已知函数$f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x} + a\ln x (x > 0)$,$f(x)$的导函数是$f'(x)$,$a \leqslant 4$,$x_1, x_2$是不相等的正数,求证:$|f'(x_1) - f'(x_2)| > |x_1 - x_2|$.

证明　设 $g(x) = f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{a}{x}$,即证$\left|\dfrac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}\right| > 1$.

由定理(3)知,即证 $x > 0$时$|g'(x)| \geqslant 1$,即

$$\left|2 + \frac{4}{x^3} - \frac{a}{x^2}\right| > 1 (x > 0) \qquad ①$$

只需证

$$2 + \frac{4}{x^3} - \frac{a}{x^2} > 1 (x > 0)$$

即
$$x^2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x}>a(x>0)$$
这由均值不等式及题设可证
$$x^2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\geqslant 3\sqrt[3]{4}>4\geqslant a$$

例3　设$f(x)=x^2+\frac{2}{x}+a\ln x(x>0)$，$f(x)$的导函数是$f'(x)$，若对于两个任意的不相等正数$x_1,x_2$均有$|f'(x_1)-f'(x_2)|>|x_1-x_2|$，求实数$a$的取值范围.

解　可证：当$a>3\sqrt[3]{4}$时式①不成立，即存在$x>0$，使$\left|2+\frac{4}{x^3}-\frac{a}{x^2}\right|\leqslant 1$，即
$$-1\leqslant 2+\frac{4}{x^3}-\frac{a}{x^2}\leqslant 1$$
$$x^2+\frac{4}{x}\leqslant a\leqslant 3x^2+\frac{4}{x}$$

当$x>0$时，$x^2+\frac{4}{x}$的值域是$[3\sqrt[3]{4},+\infty)$，$x^2+\frac{4}{x}<3x^2+\frac{4}{x}$.

所以由图2知，当$a>3\sqrt[3]{4}$时，均存在$x=x_0$，使$x_0^2+\frac{4}{x_0^2}\leqslant a\leqslant 3x_0^2+\frac{4}{x_0}$.

即$a>3\sqrt[3]{4}$时式①不成立：而由例2的解法知，当$a\leqslant 3\sqrt[3]{4}$时式①成立.

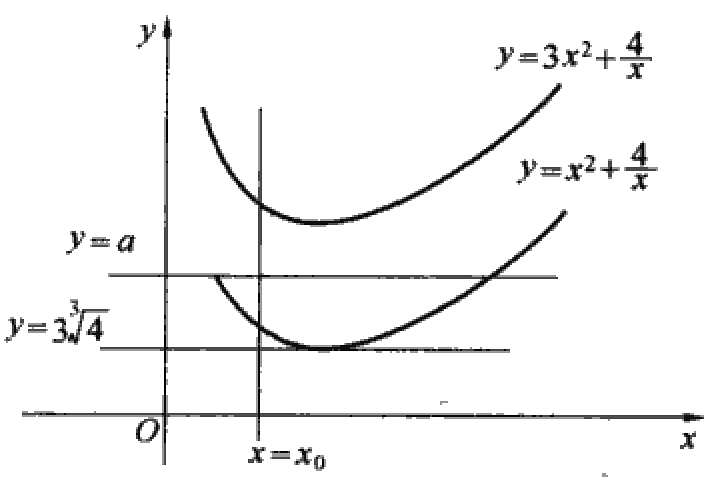


图2

再由例2的解法知，所求a的取值范围是$(-\infty,3\sqrt[3]{4}]$.

参考文献

[1] 刘玉琏，傅沛仁.数学分析讲义(上册)[M].3版.北京：高等教育出版社，1992.

三、四次函数的极大值均大于极小值

我们知道,极值反映的只是函数的局部情形,因而,一个函数的极大值小于(等于,大于)极小值都有可能.但是,对于三次函数和四次函数,有:

定理 (1) 若一个一元三次函数有极大值和极小值,则极大值大于极小值;

(2) 若一个一元四次函数有极大值和极小值,则极大值大于极小值.

证明 (1) 设一元三次函数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$$

又可设

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c=3a(x-x_1)(x-x_2)(x_1<x_2)$$

先证 $a>0$ 时成立.

可得此时当 $x\in(-\infty,x_1)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 是增函数;当 $x\in(x_1,x_2)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 是减函数;当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 是增函数.

所以 $f(x)$ 的极大值是 $f(x_1)$,极小值是 $f(x_2)$.

又由 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上是减函数,得 $f(x_1)>f(x_2)$.

再证 $a<0$ 时成立:

此时由已证的结论得 $-f(x)$ 的极大值 A 大于极小值 B,所以 $-B>-A$,即 $f(x)$ 的极大值大于极小值.

(2) 设一元四次函数

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e(a\neq 0)$$
$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

因为 $f(x)$ 既有极大值又有极小值,所以方程 $f'(x)=0$ 至少有两个相异的实根.又因为实系数一元 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次方程的虚根成对出现,所以 $f'(x)=0$ 的根全是实根.

先证 $a>0$ 时成立.

由 $f'(x)=0$ 的根有两种情形得以下两种情形:

① 可设 $f'(x)=4a(x-x_1)(x-x_2)^2(x_1\neq x_2)$.

当 $x_1<x_2$ 时,可得 $f(x)$ 的极小值是 $f(x_1)$,无极大值;

当 $x_1 > x_2$ 时,可得 $f(x)$ 的极小值是 $f(x_2)$,无极大值.

均与题设矛盾!

② 可设 $f'(x) = 4a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x_1 < x_2 < x_3)$.

可得 $f(x_1)$,$f(x_3)$ 均是 $f(x)$ 的极小值,极大值是 $f(x_2)$.

又 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上是增函数,在 (x_2, x_3) 上是减函数,所以 $f(x_2) > f(x_1)$,$f(x_2) > f(x_3)$.

同(1)可证 $a < 0$ 时也成立.

定理的结论对四次以上的函数不再成立:

反例　当 $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$,易得 $f(-2) = -16$ 是一个极大值,$f(2) = 16$ 是一个极小值,而极大值小于极小值.

一个结论的简证

《微积分》中介绍过以下结论:

函数 $y=(1+\frac{1}{x})^{x}(x>0)$ 单调递增,$y=(1+\frac{1}{x})^{x+1}(x>0)$ 单调递减,且 $(1+\frac{1}{x})^{x}<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{x})^{x+1}$($x>0$,e是自然对数的底).

高中生用导数知识即可给出该结论的简洁证明.

(1) 先证 $(1+\frac{1}{x})^{x}<\mathrm{e}(x>0)$.

即证 $(1+t)^{\frac{1}{t}}<\mathrm{e}$,$1+t<\mathrm{e}^{t}$,$\mathrm{e}^{t}-t>1(t>0)$.

设 $f(t)=\mathrm{e}^{t}-t(t>0)$,得 $f'(t)=\mathrm{e}^{t}-1>0$(因为 $t>0$)

所以 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,得 $f(t)>f(0)=1$,$\mathrm{e}^{t}-t>1$,所以结论(1)成立.

(2) 再证函数 $y=(1+\frac{1}{x})^{x}(x>0)$ 单调递增.

由复合函数的单调性知,即证函数

$$f(t)=(1+t)^{\frac{1}{t}}\left(t>0,t=\frac{1}{x}\right)$$

单调递减,只需证 $g(t)=\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\frac{\ln(t+1)}{t}(t>0)$ 单调递减.

只需证

$$g'(t)=\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^{2}}<0$$

$$\frac{t}{1+t}<\ln(1+t)(t>0) \qquad ①$$

设 $h(t)=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}(t>0)$,得

$$h'(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^{2}}>0$$

所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,$h(t)>h(0)=0$,式①成立.

(3) 又证 $\mathrm{e}<(1+\frac{1}{x})^{x+1}(x>0)$.

即证 $(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})>1$,在式①中令 $t=\frac{1}{x}$ 立得.

(4) 最后证函数 $y=(1+\frac{1}{x})^{x+1}(x>0)$ 单调递减.

只需证 $f(x)=\ln y=(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})(x>0)$ 单调递减,有

$$f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})+(x+1)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}$$

由 $(1+\frac{1}{x})^x<e$,可得

$$\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x},f'(x)<0$$

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

推论　数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增,数列 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 单调递减,且 $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

下面举一道以以上结论为背景的题:

例　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n=\frac{n}{2}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_2=1$.

(1) 求 S_n;

(2) 证明: $\frac{3}{2}\leqslant(1+\frac{1}{2a_{n+1}})^n<2$.

解　(1) 由 $2S_n=na_n,2S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}$,相减后整理,得

$$(n-1)a_{n+1}=na_n$$

又有 $(n+1)a_{n+1}=na_{n+2}$,相加得

$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$$

所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.又 $a_1=0,a_2=1$,所以 $a_n=n-1,S_n=\frac{1}{2}n(n-1)$.

(2) 即证 $\frac{3}{2}\leqslant(1+\frac{1}{2n})^n<2$.

这可由数列 $\{(1+\frac{1}{2n})^{2n}\}$ 单调递增且 $(1+\frac{1}{2n})^{2n}<e$ 立得.

定点(直线)与已知曲线上的点的距离的最值

以下是文献[1]的结论及其证明:

结论　设函数 $y=f(x)$ 可导,点 $P_0(x_0,y_0)$ 在函数 $y=f(x)$ 的图象 C 上,定点 $A(a,b)$ 到 P_0 的距离是定点 A 到 C 上点的最短(长)距离,则 C 在点 P_0 处的切线与直线 AP_0 垂直.

证明　设 $P(x,y)$ 是 $y=f(x)$ 的图象上的点,则

$$|AP|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\sqrt{(x-a)^2+[f(x)-b]^2}$$

令 $u=(x-a)^2+[f(x)-b]^2$,则……

$$u'=2(x-a)+2[f(x)-b]\cdot f'(x)$$

因为 u 在 $x=x_0$ 时取最值,所以 $u'|_{x=x_0}=0$.所以

$$f'(x_0)=-\frac{x_0-a}{f(x_0)-b}$$

又 $k_{AP_0}=\frac{f(x_0)-b}{x_0-a}$,所以 $f'(x_0)\cdot k_{AP_0}=-1$,故结论成立.

(三处下划线为笔者所加).

第一处下划线的推理欠严密:因为可导函数 u 的最值点可在稳定点(即导数值为 0 的点)处取得,也可能在区间(定义域)的端点取得(反例:如图 1).

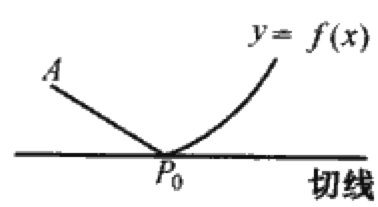


图 1

第二、三处下划线的推理也欠严密(均要证明分母不为 0).

可以以上的结论及其证明改述为:

定理 1　设函数 $y=f(x)$ 在区间 Ⅰ 上可导,定点 A 不在曲线 $y=f(x)$ 上,P 是曲线 $y=f(x)$ 上的动点(非端点),若点 P 在 P_0 处使 AP 最长或最短,则直线 AP_0 是曲线 $y=f(x)$ 在 P_0 处的法线(即与曲线 $y=f(x)$ 在 P_0 处的切线垂直的直线).

证明　设 $A(a,b)$,$P(x,f(x))$,得

$$|AP|^2=(x-a)^2+[f(x)-b]^2\triangleq g(x)$$

$$g'(x)=2(x-a)+2[f(x)-b]\cdot f'(x)$$

由题设,得 $x=x_0$ 时 $g(x)$ 取最值,所以 $g'(x_0)=0$,即

$$x_0 - a + [f(x_0) - b] \cdot f'(x_0) = 0 \qquad ①$$

(1) 若 $x_0 = a$，可证 $f(x_0) \neq b$（否则点 $A(a,b)$ 即点 $P_0(x_0, f(x_0))$ 在曲线上），所以由 ①，得 $f'(x_0) = 0$，此时定理 1 成立.

(2) 若 $x_0 \neq a$，由 ① 得 $f(x_0) \neq b$，且 $f'(x_0) = -\frac{x_0 - a}{f(x_0) - b}$，又 $k_{AP_0} = \frac{f(x_0) - b}{x_0 - a}$，所以 $k_{AP_0} \cdot f'(x_0) = -1$.

此时定理 1 也成立.

定理 2　设函数 $y = f(x)$ 在区间 Ⅰ 上可导，定直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 无公共点，P 是曲线 $y = f(x)$ 上的动点（非端点），若点 P 在 P_0 处使 P 到 l 的距离最长或最短，则曲线 $y = f(x)$ 在点 P_0 处的切线与 l 平行.

证明　设 $l: Ax + By + C = 0$（A, B 不同时为 0，$P(x, f(x))$），得点 P 到直线 l 的距离为

$$g(x) = \frac{|Ax + Bf(x) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

由公式 $|x|' = (\sqrt{x^2})' = \frac{x}{|x|}$，得

$$g'(x) = \frac{(Ax + Bf(x) + C)[A + Bf'(x)]}{\sqrt{A^2 + B^2}\,|Ax + Bf(x) + C|}$$

由题设，得 $g'(x_0) = 0$. 又由直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 无公共点，得 $Ax_0 + Bf(x_0) + C \neq 0$，所以

$$A + Bf'(x_0) = 0$$

由此知 $B \neq 0$（否则 $A = B = 0$），所以 $f'(x_0) = -\frac{A}{B}$. 从而得定理 2 成立.

下面再考虑定理 1,2 的推广.

在图 2 中，定点 A 在定圆 O 的外（内）部，直线 AO 交圆 O 于点 B, C，则以 A 为圆心，AB, AC 为半径的圆分别与圆 O 内切，外切，由这些圆的位置关系，立知 AB, AC 的长度分别是点 A 与圆 O 上的点的距离的最大，最小值. 此时直线 ABC 是圆 O 在点 B, C 处的法线.

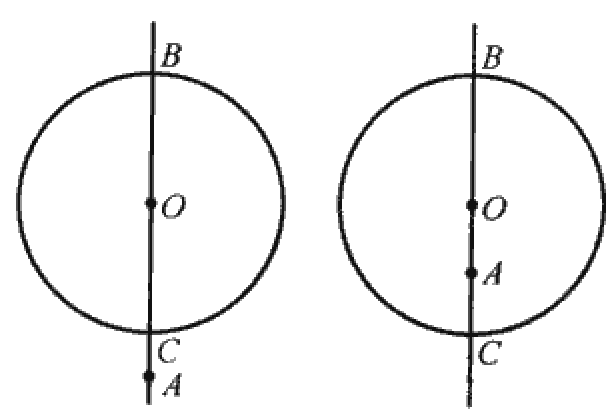


图 2

在图 3 中，定直线 l 与定圆 O 相离，过点 O 作直线 $OA \perp l$，垂足为 A，OA 交圆 O 于 B, C 两点，立得 AB, AC 的长度分别是圆 O 上的点与直线 l 距离的最大，最小值，此时直线 l 与圆 O 在点 B, C 处

的切线平行.

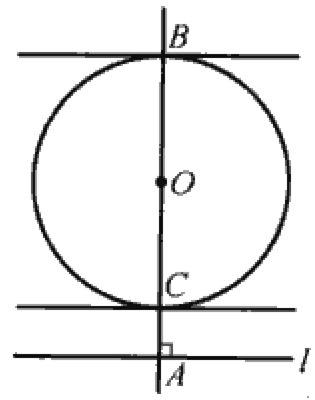


图 3

在图 4 中,点 F,B,A 是定椭圆 Γ 的左焦点,左,右顶点,易知 FA,FB 的长度分别是点 F 与 Γ 上的点的距离的最大,最小值.此时直线 AFB 是椭圆 Γ 在点 A,B 处的法线.

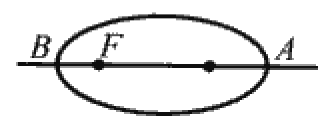


图 4

由以上结论,笔者提出:

猜想 1 设曲线 $f(x,y)=0$ 在该曲线上每一点均有切线(则法线也存在),定点 A 不在该曲线上,P 是该曲线上的动点(但不是端点,封闭曲线无端点),若点 P 在 P_0 处使 AP 最长或最短,则直线 AP_0 是该曲线在点 P_0 处的法线.

猜想 2 设曲线 $f(x,y)=0$ 在该曲线上每一点均有切线,定直线 l 与该曲线无公共点,P 是该曲线上的动点(非端点),若点 P 在 P_0 处使 P 到 l 的距离最短或最长,则该曲线在点 P_0 处的切线与 l 平行.

猜想 3 关于曲面也有类似于猜想 1,2 的结论成立.

参考文献

[1] 汤香花.一个最值问题的探究[J].数学通讯,2005(23):10-11.

对函数极值定义的异议

全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修 II)》(2004 年人民教育出版社)第 128 ~ 129 页给出的函数极值定义是:

一般的,设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义,如果对 x_0 附近的所有点,都有

$$f(x) < (>) f(x_0)$$

我们就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大(小)值.极大值与极小值统称为极值.

(笔者注:以上定义中的"点 x_0 附近"应改为"点 x_0 及其附近.")

一些大学中的《数学分析》、《微积分》课本中也是这样定义极值的,比如樊映川等编《高等数学讲义》(人民教育出版社,1964 年第 2 版)第 305 页的定义.

此定义并不严谨.

若按上述定义知,常数函数 $f(x) = c$ 是没有极值的,所以在任何开区间上也没有极值　①

又由《高等数学讲义》第 311 页的叙述(以下也是显然的事实,下划线为笔者所加):

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的,则它的最大值及最小值必然是存在的.我们来讨论怎样求出最大值的方法(求最小值的方法也可同样讨论).

<u>如果函数在 a 与 b 间的一点达到最大值,这个最大值显然也是极大值</u>;但最大值也可以在区间端点 a,b 处达到.…

可知:

在开区间上可导函数的最值一定是极值　②

又常数函数在任何开区间上都是可导的　③

所以由结论 ①② 知,常数函数在开区间上没有最值.

众所周知,函数的最大(小)值就是所有函数值中最大(小)的,常数函数的最大值、最小值均存在,并且都是这个常数本身,这与 ③ 矛盾!

这说明教科书中函数极值的定义不严谨,可修正为:

一般的,设函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近都有定义,如果对 x_0 附近的所有点,都有

$$f(x) \leqslant (\geqslant) f(x_0)$$

我们就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大(小)值.极大值与极小值统称为极值.

注 以上“x_0 附近”是不严格的表述(限于高中生的理解),严格的表述指 x_0 的一个任意小的空心邻域(见罗元等主编,路见可主审的《数学分析简明教程(上册)》(1988 年武汉工业大学出版社) 第 4 页).教科书中的定义对于 x_0 左侧及右侧的函数值均不是常数的情形是正确的.以上“修正”即通常的说法“极值是局部范围的最值”.

实际上,以上《数学分析简明教程(上册)》第 169 页的定义,谷超豪主编《数学词典》(1992 年上海辞书出版社) 第 275 页的定义,赵慈庚《一元函数微分学》(上海科技出版社,1980) 第 316 页的定义均与以上“修正”一致.

数　　系



三谈一类根式的无理性

文献[1]用整系数多项式有理根的定理(即文献[1]的定理1,文献[2]的引理)研究了形如

$$a = \sum_{i=1}^{s} \sqrt[n_i]{a_i}(a_i, n_i \in \mathbf{N}^*, i = 1,2,\cdots,s;\text{约定}\sqrt[1]{a} = a,\text{下同}) \quad ①$$

的数是否为无理数的简洁判断方法,得到了 $s = 1,2$ 时的完整结论.

文献[2]用一元 n 次方程根与系数的关系(即韦达定理)及初等对称多项式的知识得到了一般的结论:

定理 1　形如 ① 的数 a 是某个首一整系数多项式的根(最高次项系数是 1 的多项式叫做首一多项式).

定理 2　若形如 ① 的数 $a \notin \mathbf{Z}$,则 $a \in \complement_R \mathbf{Q}$.

用文献[2]的方法还可证得:

定理 3　(1) 形如

$$b = \sum_{i=1}^{s}(\pm \sqrt[n_i]{a_i})(a_i, n_i \in \mathbf{N}^*, i = 1,2,\cdots,s;\text{该和式中的“}\pm\text{”任意选取,下同}) \quad ②$$

的数是某个首一整系数多项式的根;

(2) 若形如 ② 的数 $b \notin \mathbf{Z}$,则 $b \in \complement_R \mathbf{Q}$.

根据著名数学家谷超豪主编的《数学词典》[3] 第 91 ~ 92 页中关于“代数数”、“超越数”、“代数整数”的叙述,对定理 3 的背景就更清楚了:

定义 1　整系数多项式的根叫做代数数.例如,全体有理数及$\sqrt{2}$,虚数单位 i 都是代数数.如果一个代数数是 n 次整系数多项式的根,且不是任何 1 次,2 次,…,$n-1$ 次整系数多项式的根,那么这个代数数叫做 n 次代数数.显然,有理数都是一次代数数,而$\sqrt{2}$ 和 i 都是二次代数数.不是任何整系数多项式的根的实数叫做超越数.可以证明超越数有无穷多个,如 π,e 等.

定义 2　在 $\mathbf{Q}$ 上不可约的首一整系数多项式的根叫做代数整数,且这个多项式的次数就叫做这个代数整数的次数.全体整数以及$\sqrt{2}$,i,$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 等都是代

数整数.两个代数整数的和、差、积仍是代数整数;代数整数中的有理数必为整数.代数整数一定是代数数.若 θ 是一代数数,则必有 $q \in \mathbf{N}^*$,使 $q\theta$ 为代数整数.

因为“两代数整数的和、差、积仍是代数整数”,所以“有限个代数整数的和、差、积也是代数整数”.又因为形如$\sqrt[n]{a_0}(n, a_0 \in \mathbf{N}^*)$的数都是代数整数(不一定是 n 次代数整数),从而可得定理3(1)成立.再由文献[1]的定理1,立得定理3(2)也成立.

定理4 若 $\pm\sqrt{c} \pm \sqrt[n]{d} \in \mathbf{Q}^*(c, d \in \mathbf{Q}^+, n \in \mathbf{N}^*)$,则$\sqrt{c}, \sqrt[n]{d} \in \mathbf{Q}^+$.

证明 这里包含四种情形,只需证明“$\pm\sqrt{c} + \sqrt[n]{d}$”的情形.

(1) 当 n 为奇数时,可设 $n = 2m + 1(m \in \mathbf{N}^*)$.

又设 $\pm\sqrt{c} + \sqrt[n]{d} = t, t \in \mathbf{Q}^*$,得

$$\sqrt[n]{d} = t \mp \sqrt{c}$$

$$d = (t \mp \sqrt{c})^{2m+1} = t^{2m+1} \mp C_{2m+1}^1 t^{2m}\sqrt{c} + C_{2m+1}^2 t^{2m-1}\sqrt{c} \mp C_{2m+1}^3 t^{2m-2} c\sqrt{c} + \cdots +$$
$$C_{2m+1}^{2m} tc^m \mp c^m\sqrt{c} = A + B\sqrt{c}(A \in \mathbf{Q}, B \in \mathbf{Q}^*)$$

$\sqrt{c} = \dfrac{d - A}{B}$,得$\sqrt{c} \in \mathbf{Q}$,$\sqrt{c} \in \mathbf{Q}^+$.

又 $\pm\sqrt{c} + \sqrt[n]{d} \in \mathbf{Q}$,所以$\sqrt[n]{d} \in \mathbf{Q}$,$\sqrt[n]{d} \in \mathbf{Q}^+$.

(2) 当 n 为偶数时,同上也可获证.

用定理4的逆否命题来判断某些数是无理数将比定理2来得更快.

推论 若 $c, d \in \mathbf{Q}^+, n \in \mathbf{N}^*$,$\sqrt{c}$ 或$\sqrt[n]{d} \notin \mathbf{Q}$,又 $d = \pm\sqrt{c} \pm \sqrt[n]{d} \neq 0$,则$\alpha \in \complement_R \mathbf{Q}$.

例 (前苏联大学生数学竞赛题)证明$\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$是无理数.

证明 由推论立得.

猜想1 若 $\pm\sqrt[m]{c} \pm \sqrt[n]{d} \in \mathbf{Q}^*(c, d \in \mathbf{Q}^+, m, n \in \mathbf{N}^*)$,则$\sqrt[m]{c}, \sqrt[n]{d} \in \mathbf{Q}$.

猜想2 设 $n_i \in \mathbf{N}^*, a_i \in \mathbf{Q}^+(i = 1,2,\cdots,s)$,若$\sum\limits_{i=1}^{s}(\pm\sqrt[n_i]{a_i})$(此和式中任意两项的和不为0) $\in \mathbf{Q}^*$,则$\sqrt[n_i]{a_i} \in \mathbf{Q}$.

猜想3 设 $n_i \in \mathbf{N}^+, a_i \in \mathbf{Q}^+(i = 1,2,\cdots,s)$,若$\sqrt[n_i]{a_i}(i = 1,2,\cdots,s)$之一是无理数,则$\sum\limits_{i=1}^{s}(\pm\sqrt[n_i]{a_i})$(不为0时)不能表示成 $\pm\sqrt[n]{c}(n \in \mathbf{N}^+, c \in \mathbf{Q}^+)$的形式.

参考文献

[1] 余芳惠.一类根式的无理性研究[J].数学通讯,2003(1):29-30.
[2] 雷雪萍.再谈一类根式的无理性研究[J].数学通讯,2004(11):31.
[3] 谷超豪.数学词典[M].上海:上海辞书出版社,1992.

Cardan 公式与整数的一种无理分拆

定理 1[1] 不定方程$\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}=1$的全部正整数解为$(x,y)=(3n-1,(3n-1)^2+(2n-1)^3)$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\sqrt[3]{3n-1\pm\sqrt{(3n-1)^2+(2n-1)^3}}\in \complement_R\mathbf{Q}$.

这种无理分拆的背景当然是 Cardan 公式(即一元三次方程的求根公式)，由文献[2]第 33 页的定理,得:

引理 方程 $x^3+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 在$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$时,有唯一实根,且此根为

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

因为方程 $x^3+3mx-a^3-3ma=0(a,m\in\mathbf{R})$ 在$(a^3+3ma^2)^2+4m^3>0$时有唯一实根,又此方程有实根 $x=a$,再由引理,得

$$a=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(a^3+3ma)+\sqrt{\frac{1}{4}(a^3+3ma)^2+m^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(a^3+3ma)-\sqrt{\frac{1}{4}(a^3+3ma)^2+m^3}}$$

又设 $a^3+3ma=2y,y^2+m^3=z$,得

$$a=\sqrt[3]{y+\sqrt{z}}+\sqrt[3]{y-\sqrt{z}} \qquad ①$$

(1) 当 $a=2n(n\in\mathbf{Z})$ 时,$y=4n^3+3mn,z=(4n^3+3mn)^2+m^3$.

(2) 当 $a=2n-1(n\in\mathbf{Z})$ 时,得$(2n-1)^3+3m(2n-1)=2y$,设 $y=(2n-1)y_1$,得

$$(2n-1)^2+y_1=3(y_1-m)$$

可设 $y_1=3m'-(2n-1)^2$,得

$$y=3m'(2n-1)-(2n-1)^3,y_1-m=m'$$

$$z=[3m'(2n-1)-(2n-1)^3]^2+[2m'-(2n-1)^2]^3$$

这样,(1),(2) 分别给出了任意偶数及任意奇数的一种形如 ① 的分拆.

若以上分拆中再限定 $m,m'\in\mathbf{Z}$,且 $z>0$,则以上分拆即为整数形如 ① 的

所有分拆.

定理 2　(1) 不定方程$\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}=2n(n\in\mathbf{Z})$的全部整数解为

$$(x,y)=(4n^3+3mn,(4n^3+3mn)^2+m^3)$$

其中 $m\in\mathbf{Z}$,且$(4n^3+3mn)^2+m^3>0$;

(2) 不定方程$\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}=2n-1(n\in\mathbf{Z})$的全部整数解为

$$(x,y)=(3m(2n-1)-(2n-1)^3,[3m(2n-1)-(2n-1)^3]^2+[2m-(2n-1)^2]^3)$$

其中 $m\in\mathbf{Z},([3m(2n-1)-(2n-1)^3]^2+[2m-(2n-1)^2]^3)>0$.

证明　下面只证(2).

由以上讨论知,所给的(x,y)值是所给不定方程的解.

将所给的不定方程两边立方,得

$$(2n-1)^3=2x+3\sqrt[3]{x^2-y}\cdot(2n-1)$$

由 $x,y,n\in\mathbf{Z}$ 知$\sqrt[3]{x^2-y}\in\mathbf{Q}$.

又 $x,y\in\mathbf{Z}$,所以$\sqrt[3]{x^2-y}\in\mathbf{Z}$.

可设 $x=(2n-1)x_1,x_1\in\mathbf{Z}$,得

$$(2n-1)^2=2x_1+3\sqrt[3]{(2n-1)^2x_1^2-y}$$

$$3\mid(2n-1)^2+x_1$$

可设 $x_1=3m-(2n-1)^2,m\in\mathbf{Z}$,得

$$x=3m(2n-1)-(2n-1)^3$$

进而可得

$$y=[3m(2n-1)^2-(2n-1)^3]^2+[2m-(2n-1)^2]^3$$

得结论(2)成立.

注　在定理 2 中若要求是无理分拆,则还应满足$\sqrt[3]{x\pm\sqrt{y}}\in\complement_R\mathbf{Q}$.

参考文献

[1] 朱玉扬."1"的一种无理分拆[J].数学通报,2005(2):59.
[2] 张远达.浅谈高次方程[M].武汉:湖北教育出版社,1983.

纯循环小数的一个性质

定理 设 $p \left| \frac{10^{mk}-1}{10^k-1} \right.$ $(m \geqslant 2, p, m, k, r \in \mathbf{N}^*)$，$\frac{r}{p} = \overline{0.\dot{a}_1 a_2 \cdots \dot{a}_{mk}}$（只写出第一个循环节），又记 $A_i = \overline{a_{(i-1)k+1} \cdots a_{ik}}$ $(i = 1,2,\cdots,m)$，则 $A_1 + A_2 + \cdots + A_m = h(10^k - 1)$，$h$ 是小于 m 的一个正整数.

证明 可得 $\frac{r}{p} = \frac{\overline{a_1 a_2 \cdots a_{mk}}}{10^{mk}-1} = \frac{A_1 \cdot 10^{(m-1)k} + \cdots + A_{m-1} \cdot 10^k + A_m}{10^{mk}-1}$

所以
$$\frac{r}{p} \cdot \frac{10^{mk}-1}{10^k-1} = A_1 \cdot \frac{10^{(m-1)k}-1}{10^k-1} + \cdots + A_{m-2} \cdot \frac{10^{2k}-1}{10^k-1} + A_{m-1} + \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_m}{10^k-1}$$

因为 $p \left| \frac{10^{mk}-1}{10^k-1} \right.$，所以上式的左端是正整数，得 $h = \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_m}{10^k-1}$ 也是正整数.

因为 $0 \leqslant A_i \leqslant 10^k - 1$ $(i = 1,2,\cdots,m)$，所以
$$0 \leqslant A_1 + A_2 + \cdots + A_m \leqslant m(10^k - 1)$$
又 A_i 不会全为 0，也不会全为 $10^k - 1$（因为 $a_1 a_2 \cdots a_{mk}$ 是第一个循环节），所以
$$0 < A_1 + A_2 + \cdots + A_m < m(10^k - 1)$$
得 h 是小于 m 的正整数.

定理中 $m = 2$ 时的结论即文献[1]中的推论 2.

参考文献

[1] 李抗强. 构造是完全平方数的连整数的方法[J]. 数学通讯，1996(1):24-25.

纯循环小数的一个性质及其应用

可以验证$\frac{2}{7}=0.\dot{2}85\,71\dot{4}$，$\frac{3}{7}=0.\dot{4}28\,57\dot{1}$，$\frac{5}{7}=0.\dot{7}14\,28\dot{5}$，$\frac{6}{7}=0.\dot{8}57\,14\dot{2}$的循环节有如下性质：

$\frac{2}{7}$的循环节 + $\frac{3}{7}$的循环节 = $(\frac{2}{7}+\frac{3}{7})$的循环节；

$\frac{2}{7}$的循环节 × 3 = $(\frac{2}{7}\times 3)$的循环节.

这些性质是纯循环小数的一般性质吗？

定理　设分数$\frac{a}{p}$，$\frac{b}{p}$，$\frac{ka+lb}{p}$($p,a,b,k,l\in\mathbf{Q},p\neq 0$)能化为循环节位数相同的纯循环小数：

$$\frac{a}{p}=\overline{0.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_n},\frac{b}{p}=\overline{0.\dot{b}_1\cdots\dot{b}_n},\frac{ka+lb}{p}=\overline{c.\dot{c}_1\cdots\dot{c}_n}$$

则
$$k\cdot\overline{a_1\cdots a_n}+l\cdot\overline{b_1\cdots b_n}=c(10^n-1)+\overline{c_1\cdots c_n}$$

证明　由纯循环小数化为分数的方法，得

$$\frac{a}{p}=\frac{\overline{a_1\cdots a_n}}{10^n-1},\frac{b}{p}=\frac{\overline{b_1\cdots b_n}}{10^n-1},\frac{ka+lb}{p}=\frac{c(10^n-1)+\overline{c_1\cdots c_n}}{10^n-1}$$

所以
$$\overline{a_1\cdots a_n}=\frac{a}{p}(10^n-1),\overline{b_1\cdots b_n}=\frac{b}{p}(10^n-1)$$
$$c(10^n-1)+\overline{c_1\cdots c_n}=\frac{ka+lb}{p}(10^n-1)$$

又可证$k\cdot\frac{a}{p}(10^n-1)+l\cdot\frac{b}{p}(10^n-1)=\frac{ka+lb}{p}(10^n-1)$，从而可得定理成立.

推论 1　(1) 定理中$k=l=1$的情形；

(2) 定理中$l=0$的情形；

(3) 定理中$b=p$的情形(此时$\overline{b_1\cdots b_n}=10^n-1$).

在定理中选$a=1,l=0,k=p$，又得：

推论 2　设$\frac{1}{p}$可化为有$n(n\in\mathbf{N}^*)$位循环节的纯循环小数(即$p\mid 10^n-1$)，设$\frac{10^n-1}{p}=\overline{a_1\cdots a_n}$($a_1,\cdots,a_n$可为0)，$a\cdot\overline{a_1\cdots a_n}=\overline{c_1\cdots c_n}$($c_1,\cdots,c_n$可为

0,这里 a 是不大于p 的自然数),则$\frac{1}{p}=\overline{0.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_n}$,$\frac{a}{p}=\overline{0.\dot{c}_1\cdots\dot{c}_n}$.

对于推论 2,这里注明两点(参见文献[1]):

(1) 当 $p\in\mathbf{N}^*$,$(p,10)=1$ 时,$\frac{1}{p}$ 总可化为有 $\varphi(p)$ 位循环节的纯循环小数,其中 $\varphi(p)$ 是 Euler 函数. $p=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i}$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}^*$,$i=1,\cdots,m$),则 $\varphi(p)=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$.

(2) 若 u 是满足$p\mid 10^u-1$ 的最小正整数,则$\frac{a}{p}$($a\in\mathbf{N}^*$,$p\nmid a$)可化为纯循环小数,且循环节的位数最少是 u,且 $u\mid\varphi(p)$.

推论 2 给出了分数化为纯循环小数的一种较好方法:不是进行小数除法,而是用整数除法也可化得.

以上十进制中的结论容易推广到任意进制的情形.

例 把$\frac{1}{13}$,$\frac{2}{13}$,$\frac{1}{65}$化为小数.

解 因为 $13\mid 10^6-1$,所以$\frac{1}{13}$,$\frac{2}{13}$均可化为循环节是 6 位的纯循环小数.

又
$$\frac{10^6-1}{13}=76\ 923,2\times 76\ 923=153\ 846$$

所以由推论 2,得

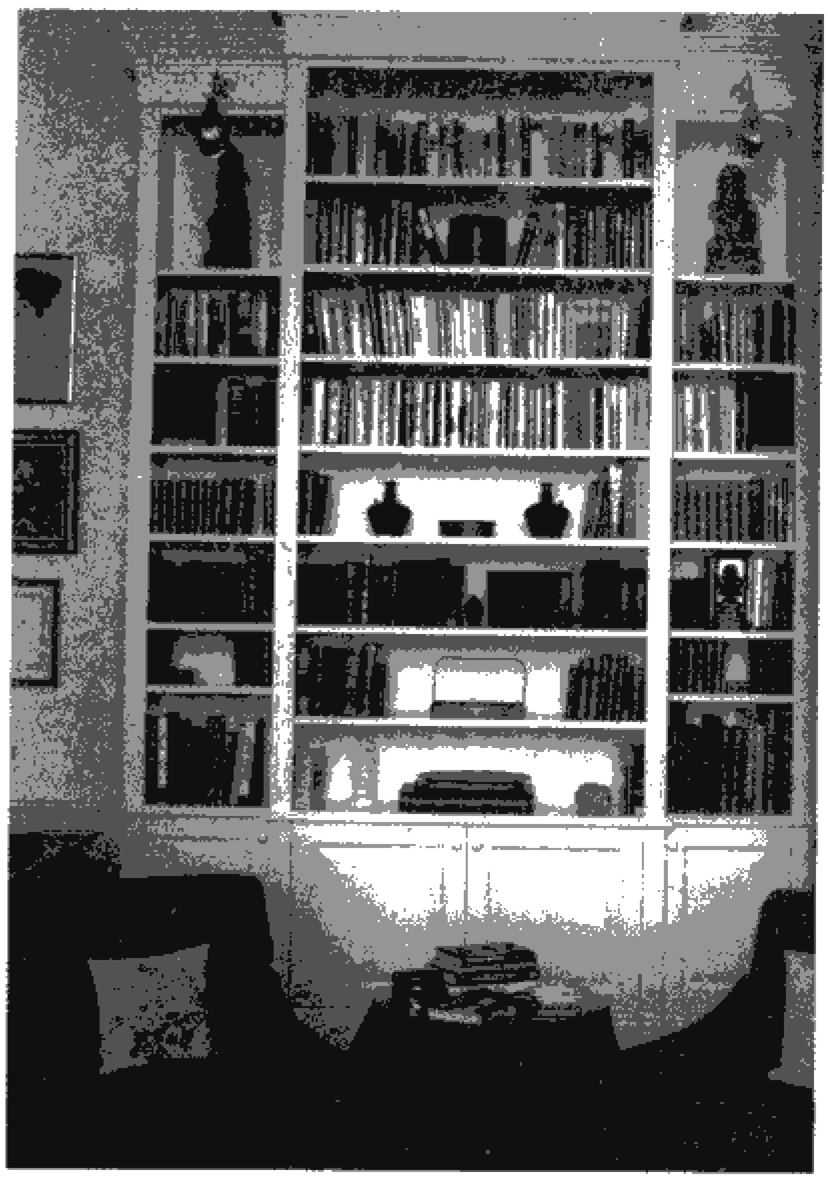
$$\frac{1}{13}=0.\dot{0}76\ 92\dot{3},\frac{2}{13}=0.\dot{1}53\ 84\dot{6}$$

$$\frac{1}{65}=\frac{1}{10}\times\frac{2}{13}=0.0\dot{1}5\ 384\ \dot{6}$$

参考文献

[1] 张远达.循环小数[M].武汉:湖北教育出版社,1984.

数学竞赛



对一道全俄中学生数学竞赛题的研究

1 赛题及其解答

第 22 届全俄中学生(九年级)数学竞赛第 3 题如下(表述有改动).

证明:方程

$$x^n + y^n = p^k(x,y,n,k \in \mathbf{N}^*,\text{奇数 } n > 1,p \text{ 是奇素数}) \qquad ①$$

的解满足 $n = p^s(s \in \mathbf{N}^*)$.

下面给出此题的完整解答.只需看以下三个引理.

引理 1 对于方程 ①,有:设 $p^r \parallel x(r \in \mathbf{N})$,则 $p_r \parallel y$,且 $k > rn$.

证明 设 $x = p^r x'$,$x' \in \mathbf{N}^*$,$p \nmid x'$.可设 $p^t \parallel y(t \in \mathbf{N})$,$y = p^t y'$,$y' \in \mathbf{N}^*$,$p \nmid y'$.

由 ①,得

$$p^{rn}x'^n + p^{tn}y'^n = p^k$$

若 $k \leqslant rn$,由 $k \in \mathbf{N}^*$,得 $r \in \mathbf{N}^*$.再得 $k = tn$,$r \geqslant t$,且$(p^{r-t}x')^n + y'^n = 1$,这不可能!

所以 $k > rn$,得 $rn = tn$,$r = t$,又 $p^t \parallel y$,所以 $p^r \parallel y$.

引理 2 对于方程 ①,有 $p \mid n$.

证明 在方程 ① 中,由引理 1,可设 $x = p^r x'$,$y = p^r y'$,$r \in \mathbf{N}$,$x',y' \in \mathbf{N}^*$,$p \nmid x'$,$p \nmid y'$.得:

$$x'^n + y'^n = p^{k-rn}(k - rn \in \mathbf{N}^*)$$

所以

$$p^{k-rn} = [(x'+y') - y']^n + y'^n = (x'+y')[(x'+y')^{n-1} - C_n^1(x'+y')^{n-2}y' + \cdots - C_n^{n-2}(x'+y')y'^{n-2} + ny'^{n-1}]$$

所以

$$x' + y' = p^l(l \in \mathbf{N}^*)$$

且有

$$p^{l(n-1)} - C_n^1 p^{l(n-2)}y' + \cdots - C_n^{n-2}p^l y'^{n-2} + ny'^{n-1} = p^{k-rn-l}$$

因为不可能有 $x' = y' = 1$,所以 $x' + y' < x'^n + y'^n$,即 $p^l < p^{k-rn}$,$k - rn > l$,所以 $p \mid ny'^{n-1}$,因为 $p \nmid y'$,所以 $p \mid n$.

引理 3 对于方程 ①,有 $n = p^s(s \in \mathbf{N}^*)$.

证明 由引理 2,在方程(1)中,可设 $n = p^s n'$,$s,n' \in \mathbf{N}^*$,$p \nmid n'$,得 n' 是奇数.

因为 $x^n + y^n = p^k$,所以$(x^{p^s})^{n'} + (y^{p^s})^{n'} = p^k$.

假设 $n' > 1$,由引理 2,得 $p \mid n'$,与 $p \nmid n'$ 矛盾!所以 $n' = 1$,得 $n = p^s(s \in \mathbf{N}^*)$.

解完赛题,我们自然还会问:能求出方程 ① 的全部解吗?下面给出肯定的回答.

2 方程 ① 的全部解

定理 1 方程 ① 的全部解是 $n = p = 3, k = 3r + 2, (x = 3^r, y = 2 \cdot 3^r)$ 或 $(x = 2 \cdot 3^r, y = 3^r)$,其中 $r \in \mathbf{N}$.

为证明定理 1,再给出两个引理.

引理 4 若 $a^p + b^p = p(a + b)$(p 是奇数,$p > 1, a, b \in \mathbf{N}^*$),则 $p = 3$,$(a = 1, b = 2)$ 或 $(a = 2, b = 1)$.

证明 若 $a \geqslant 2$,且 $b \geqslant 2$,又由 $p \geqslant 3$,得 $a^{p-1} > p, b^{p-1} > p$,所以 $a^p + b^p > p(a + b)$,与 $a^p + b^p = p(a + b)$ 矛盾!所以 $a = 1$ 或 $b = 1$.

若 $a = 1$,得 $b^{p-1} - b^{p-2} + b^{p-3} - \cdots + b^2 - b + 1 = p$.

若 $b \geqslant 3$ 可得上式的左边 $> b^{p-1} - b^{p-2} \geqslant 3^{p-1} - 3^{p-2} = 2 \cdot 3^{p-2} > p$(因为 $p \geqslant 3$),这不可能!所以 $b = 1$ 或 2,进而可得 $b = 2, p = 3$.

若 $b = 1$,同理可得 $a = 2, p = 3$.所以引理 4 成立.

引理 5 不定方程 $a^p + b^p = p^k$($a, b, k \in \mathbf{N}^*$,p 是奇素数)的全部解是 $p = 3, k = 3r + 2, (a = 3^r, b = 2 \times 3^r)$ 或 $(a = 2 \times 3^r, b = 3^r)$,其中 $r \in \mathbf{N}$.

证明 由引理 1,可设 $a = p^r a', b = p^r b', r \in \mathbf{N}, a', b' \in \mathbf{N}^*, p \nmid a', p \nmid b', k > rp$.得

$$a'^p + b'^p = p^{k-rp}$$

所以
$$a' + b' = p^l, l \in \mathbf{N}^*, l < k - rp$$

且
$$(p^l - b')^p + b'^p = p^{k-rp}$$

$$p^{l(p-1)} - C_p^1 p^{l(p-2)} b' + \cdots - C_p^{p-2} p^l b'^{p-2} + p b'^{p-1} = p^{k-rp-l}$$

因为 p 是奇素数,$p \mid C_p^{p-2}$,又 $p \nmid b'$,所以 $k - rp - l = 1$,得

$$a'^p + b'^p = p(a' + b')$$

由引理 4,得 $p = 3, (a' = 1, b' = 2)$ 或 $(a' = 2, b' = 1)$,进而可得引理 5 成立.

定理 1 的证明 由引理 2 可设 ① 中的 $n = pn', n' \in \mathbf{N}^*$.

① 即 $(x^{n'})^p + (y^{n'})^p = p^k$.

由引理 5,得 $p = 3, k = 3r + 2, (x^{n'} = 3^r, y^{n'} = 2 \times 3^r)$ 或 $(x^{n'} = 2 \times 3^r, y^{n'} = 3^r)$,其中 $r \in \mathbf{N}$.

由 $y^{n'} = 2 \times 3^r$ 或 $x^{n'} = 2 \times 3^r$ 均可得 $n' = 1$,从而有定理 1 成立.

定理 1 给出了比赛题本身更好的结论.

3 对又一个不定方程的研究

我们再来研究不定方程

$$x^n - y^n = p^k(x,y,k,n \in \mathbf{N}^*, n > 1, p \text{ 是素数}) \quad ②$$

得到了如下结论:

定理 2 不定方程②的解满足:若 $p^r \parallel x(r \in \mathbf{N})$,则 $k > rn$ 且 $x - y = p^r$.

为证明定理2,也给出一些引理(未证明者,是因为它们的证明很容易).

引理 6 不定方程 $u^n - v^n = 1(u,v,n \in \mathbf{N}^*, n > 1)$ 无解.

引理 7 对于②,若 $p^r \parallel x(r \in \mathbf{N})$,则 $p^r \parallel y$,且 $k > rn$.

引理 8 对于②,若 $p^r \parallel x(r \in \mathbf{N})$,则 $x - y = p^r$,或 $p \mid n$.

证明 先证明 $r = 0$ 时成立.即证:当 $p \nmid x$ 时,若 $x - y \neq 1$,则 $p \mid n$.

由②及 $p \nmid x$ 知 $p \nmid y$.再由②,得

$$(x-y)[(x-y)^{n-1} + C_n^1(x-y)^{n-2}y + \cdots + C_n^{n-2}(x-y)y^{n-2} + ny^{n-1}] = p^k$$

因为 $x - y \neq 1$,所以 $x - y = p^l, l \in \mathbf{N}^*, l < k$,得

$$p^{l(n-1)} + C_n^1 p^{l(n-2)}y + \cdots + C_n^{n-2}p^l y^{n-2} + ny^{n-1} = p^{k-l}$$

所以 $p \mid ny^{n-1}$.由 $p \nmid y$,得 $p \mid n$.

再证明当 $r \in \mathbf{N}^*$ 时成立.即证:当 $p^r \parallel x$(则 $p^r \parallel y$)时,若 $x - y \neq p^r$,则 $p \mid n$.

设 $x = p^r x', y = p^r y', x', y' \in \mathbf{N}^*, p \nmid x', p \nmid y'$,有

$$x'^n - y'^n = p^{k-rn}$$

由引理7知,$k - rn \in \mathbf{N}^*$.因为 $x - y \neq p^r$,所以 $x' - y' \neq 1$,由"$r = 0$时成立",得 $p \mid n$,即 $r \in \mathbf{N}^*$ 时也成立.

引理 9 对于②,若 $p^r \parallel x(r \in \mathbf{N})$,则 $x - y = p^r$,或 $n = p^s(s \in \mathbf{N}^*)$.

证明 假设 $x - y \neq p^r$ 由引理8,得 $p \mid n$.所以可设 $n = p^s n', s, n' \in \mathbf{N}^*$, $p \nmid n'$.得$(x^{p^s})^{n'} - (y^{p^s})^{n'} = p^k$.假设 $n' > 1$.

可设 $x = p^r x', y = p^r y', x', y' \in \mathbf{N}^*, p \nmid x', p \nmid y'$,所以 $p^{r \cdot p^s} \parallel x^{p^s}$,由引理8,得 $x^{p^s} - y^{p^s} = p^{r \cdot p^s}$,或 $p \mid n'$,但 $p \nmid n'$,所以 $x^{p^s} - y^{p^s} = p^{r \cdot p^s}$,进而可得 $x'^{p^s} - y'^{p^s} = 1$,由引理6知,这不可能!所以 $n' = 1$,得 $n = p^s(s \in \mathbf{N}^*)$.

引理 10 不定方程 $a^p - b^p = p^k(a,b,k \in \mathbf{N}^*, p \text{ 是素数})$ 无解.

证明 由引理7,可设 $a = p^r a', b = p^r b', r \in \mathbf{N}, a', b' \in \mathbf{N}^*, p \nmid a', p \nmid b', k > rp$.得

$$a'^p - b'^p = p^{k-rp}$$

因为 p 是素数,所以 $a' - b' = 1$,或 $a' - b' = p^l, l \in \mathbf{N}^*, l < k - rp$.

若 $a' - b' = 1$,得

$$(b'+1)^p-b'^p=p^{k-rp}$$

$$C_p^1b'^{p-1}+C_p^2b'^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}b'+1=p^{k-rp}$$

因为 $p\mid C_p^i(i=1,2,\cdots,p-1)$,所以 $p\mid 1$,这不可能!

所以 $a'-b'=p^l$,得

$$(p^l+b')^p-b'^p=p^{k-rp}$$

所以 $$p^{l(p-1)}+C_p^1p^{l(p-2)}b'+\cdots+C_p^{p-2}p^lb'^{p-2}+pb'^{p-1}=p^{k-rp-l}$$

因为 $p\nmid b'$,所以 $k-rp-l=1$,得

$$a'^p-b'^p=p(a'-b')$$

$$a'^{p-1}+a'^{p-2}b'+\cdots+a'b'^{p-2}+b'^{p-1}=p$$

所以 $a'=b'=1$,这也不可能!

所以引理 10 成立.

定理 2 的证明 由引理 7,8,只需证明 $p\mid n$ 时方程 ② 无解.这由引理 10 极易证明.

要求出不定方程 ② 的全部解,还需求出不定方程

$$(y+1)^n-y^n=p^k(y,n,k\in\mathbf{N}^*,n>1,p\text{ 是奇素数})\qquad③$$

的全部解.

要求出 ③ 的全部解是比较困难的,随着 n 的增大而越加困难.

当 $n=2$ 时,③ 的全部解是 $y=\dfrac{p^k-1}{2}$.

定理 3 当 $n=3$ 时,③ 的全部解满足 $y=\dfrac{x-1}{2}$,且 $4p^k-1=3x^2$.

证明 当 $n=3$ 时,得

$$y^2+y-\frac{p^k-1}{3}=0,y=\frac{\sqrt{\dfrac{4\cdot p^k-1}{3}}-1}{2}$$

从而可得定理 3 成立.

定理 3 说明,还需求出不定方程

$$4p^k-1=3x^2(k,x\in\mathbf{N}^*,p\text{ 是奇素数})\qquad④$$

的全部解.($(p,k,x)=(13,2,15),(181,2,209)$ 均是 ④ 的解)

($3u^2-v^2=2$ 有无数组正整数解,若 (u,v) 是其一组正整数解,则 $(v^2-uv+1,3uv-v^2-1)$ 也是其一组正整数解.若 $\dfrac{v^2+1}{2}=p^l(l\in\mathbf{N}^*,p$ 是形如 $6t+1$ 的素数),则 $k=2l,x=3uv$ 及 p 满足 $4p^k-1=3x^2$.)

一道俄罗斯数学竞赛题的再推广

文献[1]将第22届俄罗斯中学数学奥林匹克的一道决赛竞赛题(证明:首项为1,公差为729的等差数列一定有无穷多项是10的自然数次幂)推广为:

设 d 是自然数,且 $(d,10)=1$,则首项为1,公差为 d 的等差数列中一定有无穷多项是10的自然数次幂.(注:以上的"自然数"均应改为现在的"正整数")

本文将对这道竞赛题再作推广.

引理1[2] 设 d,h 是两个互素的正整数,则 $d\mid h^{\varphi(d)}-1$. 其中 $\varphi(d)$ 是 Euler 函数,表示 $0,1,2,\cdots,d-1$ 中与 d 互素的数的个数,因而 $\varphi(d)$ 是正整数.

引理2 设 d,h 是两个互素的正整数,则存在最小的正整数 l 使 $d\mid h^l-1$,且 $l\mid\varphi(d)$.

证明 由引理1立即可得.

数论中把引理2中的 l 叫做 h 对模 d 的次数[3].

定理 设 d,h 是两个互素的正整数,l 是满足 $d\mid h^l-1$ 的最小正整数(由引理2知 l 唯一存在,且可由 d,h 确定),则:

(1) 等差数列 $a_n=nd+a_0(n=0,1,2,\cdots)$ 中存在是 h 的自然数次幂的项 $\Leftrightarrow$ 存在小于 l 的自然数 m_0 使得 $d\mid h^{m_0}-a_0$;

(2) 上述 m_0 是满足 $d\mid h^{m_0}-a_0$ 的最小自然数;

(3) $a_n=h^m(m\in\mathbf{N})\Leftrightarrow m,n$ 满足 $n=\dfrac{h^{m_0+kl}-a_0}{d}\geqslant 0, m=m_0+kl,k\in\mathbf{N}$.

证明 (1)$\Rightarrow$ 设存在自然数 n_0 使 $a_{n_0}=n_0d+a_0=h^m(m\in\mathbf{N})$,则 $d\mid h^{m_0}-a_0$,可设 $m=bl+m_0(b,m_0\in\mathbf{N},m_0<l)$,得 $d\mid(h^l)^b\cdot h^{m_0}-a_0$,又因为 $d\mid h^l-1$,所以 $d\mid h^{m_0}-a_0$.

$\Leftarrow$ 因为 $d\mid h^{m_0}-a_0,d\mid h^l-1$,所以对于任意的 $b\in\mathbf{N}$,均有 $d\mid h^{bl+m_0}-a_0$,设 $m=bl+m_0,n_0=\dfrac{h^m-a_0}{d}$,得 $a_{n_0}=n_0d+a_0=h^m$.

所以存在 $b\in\mathbf{N}$(b 要满足 $h^m\geqslant a_0$),使等差数列 $\{a_n\}$ 中的项 $a_{n_0}=h^m(m\in\mathbf{N})$.

(2) 假设还存在小于 m_0 的自然数 m_0' 使得 $d\mid h^{m_0'}-a_0$,可得 $d\mid h^{m_0}-h^{m_0'}$,

$d \mid h^{m_0-m_0'}-1$.

因为$0 \leqslant m_0' < m_0 < l$,所以$m_0-m_0'$是小于$l$的正整数,这与$d \mid h^l-1$($l$是最小的正整数)矛盾!所以结论(2)成立.

(3)$\Rightarrow$ $a_n=nd+a_0=h^m(m \in \mathbf{N})$,所以$d \mid h^m-a_0$,又$d \mid h^{m_0}-a_0$(由结论(2)知$m_0 \leqslant m$),所以$d \mid h^{m-m_0}-1$,又$d \mid h^l-1$($l$是满足此的最小正整数),所以$m=m_0+kl(k \in \mathbf{N})$,也得$n=\dfrac{h^{m_0+kl}-a_0}{d} \geqslant 0$.

$\Leftarrow$ 因为$a_n=nd+a_0$,所以可得$a_n=h^m(m \in \mathbf{N})$.

在定理中选$a_0=1$,得$m_0=0$,并得以下推论:

推论 设d,h是两个互素的正整数,l是满足$d \mid h^l-1$的最小正整数,则等差数列$a_n=nd+1(n=0,1,2,\cdots)$中有无穷多项是h的自然数次幂,且$a_{n_0}=h^m(m \in \mathbf{N}) \Leftrightarrow m,n$满足$n=\dfrac{h^{kl}-1}{d}, m=kl, k \in \mathbf{N}$.

在推论中选$h=10$,即得文献[1]的结论.在推论中选$d=729, h=10$即可得本文开头赛题的结论,且可得$729n+1(n \in \mathbf{N})=10^m(m \in \mathbf{N}^*) \Leftrightarrow n=\dfrac{10^{81k}-1}{729}$且$m=81k(k \in \mathbf{N}^*)$.

由定理知,不是所有的等差数列中均有项是h的自然数次幂(h是已知的正整数),如等差数列:2,5,8,$\cdots$中就不存在10的自然数次幂.

参考文献

[1] 田正平.一道竞赛题的推广[J].中学数学月刊,1997(8):42.

[2] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988:169-176.

[3] 现代工程数学手册编委会.现代工程数学手册(Ⅲ)[M].武汉:华中工学院出版社,1988:256-257.

一道抽屉原则题的一般情形

美国 R.A.Brualdi 的名著《组合学导引》(李盘林,王天明译,1982 年华中理工大学出版社)的第 17 页讲述了一道抽屉原则题,第 25 页的练习 1 又给出了此题的加强形式:

有 11 周的时间准备锦标赛的一位国际象棋大师,决定每天至少比赛一次,但为了不使自己太疲倦,他决定在每一周中比赛不能超过 12 次.证明:对于每个 $h(h=1,2,3,\cdots,22)$,必存在相继的若干天,在这些天中国际象棋大师恰好参加 h 次比赛.

下面的定理给出了此题的一般情形.

定理 若 $a_i\in\mathbf{N}^*$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant 2n-t(t\in\mathbf{N}^*,n\leqslant t<2n)$ 则对于每个 $h(h=1,2,3,\cdots,t)$,在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这一列数中存在相继的若干个数,它们的和为 h.

证明 记 $A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(k=1,2,\cdots,n)$,有

$$1\leqslant A_1<A_2<\cdots<A_n\leqslant 2n-t \tag{①}$$

$$1+h\leqslant A_1+h<A_2+h<\cdots<A_n+h\leqslant 2n-t+h\leqslant 2n \tag{②}$$

当 $A_n+h<2n$ 时,得 $A_i,A_i+h(i=1,2,\cdots,n)$ 这 $2n$ 个数均为 $1,2,3,\cdots,2n-1$ 中的某一个,由抽屉原则得 $A_i,A_i+h(i=1,2,\cdots,n)$ 这 $2n$ 个数中必有两个相等,又由 ①,② 得,存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$,使 $A_j=A_i+h$,即 $a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j=h$.此时定理成立.

当 $A_n+h=2n$ 时(由 ② 知此时 $t=h$):

若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中有一个数为 h,此时定理已成立:$a_1+a_2+\cdots+a_i=h$.

若 $A_i\neq h(i=1,2,\cdots,n)$,则 $A_i,A_i+h(i=1,2,\cdots,n)$ 这 $2n$ 个数均为 $1,2,3,\cdots,h-1,h+1,\cdots,2n$ 这 $2n-1$ 个数中的某一个,由抽屉原则及 ①,② 得存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$,使 $A_j=A_i+h$,即 $a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j=h$.此时定理也成立.

在定理中令 $n=77,t=22$,即得本文开头的数学题.

有关三角形的一类面积问题的解决

1 问题

问题 1 如图 1,在 $\triangle ABC$ 中,边 BC 上顺次有 m 个分点 $A_1,A_2,\cdots,A_m$,且 $BA_1:A_1A_2:\cdots:A_mC=a_0:a_1:\cdots:a_m$,求线段 $AA_1,AA_2,\cdots,AA_m$ 把 $\triangle ABC$ 分割成 $m+1$ 个三角形中每个三角形的面积与 $S_{\triangle ABC}$ 的比值.

问题 2 如图 2,在 $\triangle ABC$ 中,边 BC 上顺次有 m 个分点 $A_1,A_2,\cdots,A_m$,且 $BA_1:A_1A_2:\cdots:A_mC=a_0:a_1:\cdots:a_m$,边 CA 上顺次有 n 个分点 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,且 $CB_1:B_1B_2:\cdots:B_nA=b_0:b_1:\cdots:b_n$,求线段 $AA_1,AA_2,\cdots,AA_m$ 和 $BB_1,BB_2,\cdots,BB_n$ 把 $\triangle ABC$ 分割成的图形(包括 $m+n+1$ 个三角形和 mn 个凸四边形)中每个图形的面积与 $S_{\triangle ABC}$ 的比值.

问题 3 如图 3,在 $\triangle ABC$ 中,边 BC 上顺次有 m 个分点 $A_1,A_2,\cdots,A_m$,且 $BA_1:A_1A_2:\cdots:A_mC=a_0:a_1:\cdots:a_m$,边 CA 上顺次有 n 个分点 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,且 $CB_1:B_1B_2:\cdots:B_nA=b_0:b_1:\cdots:b_n$,边 AB 上顺次有 k 个分点 $C_1,C_2,\cdots,C_k$,且 $AC_1:C_1C_2:\cdots:C_kB=c_0:c_1:\cdots:c_k$,求线段 $AA_1,AA_2,\cdots,AA_m$;$BB_1,BB_2,\cdots,BB_n$;$CC_1,CC_2,\cdots,CC_k$ 把 $\triangle ABC$ 分割成的图形中每个图形的面积与 $S_{\triangle ABC}$ 的比值.

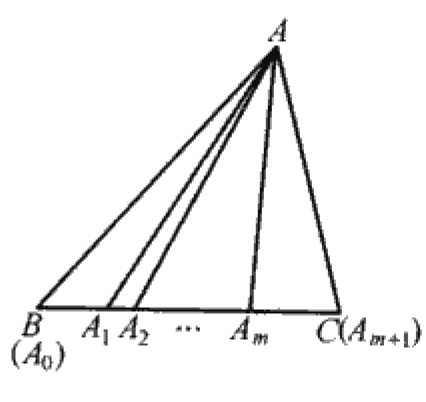


图 1

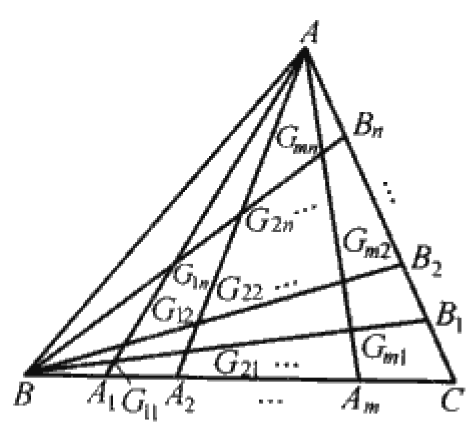


图 2

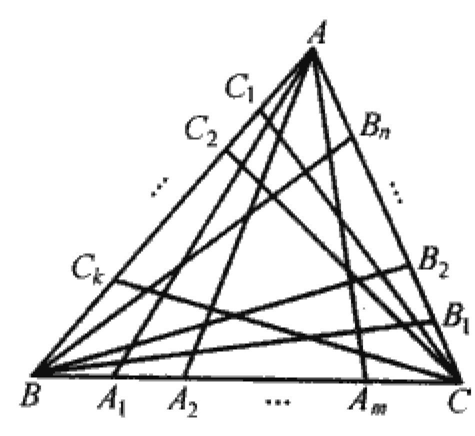


图 3

2 问题的解决

2.1 问题 1 的解决

小学生运用公式 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ah$ 即可解决问题 1:

又记点 B 为 A_0，点 C 为 A_{m+1}，则

$$\frac{S_{\triangle AA_iA_{i+1}}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a_i}{a_0 + a_1 + \cdots + a_m}(i = 0,1,\cdots,m)$$

2.2 问题 2 的解决

(1) $m = n = 1$ 的情形.

定理 1 如图 4，若 $BA_1 : A_1C = a_0 : a_1$，$CB_1 : B_1A = b_0 : b_1$，则

$$\frac{S_{\triangle AGB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a_0b_1}{a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1}$$

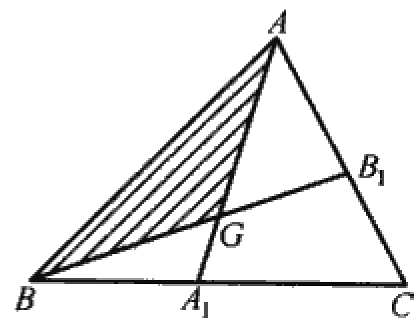


图 4

证明 对 $\triangle ACA_1$ 及其三边所在直线上的共线点 B, G, B_1 运用 Menelaus 定理[1]，得

$$\frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AG}{GA_1} = 1$$

所以

$$\frac{AG}{GA_1} = \frac{BC}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = \frac{(a_0 + a_1)b_1}{a_0b_0}$$

$$\frac{AG}{AA_1} = \frac{(a_0 + a_1)b_1}{a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1}$$

$$S_{\triangle AGB} = \frac{AG}{AA_1}S_{\triangle ABA_1} = \frac{AG}{AA_1} \cdot \frac{BA_1}{BC}S_{\triangle ABC} = \frac{(a_0 + a_1)b_1}{a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1} \cdot \frac{a_0}{a_0 + a_1}S_{\triangle ABC} = \frac{a_0b_1}{a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1}S_{\triangle ABC}$$

在图 4 中，因为 $\frac{S_{\triangle AGB}}{S_{\triangle ABC}}, \frac{S_{\triangle ABB_1}}{S_{\triangle ABC}}, \frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle ABC}}, \frac{S_{\triangle BCB_1}}{S_{\triangle ABC}}$ 均可求出，再运用面积相减，便可求出图 4 中分割出的四块面积中每一块面积与 $S_{\triangle ABC}$ 的比值

$$\frac{S_{\triangle AGB_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a_1b_1^2}{(b_0 + b_1)(a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1)}$$

$$\frac{S_{\triangle BGA_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a_0^2b_0}{(a_0 + a_1)(a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1)}$$

$$\frac{S_{\text{四边形}A_1CB_1G}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{b_0}{b_0 + b_1} - \frac{a_0^2b_0}{(a_0 + a_1)(a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1)} = \frac{a_1}{a_0 + a_1} - \frac{a_1b_1^2}{(b_0 + b_1)(a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1)}$$

(2) 一般情形.

运用(1) 的方法可以解决图 2 的一般情形:

由定理 1 知,$\frac{S_{\triangle AG_{1n}B}}{S_{\triangle ABC}},\frac{S_{\triangle AG_{2n}B}}{S_{\triangle ABC}},\cdots,\frac{S_{\triangle AG_{mn}B}}{S_{\triangle ABC}}$ 均可求出,又$\frac{S_{\triangle AB_nB}}{S_{\triangle ABC}}$ 也可求出,运用减法,即可求出$\frac{S_{\triangle AG_{1n}B}}{S_{\triangle ABC}},\frac{S_{\triangle AG_{2n}G_{1n}}}{S_{\triangle ABC}},\cdots,\frac{S_{\triangle AB_nG_{mn}}}{S_{\triangle ABC}}$.

又由定理 1 知,$\frac{S_{\triangle AG_{1,n-1}B}}{S_{\triangle ABC}},\frac{S_{\triangle AG_{2,n-1}B}}{S_{\triangle ABC}},\cdots,\frac{S_{\triangle AB_{n-1}B}}{S_{\triangle ABC}}$ 均可求出,再运用减法(减一次或两次)即可求出$\frac{S_{\triangle BG_{1n}G_{1,n-1}}}{S_{\triangle ABC}},\frac{S_{四边形G_{2n}G_{2,n-1}G_{1,n-1}G_{1n}}}{S_{\triangle ABC}},\cdots$

所以问题 2 已彻底解决,并且给出了计算方法.

2.3 问题 3 的解决

如图 3,该问题有些复杂.但是,运用定理 1 及问题 2 的解决方法也可解决问题 3 的每一种具体情形.这里只给出一个有用的结论:

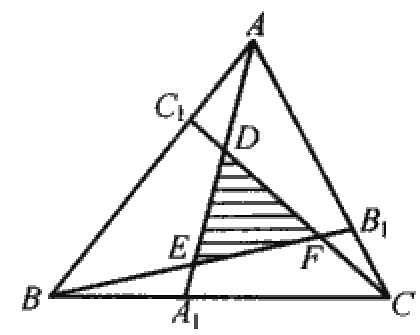


图 5

定理 2 如图 5,若 $BA_1:A_1C=a_0:a_1,CB_1:B_1A=b_0:b_1,AC_1:C_1B=c_0:c_1$,则

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(a_0b_0c_0-a_1b_1c_1)^2}{(a_0b_0+a_0b_1+a_1b_1)(b_0c_0+b_0c_1+b_1c_1)(c_0a_0+c_0a_1+c_1a_1)}$$

证明 运用定理 1 及 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AEB}-S_{\triangle BFC}-S_{\triangle CDA}$ 可证.

在图 5 中,容易看出,分割出的各块面积与 $S_{\triangle ABC}$ 的比值均可求出.

在图 5 中,AA_1,BB_1,CC_1 共线的充要条件是 $S_{\triangle DEF}=0$,也即$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$,此即 G.CeVa 定理[1].

推论 在图 5 中,若$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=k$,则$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$.

3 在解答赛题方面的应用

题 1 (《中等数学》2001(4) 第 40 页数学奥林匹克初中训练题) 如图 6,$BD=CE=\frac{1}{4}BC,CF=AG=\frac{1}{4}AC,S_{\triangle ABC}=1$,求 $S_{四边形KHIJ}$.

文献[2] 引申了该题,解答了图 6 中 $BD=CE=\frac{1}{n}BC,CF=AG=\frac{1}{n}AC$ 的情形.

题 2 (1996 年东方航空杯 —— 上海市初中数学竞赛题) 如图 7,点 M,N 三等分 AC,点 X,Y 三等分 BC,求 $S_{四边形SRNM}:S_{\triangle ABC}$.

题 3 （2002 年全国初中数学竞赛试题一第 3 题）如图 8，点 E,F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB,BC 的中点，连结 AF,CE 交于点 G，则 $\frac{S_{四边形AGCD}}{S_{矩形ABCD}}$ 等于（　　）.

(A) $\frac{5}{6}$　　(B) $\frac{4}{5}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{2}{3}$

文献[3]还解答了图 8 中 $\frac{AE}{EB}=k_1,\frac{CF}{FB}=k_2$ 的一般情形.

（提示：连结 AC 后用定理 1 即可求出.）

上述三道题也可作为读者的练习题.

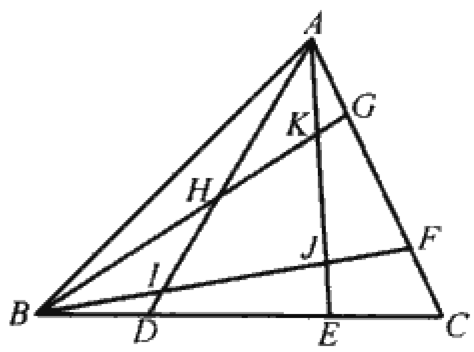


图 6

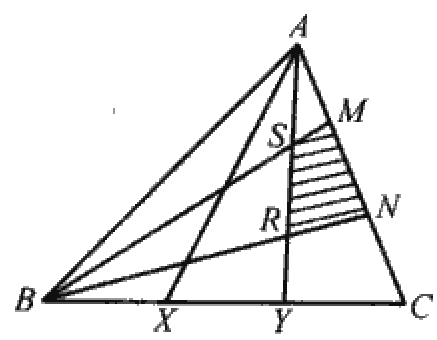


图 7

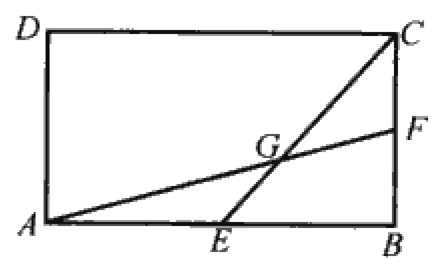


图 8

4 一点注记

我们注意到，在定理 1 中，有

$$\lim_{a_0\to+\infty}\frac{S_{\triangle AGB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle AB_1B}}{S_{\triangle ABC}},\lim_{b_1\to+\infty}\frac{S_{\triangle AGB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle ABC}}$$

请问：能否给出问题 2 的图 2 中分割出的各块图形的面积与 $S_{\triangle ABC}$ 的比值的统一公式（包括取极限的情形）？

在定理 2 中，有

$$\lim_{a_0\to+\infty}\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle CB_1F}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{b_0^2c_0}{(b_0+b_1)(b_0c_0+b_0c_1+b_1c_1)}$$

请问：能否给出问题 3 中的图 3 分割出的各块图形的面积与 $S_{\triangle ABC}$ 的比值的统一公式（包括取极限的情形）？

参考文献

[1] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉：华中师范大学出版社，1993：178，174.
[2] 江燕.一道竞赛训练题的引申及其应用[J].中学数学教学，2003(3)：42.
[3] 洪朝晖.一道竞赛题的推广[J].中学数学教学，2002(6)：38.

一道联赛加试题的完整解答

笔者发现2006年全国高中数学联赛加试第二题第(2)小题的答案不完整，且解答过程也欠严谨，但仍有文献[1]引用这道解答欠严谨的赛题，所以本文将给出这道试题的完整解答.

原赛题及其解答[1]是：

已知无穷数列$\{a_n\}$满足$a_0=x, a_1=y, a_{n+1}=\frac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，求通项$a_n(n\in\mathbf{N})$.

解　易得

$$a_n-1=\frac{(a_{n-1}-1)(a_{n-2}-1)}{a_{n-1}+a_{n-2}}(n\geqslant 2) \quad ①$$

$$a_n+1=\frac{(a_{n-1}+1)(a_{n-2}+1)}{a_{n-1}+a_{n-2}}(n\geqslant 2) \quad ②$$

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}\cdot\frac{a_{n-2}-1}{a_{n-2}+1}(n\geqslant 2) \quad ③$$

设$b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}(n\in\mathbf{N})$，得$n\geqslant 2$时

$$b_n=b_{n-1}b_{n-2}=b_{n-2}^2b_{n-3}=b_{n-3}^3b_{n-4}=\cdots$$

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{F_{n-1}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{F_{n-2}} \quad ④$$

这里

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 2), F_0=F_1=1 \quad ⑤$$

由⑤可求得并验证出

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right](n\in\mathbf{Z}, n\geqslant -2) \quad ⑥$$

所以式④对$n\in\mathbf{N}$都成立，由④可解得

$$a_n=\frac{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}+(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}}{(x+1)^{F_{n-1}}(y+1)^{F_{n-1}}-(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}}$$（其中F_{n-1}, F_{n-2}由式⑥确定）　⑦

先指出以上答案中式⑦的错误：当($x=\pm 1$且$n=1$)或($y=\pm 1$且$n=$

0) 时，⑦ 中均会出现无意义的式子“0^0”(因为由 ⑥ 得 $F_{-1}=0$).

解答过程也有多处不严谨：要得出式 ③ 必须先证明 $a_n+1\neq 0(n\geqslant 2)$ 恒成立，而只有当 $x\neq -1$ 且 $y\neq -1$ 时才能达到这一点；④ 的右边有“分母为 0”及“0^0” 这些无意义的情形；推导式 ⑦ 时，除应排除“0^0” 的情形外，还应证明 a_n 的系数即式 ⑦ 右边的分母不为 0 时才能两边同除以 a_n 的系数.

当然，以上赛题及其解法都有漂亮之处，若再注意“分母不为 0” 及“0^0 无意义” 这两个常识，解答就会完美无缺：

先得式 ①，② 成立.

当 $x=-1$ 或 $y=-1$ 时，由 ② 可得

$$a_n=\begin{cases} x & (n=0)\\ y & (n=1)\\ -1 & (n\geqslant 2)\end{cases} \tag{⑧}$$

当 $x\neq -1$ 且 $y\neq -1$ 时，由 ② 及数学归纳法可证得 $a_n\neq -1(n\in\mathbf{N})$，所以此时 ③ ~ ⑥ 均成立，但 ④ 中的 $n\geqslant 2$. 由 ④，得

$$[(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}-(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}]a_n=$$
$$(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}+(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}(n\geqslant 2) \tag{⑨}$$

假设 $(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}-(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}=0$，由 ⑨ 得

$$(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}=(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}=0$$

再由 $n\geqslant 2$ 时，$F_{n-2},F_{n-1}\in\mathbf{N}^*$，得 $x=-1$ 或 $y=-1$，这与“$x\neq -1$ 且 $y\neq -1$” 矛盾！所以式 ⑦ 在 $n\geqslant 2$ 时成立.

所以，当 $x\neq -1$，且 $y\neq -1$ 时

$$a_n=\begin{cases} x & (n=0)\\ y & (n=1)\\ \text{由式 ⑦ 确定} & (n\geqslant 2)\end{cases} \tag{⑩}$$

本题的完整答案由 ⑧，⑩ 确定.

注 当 $x\neq \pm 1$ 且 $y\neq \pm 1$ 时，可以验证 $n\in\mathbf{N}$ 时式 ⑦ 均成立；

由 ② ÷ ① 的思路也可解答本题，得到的答案是：

当 $x=1$ 或 $y=1$ 时

$$a_n=\begin{cases} x & (n=0)\\ y & (n=1)\\ 1 & (n\geqslant 2)\end{cases} \tag{⑪}$$

当 $x\neq 1$ 且 $y\neq 1$ 时

$$a_n=\begin{cases} x & (n=0)\\ y & (n=1)\\ \text{由式 ⑦ 确定} & (n\geqslant 2)\end{cases} \tag{⑫}$$

本题的完整答案也可由 ⑪,⑫ 确定.

比较这两种答案,可得更简洁的答案:对于任意的复数 x,y,⑩ 均成立!(只有当 $x\neq\pm 1$ 且 $y\neq\pm 1$ 时原答案才是正确的).

参考文献

[1] 刘康宁,党效文.数列的综合问题[J].数学通讯,2007(2,4):85-88.

一类不定方程的解法

本文给出关于 x,y 的不定方程

$y=\dfrac{f(x)}{\alpha x-\beta}$（$f(x)$ 是已知的 n 次整系数多项式，$n\in\mathbf{N}$，α,β 是已知的整数，$\alpha\neq 0$，$f(\dfrac{\beta}{\alpha})\neq 0$） ①

的整数解的求法.

定理 (1) 不定方程 ① 的整数解满足

$$\alpha x-\beta\left|\alpha^n f(\frac{\beta}{\alpha})\right.（可证\ \alpha^n f(\frac{\beta}{\alpha})\in\mathbf{Z}^*）$$

(2) 不定方程 ① 只有有限组整数解.

证明 (1) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，$a_n\neq 0$，得

$$\alpha^n f(\frac{\beta}{\alpha})=\sum_{i=0}^{n}a_i\alpha^{n-i}\beta^i(\in\mathbf{Z})$$

由 $\alpha f(\dfrac{\beta}{\alpha})\neq 0$，得 $\alpha^n f(\dfrac{\beta}{\alpha})\neq 0$，即 $\alpha^n f(\dfrac{\beta}{\alpha})\in\mathbf{Z}^*$.

下同对 n 用数学归纳法证明

$$\alpha x-\beta\mid\sum_{i=0}^{n}a_i\alpha^{n-i}\beta^i$$

$n=0$ 时成立.

假设 n 时成立，下证 $n+1$ 时成立.

方程 ① 在 $n+1$ 时有整数解，则 $\alpha x-\beta\mid\sum\limits_{i=0}^{n+1}a_ix^i$，所以

$$\alpha x-\beta\mid\alpha a_{n+1}x^{n+1}+\sum_{i=0}^{n}\alpha a_ix^i$$

$$\alpha x-\beta\mid(\alpha a_n+\beta a_{n+1})x^n+\sum_{i=0}^{n-1}\alpha a_ix^i$$

由"n 时成立"，得

$$\alpha x-\beta\mid\sum_{i=0}^{n-1}\alpha a_i\cdot\alpha^{n-i}\beta^i+(\alpha a_n+\beta a_{n+1})\beta^n$$

即
$$\alpha x-\beta \mid \sum_{i=0}^{n+1} a_i \cdot \alpha^{n+1-i}\beta^i$$
得 $n+1$ 时成立.所以结论(1)成立.

(2)易知 $\alpha^n f(\frac{\beta}{\alpha})$ 的约数只有有限个,再由(1)知(2)成立.

由定理可解不定方程①,下面举例说明.

例1　求不定方程 $y=\frac{2x^3+1}{6x-1}$ 的整数解.

解　若 $x,y\in\mathbf{Z}$,得

$6x-1\mid 2x^3+1, 6x-1\mid 6x^3+3, 6x-1\mid x^2+3, 6x-1\mid 6x^2+18$
$$6x-1\mid x+18, 6x-1\mid 6x+108, 6x-1\mid 109$$
又109是素数,所以 $6x-1=\pm 1,\pm 109$,即 $x=0,-18$.

所求解为 $(x,y)=(0,-1),(-18,107)$.

注　直接由定理2,得 $6x-1\mid 218$,即 $6x-1\mid 109$.

例2　求不定方程 $y=\frac{(x-2)(5x^2-6x+1)}{2x^2-6x+4}$ 的整数解.

解　可把原方程变形为
$$y=\frac{1}{2}(5x-1)(x\neq 1,2)$$
所以原方程的全部整数解为
$$(x,y)=(2t+1,5t+2)(t\in\mathbf{Z}^*)$$

例3　(1995年全国高中数学联赛二试综合题二,可见《数学通讯》1996年第2期第43页)求一切实数 p,使得三次方程 $5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x=66p$ 的三个根均为正整数.

解　由 $x=1$ 是原方程的根,得关于 x 的方程 $5x^2-5px+66p-1=0$ 的两个根均为正整数,且其和为 $p(p\in\mathbf{N}^*)$.得
$$p=\frac{5x^2-1}{5x-66}$$
求出这个不定方程的全部正整数解,便得 p 的值.

因为 $x\in\mathbf{N}^*$,所以 $5x^2-1,p\in\mathbf{N}^*$,得 $5x-66\in\mathbf{N}^*$.

由 $5x-66\mid 5x^2-1$,得 $5x-66\mid 66x-1, 5x-66\mid 4\,351$.

又 $4\,351=19\times 229$(19,229都是素数),得 $5x-66=1,19,229,4\,351$,得 $x=17$ 或59,均有 $p=76$(而 $p=76$ 时,原方程的三个根是1,17,59).

此解法比原解法更简洁,更具有一般性.

一类不定方程的一般情形

上海市1997年高中数学竞赛决赛试题中填空题的第7题为：

已知 $m,n\in\mathbf{N}^*$，使$\dfrac{m+n}{m^2+mn+n^2}=\dfrac{4}{49}$，则 $m+n$ 的值为________.（答案为16）

（见《数学通讯》1997年第11期第47页）

我们研究该题的一般情形——给出一类不定方程的解法.

定理 设 a,b 已知，$a\in\mathbf{N}^*$，$b\in\mathbf{Z}$，$(a,b)=1$，则关于 x,y 的不定方程

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}=\frac{b}{a} \quad ①$$

的全部整数解为：

x,y 是关于 z 的一元二次方程

$$z^2-kbz+(k^2b^2-ka)=0\text{（其中 }k\in\mathbf{N}^*,k\leqslant\frac{4a}{3b^2},k(4a-3b^2k)=u^2,u\in\mathbf{Z}\text{）} \quad ②$$

的两个根.

（要解不定方程①，应先由②中括号里面关于 k 的限制条件经过有限次试验，求出全部 k.）

证明 若 x,y 是①的一组整数解，由①得"$x=y=0$"不成立，所以

$$x^2+xy+y^2=(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2>0$$

即

$$x^2+xy+y^2\in\mathbf{N}^* \quad ③$$

可设 $(x+y,x^2+xy+y^2)=k(k\in\mathbf{N}^*)$，则

$$(\frac{x+y}{k},\frac{x^2+xy+y^2}{k})=1 \quad ④$$

由①可得

$$\frac{(x+y)/k}{(x^2+xy+y^2)/k}=\frac{b}{a}(a\in\mathbf{N}^*,(a,b)=1) \quad ⑤$$

由③,④,⑤,得

$$\begin{cases}(x^2+xy+y^2)/k=a\\(x+y)/k=b\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x+y=kb\\xy=k^2b^2-ka\end{cases}$$

所以 x,y 是关于 z 的一元二次方程 $z^2-kbz+(k^2b^2-ka)=0$ 的两个整数根.

因为此方程有两个整数根,所以

$$\Delta=k(4a-3b^2k)=u^2\geqslant 0(u\in\mathbf{Z})$$

由 $k\in\mathbf{N}^*$,得 $k\leqslant\frac{4a}{3b^2}$.

这就证明了 ① 的解均可由方程 ② 得到.

再证明由方程 ② 得到的解均为 ① 的解.

先证明 ② 的解是整数,只需证明 ② 的解是有理数:

因为 ② 的解为 $z=\frac{1}{2}(kb\pm u)(\in\mathbf{Q})$.

由韦达定理,得 $\begin{cases}x+y=kb\\xy=k^2b^2-ka\end{cases}$,从而得 x,y 满足 ①.

推论 (1) 当 $4a<3b^2$ 时,定理中的方程(1) 无整数解;

(2) 定理中的方程 ① 只有有限组整数解.

例 求以下不定方程的整数解:

(1) $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}=\frac{2}{19}$; (2) $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}=\frac{2}{29}$.

解 1) 由定理,得 x,y 是关于 z 的方程 $z^2-2kz+(4k^2-19k)=0$(其中 $k\in\mathbf{N}^*,k\leqslant 6,k(19-3k)=v^2,v\in\mathbf{Z}$) 的两个根.

得 $k=1,z=-3$ 或 5.

所求解为 $(x,y)=(-3,5),(5,-3)$.

(2) 由定理,得 x,y 是关于 z 的方程 $z^2-2kz+(4k^2-29k)=0$(其中 $k\in\mathbf{N}^*,k\leqslant 9,k(29-3k)=v^2,v\in\mathbf{Z}$) 的两个根.

因为 k 不存在,所以 ② 无整数解.

注 (1) 用本文的方法也可研究关于 x,y 的不定方程

$$\frac{mx+ny}{ax^2+bxy+cy^2}=\frac{v}{u}(a,b,c,m,n,u,v\text{ 是已知的整数})$$

的全部整数解.

(2) 将原题中的“$m,n\in\mathbf{N}^*$”改为“$m,n\in\mathbf{Z}$”,所得答案不变.

一类最值问题

设 a,b 是两个已知的实数，$0\leqslant a<b$，(a,b) 内既约分数的分母最大值记为 $\max U(a,b)$，最小值记为 $\min U(a,b)$；分子最大值记为 $\max V(a,b)$，最小值记为 $\min V(a,b)$.

本文研究此类最值问题的求法.

定理 1 $\max U(a,b)=+\infty,\max V(a,b)=+\infty$.

证明 存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使 $[10^k a,10^k b]$ 内有两个连续的正整数 a_1,a_1+1. 得：

$$10^k a\leqslant a_1<a_1+1\leqslant 10^k b$$

由 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_1<\dfrac{a_1\cdot 10^n+1}{10^n}<a_1+1$，得

$$10^k a<\frac{a_1\cdot 10^n+1}{10^n}<10^k b,a<\frac{a_1\cdot 10^n+1}{10^{n+k}}<b$$

$$(a_1\cdot 10^n+1,10^{n+k})=1$$

当 $n\to+\infty$ 时，$a_1\cdot 10^n+1\to+\infty,10^{n+k}\to+\infty$，所以

$$\max U(a,b)=+\infty,\max V(a,b)=+\infty$$

定理 2 $\min U(0,b)=[\frac{1}{b}]+1,\min V(0,b)=1$.（$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数）

证明 设 $n=[\frac{1}{b}]+1$，得 $n>\frac{1}{b}$，$0<\frac{1}{n}<b$，所以

$$\min V(0,b)=1,\min U(0,b)\leqslant n$$

设 $\frac{v}{u}$ 是 $(0,b)$ 内的任一既约分数，$\frac{v}{u}<b,u,v\in\mathbf{N}^*$.

假设 $u<n$，得 $u\leqslant[\frac{1}{b}]\leqslant\frac{1}{b}$，所以 $\frac{v}{u}\geqslant\frac{1}{u}\geqslant b$，与 $\frac{v}{u}<b$ 矛盾！所以 $u\geqslant n,\min U(0,b)\geqslant n$，所以

$$\min U(0,b)=n=[\frac{1}{b}]+1$$

定理 3 $\min U(a,+\infty)=1,\min V(a,+\infty)=[a]+1$.

证明 设 $n=[a]+1$，得 $a<\frac{n}{1}<+\infty$，所以

$$\min U(a,+\infty)=1,\min V(a,+\infty)\leqslant n$$

设$\frac{v}{u}$是$(a,+\infty)$内的任一既约分数,$\frac{v}{u}>a,u,v\in\mathbf{N}^*$.

假设$v<n$,得$v\leqslant[a]\leqslant a$,所以$\frac{v}{u}\leqslant v\leqslant a$,与$\frac{v}{u}>a$矛盾!所以$v\geqslant n,\min V(a,+\infty)\geqslant n$.所以

$$\min V(a,+\infty)=n=[a]+1$$

定理4 设$\frac{b}{a},\frac{d}{c}(a,b,c,d\in\mathbf{N}^*,(a,b)=(c,d)=1)$是两个既约正分数,$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$,则$\min U(\frac{b}{a},\frac{d}{c})=\frac{\min(as+ct)}{ad-bc},\min V(\frac{b}{a},\frac{d}{c})=\frac{\min(bs+dt)}{ad-bc}$,其中$s,t\in\mathbf{N}^*,ad-bc\mid(as+ct,bs+dt)$.

证明 设$\frac{v}{u}(u,v\in\mathbf{N}^*)$是$(\frac{b}{a},\frac{d}{c})$内的任一既约分数:$\frac{b}{a}<\frac{v}{u}<\frac{d}{c}$.可设$ad-bc=h,h\in\mathbf{N}^*$,得

$$\frac{bd}{bc+h}<\frac{v}{u}<\frac{d}{c}$$

可设$\begin{cases}-bdu+(bc+h)v=r\\du-cv=s\end{cases}$ $(r,s\in\mathbf{N}^*)$,得

$$\begin{cases}hv=r+bs\\hu=\frac{c}{d}r+as\end{cases}$$

由$(c,d)=1$知,可设$r=dt,t\in\mathbf{N}^*$,得

$$\begin{cases}hu=as+ct\\hv=bs+dt\end{cases}\quad(s,t\in\mathbf{N}^*)$$

所以$\min U(\frac{b}{a},\frac{d}{c})=\min u=\min(\frac{as+ct}{ad-bc})=\frac{\min(as+ct)}{ad-bc}$(其中$s,t\in\mathbf{N}^*,ad-bc\mid(as+ct,bs+dt)$);

$\min V(\frac{b}{a},\frac{d}{c})=\min v=\min(\frac{bs+dt}{ad-bc})=\frac{\min(bs+dt)}{ad-bc}$(其中$s,t\in\mathbf{N}^*,ad-bc\mid(as+ct,bs+dt)$).

推论 若$\frac{b}{a},\frac{d}{c}$是两个既约正分数,且$ad-bc=1$,则$\min U(\frac{b}{a},\frac{d}{c})=a+c,\min V(\frac{b}{a},\frac{d}{c})=b+d$.

例 (1989年上海初中竞赛题)如果$\frac{5}{9}<\frac{b}{a}<\frac{4}{7}$,那么满足该不等式的正整数$a,b$中最小的$a$值是多少?

解 可以只考虑$(a,b)=1$的情形.由推论,得

$$\min a = \min U(\frac{5}{9}, \frac{4}{7}) = 16$$

同时还可得

$$\min b = \min V(\frac{5}{9}, \frac{4}{7}) = 9$$

对于 a 或 b 是正无理数的情形，求 $\min U(a, b)$ 和 $\min V(a, b)$ 的一般方法，还有待于读者去研究. 但一些个别情形是容易验证的：

(1) $\min U(1, \sqrt{2}) = 3, \min V(1, \sqrt{2}) = 4$;

(1) $\min U(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = 2, \min V(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = 3$.

一道例题的正确解答

《中学数学教学参考》2000年第11期《数学竞赛中估算法解题例说》一文例3的解答有误,这里给予纠正.

该文的例3及其解答为:

已知分数 $s=\dfrac{1}{\dfrac{1}{1\,980}+\dfrac{1}{1\,981}+\cdots+\dfrac{1}{2\,000}}$,求 s 的整数部分.

解 可得 $\dfrac{1}{21\times\dfrac{1}{1\,980}}<s<\dfrac{1}{21\times\dfrac{1}{2\,000}}$,即 $94\dfrac{2}{7}<s<95\dfrac{5}{21}$,所以 s 的整数部分是95.

此解答中,得到 $94\dfrac{2}{7}<s<95\dfrac{5}{21}$ 是正确的,但由此只能得到 s 的整数部分是94或95(实际上正确答案为94).正确解答如下:

可得 $s<\dfrac{1}{\dfrac{1}{1\,990}\times 11+\dfrac{1}{2\,000}\times 10}=94\dfrac{414}{419}$,又同原文的推导,得 $94\dfrac{2}{7}<s<94\dfrac{414}{419}$,所以 s 的整数部分是94.

熟悉Cauchy不等式(1821年发现)的读者,还有以下简洁解法:

Cauchy不等式 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}$ $(a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 2$,诸等号均当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取到)

(此不等式简记为:算术平均 $\geqslant$ 几何平均 $\geqslant$ 调和平均).

得
$$s<\frac{1\,980+1\,981+\cdots+2\,000}{21^2}=94\frac{16}{21}$$

又同原文的推导,得 $94\dfrac{2}{7}<s<94\dfrac{16}{21}$,所以 s 的整数部分是94.

证明整值多项式的一种有效方法

若对于任意的 $x \in \mathbf{Z}$,总有多项式 $f(x)$ 的值是整数,则称 $f(x)$ 是整值多项式.

显然,整系数多项式总是整值多项式.也存在别的整值多项式,如 $\frac{1}{2}x(x+1)$.证明一个多项式是整值多项式是常见的数学竞赛题,通常是用数的整除来证明的[1],本文给出证明这种题的一种有效方法.

定理 多项式 $f(x)$ 是整值多项式 $\Leftrightarrow f(0) \in \mathbf{Z}$ 且 $f(x+1)-f(x)$ 是整值多项式.

证明 $\Rightarrow$ 显然成立,下证 $\Leftarrow$.

先用数学归纳法证明(易证):

当 $x \in \mathbf{N}$ 时,$f(x)$ 的值是整数.

再用反向数学归纳法证明:

当 $x \leqslant 0$ 且 $x \in \mathbf{Z}$ 时,$f(x)$ 的值是整数.

当 $x=0$ 时成立.

假设 $x=m$ 时成立:$f(m) \in \mathbf{Z}$.

由题设得 $f(m)-f(m-1) \in \mathbf{Z}$,所以 $f(m-1) \in \mathbf{Z}$,即 $x=m-1$ 时也成立.所以此时定理成立.

注 把定理中的“$f(0) \in \mathbf{Z}$”改为“$f(a) \in \mathbf{Z}$,a 是一个任意整数”,所得结论也成立.

例 1 (1994 年澳大利亚数学奥林匹克第一试第 2 题)证明 $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x$ 是整值多项式.

证明
$$f(x+1)-f(x)=\frac{1}{5}(x+1)^5+\frac{1}{3}(x+1)^3+\frac{7}{15}(x+1)-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{15}x$$

按二项式定理将上式右边展开,并注意下面的结论:

若 p 是素数,则

$$p \mid C_p^i (i=1,2,\cdots,p-1) \qquad ①$$

可得 $$f(x+1)-f(x)=f_1(x)+(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15})=f_1(x)+1$$
(其中 $f_1(x)$ 是整系数多项式)

得 $f(x+1)-f(x)$ 是整值多项式,又 $f(0)=0(f(0)\in\mathbf{Z})$,由定理得 $f(x)$ 是整值多项式.

可把例 1 的结论推广为:

设 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{p_i}x^{p_i}+ax$,$p_i$ 是素数,$q_i,f(1)\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,n)$,则 $f(x)$ 是整值多项式.

例 2 证明 $g(x)=\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{34}{105}x$ 是整值多项式.

证明 由结论 ①,得

$$g(x+1)-g(x)=g_1(x)+(\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{34}{105})=g_1(x)+1$$

(其中 $g_1(x)$ 是整系数多项式).

得 $g(x+1)-g(x)$ 是整值多项式,又 $g(0)=0(g(0)\in\mathbf{Z})$,所以 $g(x)$ 是整值多项式.

例 3 证明 $h(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x$ 是整值多项式.

证明 由结论 ①,得

$$h(x+1)-h(x)=h_1(x)+(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30})=h_1(x)+1$$

(其中 $h_1(x)$ 是整系数多项式).

得 $h(x+1)-h(x)$ 是整值多项式,又 $h(0)=0(h(0)\in\mathbf{Z})$ 所以 $h(x)$ 是整值多项式.

例 4 证明 $k(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x$ 是整值多项式.

证明 由 $k(x+1)-k(x)=\frac{1}{2}x(x+1)+1$ 可证.

例 5 证明 $l(x)=\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{12}x^3+\frac{11}{24}x^2-\frac{5}{12}x$ 是整值多项式.

证明 由 $l(x+1)-l(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x$ 及例 4 的结论可证.

参考文献

[1] 梅向明.初等数论(初中册)[M].北京:北京师范学院出版社,1988:47-57.

空间四边形的内角和小于周角

第八届(1976年)加拿大数学奥林匹克竞赛的一道试题如下.

已知四边形 $ABCD$ 中,四个角 $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$ 都是直角,求证:四边形 $ABCD$ 必是矩形.

注释① 是通过建立空间直角坐标系并运用空间向量来证明的,本文将证明更一般的结论:

定理 空间四边形每相邻两边所成的四个角之和小于周角.

文献[1]是用高中师生不熟悉的三面角的性质"三面角的任何一个面角小于其他两个面角之和"证出的.实际上证明此结论只需以下简单事实即可获证:

引理 沿 $\angle AOB$ 内的射线 OC 把面 OAC 折起,设 OA 变成 OA',则 $\angle A'OB < \angle AOB$.

证明 在图1中,有 $AB = AC + CB = A'C + CB > A'B$, $OA = OA'$.

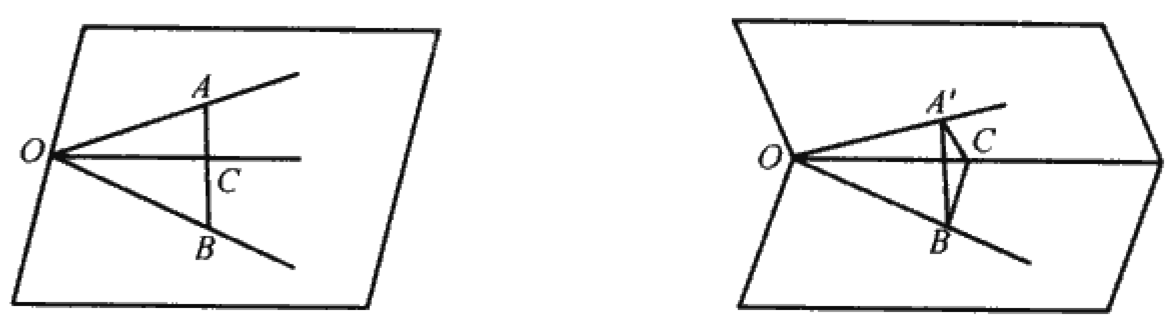


图1

$$\cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB},$$

$$\cos \angle A'OB = \frac{OA'^2 + OB^2 - A'B^2}{2OA' \cdot OB}$$

得 $\cos \angle AOB < \cos \angle A'OB$,又 $\angle AOB$, $\angle A'OB \in (0,\pi)$,所以

$$\angle A'OB < \angle AOB$$

定理的证明 只需证明空间四边形 $ABCD$(图2)中 $\angle A + \angle ABC + \angle C + \angle CDA < 360°$.

① 舒敬华.几道竞赛题的向量解法.中学生数学,2004,3(上).

把图2的空间四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，使 $A\in$ 面 BCD，折叠后的点 A 记为 A'，得平面四边形 $A'BCD$.

所以图2的空间四边形 $ABCD$ 可由图3的平面四边形 $A'BCD$ 沿对角线 BD 折叠而成. 由引理得，$\angle ADC<\angle A'DC$，$\angle ABC<\angle A'BC$，所以

$$\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle CDA<\angle A'+\angle A'BC+\angle C+\angle CDA'=360^\circ$$

定理成立.

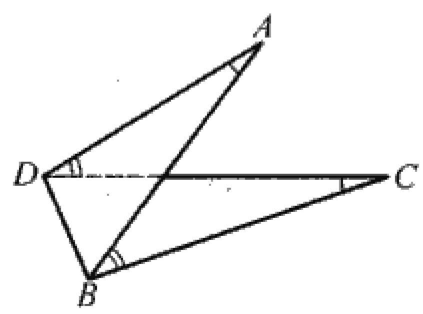


图2

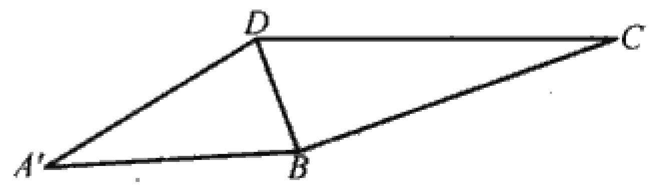


图3

参考文献

[1] 数理化自学丛书编委会数学编写小组. 立体几何[M]. 上海：上海科学技术出版社，1978：104-107.

一道 USAMO 试题的再推广

第七届(1978 年)美国中学生数学竞赛(USAMO)有一道试题是:

已知实数 a,b,c,d,e 满足 $\begin{cases}a+b+c+d+e=8\\a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16\end{cases}$,求 e 的最大值.

文献[1]给出了该题的两个推广(即[1]的定理及候选题 A):

结论 1 若 p 是已知的正实数,$n\in\mathbf{N}^*$,$\sum_{i=0}^{n}x_i=p$,$\sum_{i=0}^{n}x_i^2=\frac{p^2}{n}$,则 $0\leqslant x_i\leqslant\frac{2p}{n+1}(i=0,1,\cdots,n)$.

结论 2 若 p,q 是已知的实常数,$n\in\mathbf{N}^*$,$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是实变数,$\sum_{i=0}^{n}x_i=p$,$\sum_{i=0}^{n}x_i^2=q$,则:

(1) 当 $p^2>q(n+1)$ 时,x_0 不存在;

(2) 当 $p^2=q(n+1)$ 时,$x_0=\frac{p}{n+1}$;

(3) 当 $p^2<q(n+1)$ 时,$\frac{p-\sqrt{n[q(n+1)-p^2]}}{n+1}\leqslant x_0\leqslant\frac{p+\sqrt{n[q(n+1)-p^2]}}{n+1}$.

本文试图研究下面的一般问题:

设 $a_0,a_1,\cdots,a_n,p,q$ 是已知的实常数,$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是实变数,$n\in\mathbf{N}^*$,且 $\sum_{i=0}^{n}x_i=p$,$\sum_{i=0}^{n}a_ix_i^2=q$,求 x_0 的取值范围.

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$ 时,本文已解决:

定理 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正的实常数,a_0,p,q 是实常数,$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是实变数,且 $\sum_{i=0}^{n}x_i=p$,$\sum_{i=0}^{n}a_ix_i^2=q$,则 x_0 的取值范围由不等式

$$\left(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)x_0^2-2px_0+\left(p^2-q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\leqslant 0$$

的解集确定,并且当且仅当 $x_i=\frac{p-x_0}{a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号.

具体情形如下.

(1) 当 $1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>0$ 时:

① 又 $p^2a_0>q(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$ 时, x_0 不存在;

② 又 $p^2a_0=q(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$ 时, $x_0=\frac{p}{1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$;

③ 又 $p^2a_0<q(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$ 时, $\frac{p-\sqrt{[q(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})-p^2a_0]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}}{1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\leqslant$ $x_0\leqslant\frac{p+\sqrt{[q(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})-p^2a_0]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}}{1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$,此不等式左边的值为 x_0 的最小值,右边的值为 x_0 的最大值. $x_i=\frac{p-x_0}{a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}(i=1,2,\cdots,n)$ 时, x_0 取得最小值或最大值(下同).

(2) 当 $1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=0$ 时, $2px_0\geqslant p^2-q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$.

① 又 $p=0$ 时,若 $q>0$,则 x_0 可取任意实数;若 $q=0$,则 $x_0=0$;若 $q<0$,则 x_0 不存在.

② 又 $p>0$ 时, $x_0\geqslant\frac{p}{2}-\frac{q}{2p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$,此不等式右边的值为 x_0 的最小值.

③ 又 $p<0$ 时, $x_0\leqslant\frac{p}{2}-\frac{q}{2p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$,此不等式右边的值为 x_0 的最大值.

(3) 当 $1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<0$ 时:

① 又 $p^2a_0>q(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$ 时, x_0 可取任意实数;

② 又 $p^2a_0=q(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$ 时, $x_0\neq\frac{p}{1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$;

③ 又 $p^2a_0<q(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$ 时

$$x_0 \geqslant \frac{p - \sqrt{\left[q\left(1 + a_0\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) - p^2a_0\right]\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}}{1 + a_0\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$$

或

$$x_0 \leqslant \frac{p + \sqrt{\left[q\left(1 + a_0\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) - p^2a_0\right]\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}}{1 + a_0\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$$

为证明定理,先介绍不等式的一条性质:

引理 已知函数 $s = g(t)$ 的定义域是 D.

(1) 若对于任意的 $t \in D$,恒有解析式 A 的值 $\geqslant g(t)$,则 A 的值 $\geqslant g(t)$ 的最大值 a,并且当且仅当 $A = g(t) = a$ 时 A 取最小值 a.

(2) 若对于任意的 $t \in D$,恒有解析式 A 的值 $\leqslant g(t)$,则 A 的值 $\leqslant g(t)$ 的最小值 a,并且当且仅当 $A = g(t) = a$ 时 A 取最大值 a.

定理的证明 (这里的证法来源于文献[2]例2的证明)

设 $t \in \mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned} q - a_0x_0^2 = &\sum_{i=1}^{n} a_ix_i^2 + 2t\left(\sum_{i=0}^{n} x_i - p\right) = \\ &\sum_{i=1}^{n}(a_ix_i^2 + 2tx_i) + 2(x_0 - p)t = \\ &\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x_i + t\cdot\frac{1}{a_i}\right)^2 - t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} + 2(x_0 - p)t \geqslant \\ &-t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} + 2(x_0 - p)t\text{(当且仅当 } x_i = \\ &-t\cdot\frac{1}{a_i}(i = 1,2,\cdots,n)\text{ 时取等号)} = g(t) \end{aligned}$$

得 $t \in \mathbf{R}$ 时,恒有 $q - a_0x_0^2 \geqslant g(t)$ 成立.

因为 $g(t) = -\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\left(t - \frac{x_0 - p}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\right)^2 + \frac{(x_0 - p)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$,所以当且仅当 $t = \frac{x_0 - p}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$ 时,$g(t)$ 取最大值,且最大值是 $\frac{(x_0 - p)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$.

所以由引理(1),得 $q - a_0x_0^2 \geqslant \frac{(x_0 - p)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$,即

$$(1+a_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})x_0^2-2px_0+(p^2-q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\leqslant 0$$

当且仅当 $x_i=\dfrac{p-x_0}{a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号.

以后的证明可由读者完成.

推论 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n,q$ 是正的实常数,p 是实常数,$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是实变数,且 $\sum_{i=0}^{n}x_i=p$,$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2=q$,则 x_0 的取值范围是 $[p-\sqrt{q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}},p+\sqrt{q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}]$.当且仅当 $x_i=\dfrac{p-x_0}{a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}(i=1,2,\cdots,n)$ 时,x_0 取得最小值或最大值.

本文开头叙述的文献[1]的两个结论也是本文定理的推论.

Laguerre 不等式 若 $\sum_{i=0}^{n}x_i=p$,$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=q$,$n\in\mathbf{N}^*$,则

$$\frac{p-\sqrt{n^2(p^2-2q)-2nq}}{n+1}\leqslant x_i\leqslant\frac{p+\sqrt{n^2(p^2-2q)-2nq}}{n+1}(i=0,1,\cdots,n)$$

下面用本文开头的结论 2 证明该不等式:

有
$$\sum_{i=0}^{n}x_i^2=p^2-2q$$

因为 $0\leqslant\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2=n\sum_{i=0}^{n}x_i^2-2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=n(p^2-2q)-2q$

所以
$$p^2\leqslant(p^2-2q)(n+1)$$

再由结论 2 得 Laguerre 不等式成立.

参考文献

[1] 刘培杰.一道 USAMO 试题的推广与变形[J].数学通讯,1995(4):35-39.
[2] 赵春祥.一类不等式的统一证法 —— 参数最值法[J].数学通讯,1997(10):44-45.

IMO - 41 第 2 题的等价变形

2000年7月19日举行的第41届国际数学奥林匹克竞赛(IMO)的第2题为:

题1 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$,求证:$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leqslant 1$.

文献[1]给出了该题的一种证法.下面对此题进行等价变形:

在题1中可令 $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}(x,y,z\in\mathbf{R}^+)$,得

题2 (1983年瑞士奥林匹克)若 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,求证:$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\leqslant xyz$.

容易将题2等价变形为如下定理1.

定理1 若 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,则:

(1) $x(x-z)^2+y(y-z)^2\geqslant(x-z)(y-z)(x+y-z)$;

(2) $x^2(y+z-x)+y^2(z+x-y)+z^2(x+y-z)\leqslant 3xyz$;

(3) $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz+x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2$;

(4) $(x+y+z)^3+9xyz\geqslant 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

这里(1)是1992年加拿大奥林匹克,(2)是IMO-6中的试题的结论,(3)是常用不等式"$x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$"的加强.

下面再给出题2的一种加强:

定理2 若 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,则

$$\frac{(x+y+z)^3}{27xyz}(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\leqslant xyz \quad ①$$

证明 因为式①关于 x,y,z 轮换对称,所以只证 $x\geqslant y\geqslant z>0$ 时成立即可.

当 $y+z\leqslant x$ 时,易证①成立.

当 $y+z>x$ 时,得 x,y,z 是某个 $\triangle ABC$ 的三边,设 $AC=x,AB=y,BC=z$.此时

$$①\Leftrightarrow[(x+y)^2-z^2][(y+z)^2-x^2][(z+x)^2-y^2]\leqslant 27x^2y^2z^2\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+1\right)\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+1\right)\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}+1\right)\leqslant\frac{27}{8}\Leftrightarrow$$

$(\cos A+1)(\cos B+1)(\cos C+1)\leqslant\frac{27}{8}$(用余弦定理)$\Leftrightarrow$

$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}$

而在 $\triangle ABC$ 中,有后一个不等式成立,所以定理 2 成立.

例 (IMO - 25) 已知 x,y,z 都是非负实数,且 $x+y+z=1$,求证:$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$.

证明 只证 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$ 时成立.

此时由题设及定理 1(4),得

$$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{1}{4}xyz+\frac{1}{4}$$

又
$$xyz\leqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

所以
$$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$$

当 $abc=1$ 时,可证得

$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})=(2-b-\frac{1}{b}+\frac{a}{c})(c-1+\frac{1}{a})=$

$(a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})+(c+\frac{1}{c})-(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+2)$

所以由题 1 的结论,得:

定理 3 若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+,abc=1$,则$(a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})+(c+\frac{1}{c})\leqslant 3+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$.

由定理 3 及题 1 的结论,可提出:

猜想 1 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,且 $a_1a_2\cdots a_n=1$,则(以下 $a_{n+1}=a_1$):

(1)$\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+\frac{1}{a_i})\leqslant n+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}$;

(2)$\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-1+\frac{1}{a_{i+1}})\leqslant 1$.

(易证 $n=1,2,3$ 时,猜想 1 成立.)

猜想 2 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 3$(以下 $a_{n+1}=a_1,a_{n+2}=a_2$):

(1)$\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1}-a_{i+2})\leqslant a_1a_2\cdots a_n$;

(2) $\prod_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1}-a_{i+2})\leqslant\frac{n^n(a_1a_2\cdots a_n)^2}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^n}$.

(只需证 $n\geqslant 4$ 时,猜想 2 成立.)

参考文献

[1] 段智毅,秦永.IMO - 41 第 2 题另证[J].中学数学教学参考,2000(11):59.

再谈一道数学奥赛题

文献[1]给出了1999年加拿大数学奥林匹克一道赛题的简证及推广,本文再给出这道赛题的 n 维推广.

定理1 若 x,y,z 是非负实数,则 $xy+yz+zx\leqslant\frac{1}{3}(x+y+z)^2$.

证明 可得 $xy+yz+zx\leqslant(\frac{x+y}{2})^2+(\frac{y+z}{2})^2+(\frac{z+x}{2})^2=$

$$\frac{1}{2}(x+y+z)^2-\frac{1}{2}(xy+yz+zx)$$

从而可得要证结论成立.

推论1 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant3)$ 是非负实数,则 $\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\leqslant\frac{1}{3}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$(这里 $x_{n+1}=x_1$).

证明 因为欲证不等式关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 轮换对称,所以可不妨设 $x_1\geqslant x_2,x_1\geqslant x_3,\cdots,x_1\geqslant x_n$.

在此假设下,易得

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\cdots+x_nx_1\leqslant$$

$$x_1x_2+x_2(x_3+x_4+\cdots+x_n)+(x_3+x_4+\cdots+x_n)x_1$$

在定理1中令 $x=x_1,y=x_2,z=x_3+x_4+\cdots+x_n$,得

$$x_1x_2+x_2(x_3+x_4+\cdots+x_n)+(x_3+x_4+\cdots+x_n)x_1\leqslant\frac{1}{3}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\leqslant\frac{1}{3}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$$

运用Cauchy不等式还可给出推论1的直接证明,得

$$(\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1})^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}^2=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^2$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^2=(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\leqslant(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-2\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}$$

得

$$\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\leqslant\frac{1}{3}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$$

猜想 1 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant r+1\geqslant 3,n,r\in\mathbf{N}^*)$ 是非负实数，则 $\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\cdots x_{i+r-1}\leqslant\frac{1}{n^{r-1}}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^r$（这里 $x_{n+1}=x_1,x_{n+2}=x_2,\cdots,x_{n+r-1}=x_{r-1}$）.

定理 2 若 x,y,z 是非负实数，k,l 是不全为 1 的正整数，则 $x^ky^l+y^kz^l+z^kx^l\leqslant k^kl^l(\frac{x+y+z}{k+l})^{k+l}$.

证明 不妨设 $k\geqslant l>1$，再由文献[1]定理的证明知以上结论成立.

仿照推论 1 的证明可把定理 2 推广为：

推论 2 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 3)$ 是非负实数，$k,l,n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3,k,l$ 不全为 1，则

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^kx_{i+1}^l\leqslant k^ll^l\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{k+l}\right)^{k+l}\text{（这里 }x_{n+1}=x_1\text{）}$$

猜想 2 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant r+1,n,r\in\mathbf{N}^*)$ 是非负实数，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是不全为 1 的正整数，则 $\sum_{i=1}^{n}x_i^{k_1}x_{i+1}^{k_2}\cdots x_{i+r-1}^{k_r}\leqslant k_1^{k_1}k_2^{k_2}\cdots k_r^{k_r}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}k_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n}k_i}$（这里 $x_{n+1}=x_1,x_{n+2}=x_2,\cdots,x_{n+r-1}=x_{r-1}$）.

（显然 $r=1,2$ 时，猜想 2 成立.）

参考文献

[1] 李建潮. 也谈一道数学奥林匹克题的简证及推广[J]. 中学数学月刊,2000(11):37-38.

关于凸多边形内角的几个定理

定理 1 (1) 当$0 < \alpha \leqslant \frac{n-2}{n}\pi$时，凸 n 边形最多有 s 个小于α 的内角(其中 s 是小于$\frac{2\pi}{\pi-\alpha}$ 的最大整数，下同)；

(2) 当$\frac{n-2}{n}\pi < \alpha < \pi$时，凸 n 边形最多有 n 个小于α 的内角.

定理 2 (1) 当$0 < \alpha < \frac{n-2}{n}\pi$时，凸 n 边形最多有 s 个等于α 的内角；

(2) 当$\alpha = \frac{n-2}{n}\pi$时，凸 n 边形最多有 n 个等于α 的内角；

(3) 当$\frac{n-2}{n}\pi < \alpha < \frac{n-2}{n-1}\pi$时，凸 n 边形最多有 $n-1$ 个等于 α 的内角；

(4) 当$\frac{n-2}{n-1}\pi \leqslant \alpha < \pi$时，凸 n 边形最多有 $n-2$ 个等于 α 的内角.

定理 3 (1) 当$0 < \alpha < \frac{n-2}{n}\pi$时，凸 n 边形最多有 s 个不大于α 的内角；

(2) 当$\frac{n-2}{n}\pi \leqslant \alpha < \pi$时，凸 n 边形最多有 n 个不大于α 的内角.

定理 4 (1) 当$0 < \alpha < \frac{n-2}{n}\pi$时，凸 n 边形最多有 n 个大于α 的内角；

(2) 当$\frac{n-2}{n}\pi \leqslant \alpha < \frac{n-2}{n-1}\pi$时，凸 n 边形最多有 $n-1$ 个大于 α 的内角；

(3) 当$\frac{n-2}{n-1}\pi \leqslant \alpha < \pi$时，凸 n 边形最多有 $n-2$ 个大于 α 的内角.

定理 5 (1) 当$0 < \alpha \leqslant \frac{n-2}{n}\pi$时，凸 n 边形最多有n 个不小于α 的内角；

(2) 当$\frac{n-2}{n}\pi < \alpha < \frac{n-2}{n-1}\pi$时，凸 n 边形最多有$n-1$个不小于 α 的内角；

(3) 当$\frac{n-2}{n-1}\pi \leqslant \alpha < \pi$时，凸 n 边形最多有 $n-2$ 个不小于 α 的内角.

定理 6 凸 n 边形最多有 n 个不等于α 的内角.

定理 7 (1) 当$0 < \alpha \leqslant \frac{n-2}{n}\pi$时，凸 n 边形最少有 0 个小于 α 的内角；

(2) 当$\frac{n-2}{n}\pi < \alpha < \frac{n-2}{n-1}\pi$时，凸 n 边形最少有 1 个小于 α 的内角；

(3) 当$\frac{n-2}{n-1}\pi \leqslant \alpha < \pi$时,凸 n 边形最少有 2 个小于 α 的内角.

定理 8 凸 n 边形最少有 0 个等于 α 的内角.

定理 9 (1) 当$0 < \alpha < \frac{n-2}{n}\pi$时,凸 n 边形最少有 0 个不大于 α 的内角;

(2) 当$\frac{n-2}{n}\pi \leqslant \alpha < \frac{n-2}{n-1}\pi$时,凸 n 边形最少有 1 个不大于 α 的内角;

(3) 当$\frac{n-2}{n-1}\pi \leqslant \alpha < \pi$时,凸 n 边形最少有 2 个不大于 α 的内角.

定理 10 (1) 当$0 < \alpha < \frac{n-2}{n}\pi$时,凸 n 边形最少有$n-s$个大于α的内角;

(2) 当$\frac{n-2}{n}\pi \leqslant \alpha < \pi$时,凸 n 边形最少有 0 个大于 α 的内角.

定理 11 (1) 当$0 < \alpha \leqslant \frac{n-2}{n}\pi$时,凸 n 边形最少有$n-s$个不小于α的内角;

(2) 当$\frac{n-2}{n}\pi < \alpha < \pi$时,凸 n 边形最少有 0 个不小于 α 的内角.

定理 12 (1) 当$0 < \alpha < \frac{n-2}{n}\pi$时,凸 n 边形最少有$n-s$个不等于α的内角;

(2) 当$\alpha = \frac{n-2}{n}\pi$时,凸 n 边形最少有 0 个不等于 α 的内角;

(3) 当$\frac{n-2}{n}\pi < \alpha < \frac{n-2}{n-1}\pi$时,凸 n 边形最少有 1 个不等于 α 的内角;

(4) 当$\frac{n-2}{n-1}\pi \leqslant \alpha < \pi$时,凸 n 边形最少有 2 个不等于 α 的内角.

显然定理,1,2,3,4,5,6分别与定理11,12,10,9,7,8等价,所以只需证明定理1 ~ 6.

定理 1,3 的证明 以下证明同时适合定理1,3.

当$\alpha = \frac{n-2}{n}\pi$时,可验证定理 1,3 均成立.

当$0 < \alpha < \frac{n-2}{n}\pi$时,设凸 n 边形中恰有 x 个小于(不大于)α 的内角(由$\alpha \neq \frac{n-2}{n}\pi$知 $x < n$),则这个凸 n 边形的内角和$(n-2)\pi < x\alpha + (n-x)\pi$,得 $x < \frac{2\pi}{\pi - \alpha}$.又 $x \in \mathbf{N}$,得 $x \leqslant s$.再证可以取到 $x = s$ 即可.

设$0 < \alpha_1 < \alpha$,且 $\alpha_1 > \frac{s-2}{s}\pi$(因为 $\alpha < \frac{n-2}{n}\pi$,所以$\frac{2\pi}{\pi-\alpha} < n$,得 $s <$

n,所以$\frac{s-2}{s}\pi < \frac{n-2}{n}\pi$,所以这样的 α_1 存在),$\alpha_2 = \frac{(n-2)\pi - s\alpha_1}{n-s}$.

由 $\alpha_1 < \alpha$,可得 $\alpha_1 < \alpha + \frac{(n-2)\pi - n\alpha}{s}$,进而得 $\alpha_2 > \alpha$.

由 $\alpha_1 > \frac{s-2}{s}\pi$,可得 $\alpha_2 < \pi$,所以 $\alpha < \alpha_2 < \pi$.

又 $s\alpha_1 + (n-s)\alpha_2 = (n-2)\pi$,所以存在恰有 s 个内角小于(不大于)α 的凸 n 边形,即可以取 $x = s$.

当$\frac{n-2}{n}\pi < \alpha < \pi$时,考虑正 n 边形即知成立.

定理 2 的证明 (1) 设凸 n 边形恰有x个等于α 的内角(有 $x < n$),得这个凸 n 边形的内角和$(n-2)\pi < x\alpha + (n-x)\pi$,所以 $x < \frac{2\pi}{\pi - \alpha}$,$x \leqslant s$.再证可以取 $x = s$ 即可.

因为$0 < \alpha < \frac{n-2}{n}\pi$,所以

$$(n-2)\pi > n\alpha$$

可证
$$(n-2)\pi > \frac{2\pi}{\pi-\alpha}\cdot\alpha > s\alpha$$

所以
$$0 < \frac{(n-2)\pi - s\alpha}{n-s}$$

因为 $\alpha \neq \frac{n-2}{n}\pi$,所以

$$\frac{(n-2)\pi - s\alpha}{n-s} \neq \alpha$$

由 $s < \frac{2\pi}{\pi-\alpha}$,得

$$\frac{(n-2)\pi - s\alpha}{n-s} < \pi$$

所以
$$0 < \frac{(n-2)\pi - s\alpha}{n-s} < \pi$$

且
$$\frac{(n-2)\pi - s\alpha}{n-s} \neq \alpha$$

又 $s\alpha + (n-s)\cdot\frac{(n-2)\pi - s\alpha}{n-s} = (n-2)\pi$,所以存在恰有 s 个内角是α 的凸 n 边形,即可以取 $x = s$.

(2) 显然成立.

(3) 因为 $\alpha \neq \frac{n-2}{n}\pi$,所以凸 n 边形中等于α 的内角个数不大于$n-1$.下证当$\frac{n-2}{n}\pi < \alpha < \frac{n-2}{n-1}\pi$时,凸 n 边形中等于α 的内角有$n-1$个即可.这是

因为

$$(n-1)\alpha+[(n-2)\pi-(n-1)\alpha]=(n-2)\pi$$

且$\frac{n-2}{n}\pi<\alpha<\frac{n-2}{n-1}\pi$时，可证$(n-2)\pi-(n-1)\alpha\neq\alpha$，且$0<(n-2)\pi-(n-1)\alpha<\pi$.

(4) 因为$\frac{n-2}{n-1}\pi\leqslant\alpha$，所以凸$n$边形中等于$\alpha$的内角个数不等于$n,n-1$，即不大于$n-2$. 下证当$\frac{n-2}{n-1}\pi\leqslant\alpha<\pi$时，凸$n$边形中等于$\alpha$的内角有$n-2$个即可. 这是因为

$$(n-2)\alpha+2\cdot\frac{1}{2}(n-2)(\pi-\alpha)=(n-2)\pi$$

且$\frac{n-2}{n-1}\pi\leqslant\alpha<\pi$时，可证$\frac{1}{2}(n-2)(\pi-\alpha)\neq\alpha$，且$0<\frac{1}{2}(n-2)(\pi-\alpha)<\pi$.

定理4,5的证明　以下证明同时适合定理4,5.

当$\alpha=\frac{n-2}{n}\pi$时，可验证定理4,5均成立.

(1) 当$0<\alpha<\frac{n-2}{n}\pi$时，凸$n$边形最多有$n$个大于(不小于)$\alpha$的内角，考虑正$n$边形即知成立.

(2) 当$\frac{n-2}{n}\pi<\alpha<\frac{n-2}{n-1}\pi$时，凸$n$边形中大于(不小于)$\alpha$的内角的个数不大于$n-1$，这也是显然的. 下证凸$n$边形中大于(不小于)$\alpha$的内角有$n-1$个即可. 这是因为：

设$\alpha<\alpha_1<\frac{n-2}{n-1}\pi$，可证

$$\alpha>\frac{(n-2)\pi-\alpha}{n-1}$$

所以

$$\alpha_1>\frac{(n-2)\pi-\alpha}{n-1}$$

得

$$0<(n-2)\pi-(n-1)\alpha_1<\alpha$$

又

$$(n-1)\alpha_1+[(n-2)\pi-(n-1)\alpha_1]=(n-2)\pi$$

所以存在恰有$n-1$个内角大于(不小于)α的凸n边形.

(3) 当$\frac{n-2}{n-1}\pi\leqslant\alpha<\pi$时，凸$n$边形中大于(不小于)$\alpha$的内角的个数不大于$n-2$，这是显然的. 下证凸$n$边形中大于(不小于)$\alpha$的内角有$n-2$个即可. 这是因为：

设$\alpha<\alpha_1<\pi$，可证$\alpha>\pi-\frac{2\alpha}{n-2}$(因为$\alpha\geqslant\frac{n-2}{n-1}\pi$，所以$\alpha>\frac{n-2}{n}\pi$)，

$\alpha_1 > \pi - \frac{2\alpha}{n-2}$.得:

$$0 < \frac{1}{2}(n-2)(\pi - \alpha_1) < \alpha$$

又 $$(n-2)\alpha_1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-2)(\pi - \alpha_1) = (n-2)\pi$$

所以存在恰有 $n-2$ 个内角大于(不小于)α 的凸 n 边形.

定理6的证明 当 $\alpha \neq \frac{n-2}{n}\pi$ 时,考虑正 n 边形即可.

当 $\alpha = \frac{n-2}{n}\pi$ 时,由

$$2 \cdot \frac{n-1}{n}\pi + (n-2) \cdot \frac{n^2-4n+2}{n(n-2)}\pi = (n-2)\pi$$

可知,结论也成立.

推论 (1) 凸 n 边形最多有3个锐角;

(2) 凸 $n(n>4)$ 边形最少有 $n-3$ 个钝角;

(3) 凸 $n(n>4)$ 边形最多有3个直角.

证明 (1) 当 $n \geqslant 4$ 时,由定理1(1)可得.

当 $n=3$ 时,由定理1(2)可得.

(2) 由定理10(1)可得.

(3) 由定理2(1)可得.

例 (第7届新西兰达尼丁——中国上海初中数学友谊通讯赛第16题)一个凸 n 边形的 n 个内角中恰有5个钝角,求 n 的最大值.

解 由推论(2)可知,恰有 $n-3(n>4)$ 个钝角的边数最多的凸多边形是凸 n 边形.

所以本题中有 $n-3=5$,得 $n=8$.

即 n 的最大值为8.

问题 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^+$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$(a 为正常数),求 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中 $<, =, \leqslant, >, \geqslant, \neq \alpha$($\alpha$ 为已知的正数)的数最多、最少的个数.

趣味数学



由提示语“多了”、“少了”猜$[a,b]$内任一整数至多需$[\log_2(b-a+1)]+1$次[①]

中国中央电视台第2套节目“幸运52”栏目中有一个猜商品价格的游戏，规则如下：给出一种商品让参赛者猜其价格，参赛者由主持人的提示语“高了”、“低了”一直猜下去，直到猜中为止. 比如，某商品的价格是58元，参赛者可用以下猜法5次猜中

$$40 \xrightarrow{\text{低了}} 50 \xrightarrow{\text{低了}} 60 \xrightarrow{\text{高了}} 55 \xrightarrow{\text{低了}} 58$$

一般的，参赛者可先估计出某商品的价格是区间$[a,b]$内的某个正整数x(单位：元；$a,b\in\mathbf{N}^*$)，参赛者由主持人的提示语“高了”、“低了”怎样猜，才能尽快猜出x?

还可把这个游戏改述为以下数学问题：

对于集合$Z_{a,b}=\{a,a+1,a+2,\cdots,b\}(a,b\in\mathbf{Z},a\leqslant b)$中的任一固定元素$x$，参赛者根据主持人的提示语“多了”，“少了”至少需多少次，一定能猜出x?

下面研究这个问题.

定理1 $2^{n-1},2^{n-1}\pm2^{n-2},2^{n-1}\pm2^{n-2}\pm2^{n-3},\cdots,2^{n-1}\pm2^{n-2}\pm\cdots\pm2^0$($+$，$-$任意选取，$n\in\mathbf{N}^*$)表示的数：

(1) 均为正整数；

(2) 两两不同；

(3) 个数为2^n-1；

(4) 为$[1,2^n-1]$内的所有整数.

证明 (1) 因为之中最小的数$2^{n-1}-2^{n-2}-\cdots-2^0=1$.

(2) 设整数$k,l\in[0,n-1],k\neq l$，可证形如“$2^{n-1}\pm2^{n-2}\pm\cdots\pm2^k$”的整数$A$与形如“$2^{n-1}\pm2^{n-2}\pm\cdots\pm2^l$”的整数$B$不相等.

这是因为A,B的标准分解式中2的指数不一样：分别为k,l.

形如“$2^{n-1}\pm2^{n-2}\pm\cdots\pm2^k$”的数也不会相等(谁先出现减号谁就小).

① 原载于《数学通讯》(2008年第7期).

(3)$1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

(4) 由(1),(2),(3) 立得.

推论 1 若 $a\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{N}^*$,则$\{a-1+2^{n-1},a-1+2^{n-1}\pm 2^{n-2},\cdots,a-1\pm 2^{n-1}\pm 2^{n-2}\pm\cdots\pm 2^0\}=Z_{a,a+2^n-2}$.

定理 2 参赛者由主持人的提示语“多了”、“少了”猜$[a,b]$($a,b\in\mathbf{Z}$)中的任一固定整数至多需$[\log_2(b-a+1)]+1$次,这种猜法是(以下 $n=[\log_2(b-a+1)]+1$,$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数):

$a-1+2^{n-1}$	$\pm 2^{n-2}$	$\pm 2^{n-3}$	$\pm\cdots$	$\pm 2^0$
第 1 次	第 2 次	第 3 次	…	第 n 次

第 1 次猜 $a-1+2^{n-1}$;

若“多了”第 2 次就猜 $a-1+2^{n-1}-2^{n-2}$,若“少了”第 2 次就猜 $a-1+2^{n-1}+2^{n-2}$;

第 $k(k=2,3,\cdots,n)$ 次猜的数为第 $k-1$ 次猜的数加上或减去 2^{n-k}(“加上”、“减去”由提示语“少了”、“多了”确定).

证明 由 $n=[\log_2(b-a+1)]+1$,得

$$n>\log_2(b-a+1),2^n>b-a+1,a+2^n-2>b-1$$

即

$$b\leqslant a+2^n-2$$

由推论 1 得,按定理 2 的猜法一定能猜出$[a,b]$中的任一固定整数(至多 n 次).

例 1 要猜出 $Z_{1,15}$ 中某一固定元素 x,按定理 2 的猜法至多需多少次一定能猜中?若 $x=5$,写出每次所猜的数.

解 至多需$[\log_2 15]+1=4$次就能猜出 x.

若要猜出 5,则每次所猜的数为

$$8\xrightarrow{\text{多了}}4\xrightarrow{\text{少了}}6\xrightarrow{\text{多了}}5$$

例 2 要猜出 $Z_{50,90}$ 中某一固定元素 x,按定理 2 的猜法至多需多少次一定能猜中?若 $x=88$,写出每次所猜的数.

解 至多需$[\log_2(90-50+1)]+1=6$次就能猜出 x.

若要猜出 88,则每次所猜的数为

$$81\xrightarrow{\text{少了}}97\xrightarrow{\text{多了}}89\xrightarrow{\text{多了}}85\xrightarrow{\text{少了}}87\xrightarrow{\text{少了}}88$$

(此猜法中出现了比 90 大的数 97,因而猜出 81 后可直接猜 $81+16-8=89$.)

定理 3 参赛者由主持人的提示语"多了","少了"猜数列

$$a, a+d, a+2d, \cdots, a+(k-1)d (a, d \in \mathbf{R}, d \neq 0, k \in \mathbf{N}^*)$$

中的任一固定项至多需$[\log_2 k]+1$次,这种猜法是(以下 $n=[\log_2 k]+1$):

$a-d+d\cdot 2^{n-1}$	$\pm d\cdot 2^{n-2}$	$\pm d\cdot 2^{n-3}$	$\pm\cdots$	$\pm d\cdot 2^0$
第 1 次	第 2 次	第 3 次	…	第 n 次

证明 因为 $n=[\log_2 k]+1>\log_2 k$,所以 $2^n-1>k-1$,即 $2^n-1\geqslant k$.

由推论 1,得 $\{2^{n-1}, 2^{n-1}\pm 2^{n-2}, \cdots, 2^{n-1}\pm 2^{n-2}\pm\cdots\pm 2^0\}=\{1,2,3,\cdots,2^n-1\}\supseteq\{1,2,3,\cdots,k\}$,所以 $\{a-d+d\cdot 2^{n-1}, a-d+d\cdot 2^{n-1}\pm d\cdot 2^{n-2},\cdots, a-d+d\cdot 2^{n-1}\pm d\cdot 2^{n-2}\pm\cdots\pm d\cdot 2^0\}\supseteq\{a, a+d, a+2d,\cdots, a+(k-1)d\}$.

即定理 3 成立.

定义 参赛者根据主持人的提示语"多了"、"少了"猜出 $Z_{a,b}$ 的任一固定元素需要次数最少的方法叫做猜 $Z_{a,b}$ 中元素的最佳猜法,这个最少的次数叫做最佳次数,最佳次数记做 $J(a,b)$.

一般性的最佳猜法(即对于任意整数 a, b 均适用的猜法)是否存在,尚需论证.由文献[1]的讨论知,$a=1, b=1,2,3,4,5,6$时定理2的猜法就是最佳猜法.文献[1]中说本文定理 2 的猜法就是最佳猜法是有疑问的:文献[1]并没有对"最佳"给予论证.

当 a, b 已知时猜$Z_{a,b}$中元素的最佳猜法一定存在(有限种猜法中必有猜的次数最少者),但最佳猜法往往不唯一,比如猜$\{1,2,3,4\}$就至少有两种

$$2^2\to 2^2\pm 2^1\to 2^2\pm 2^1\pm 2^0$$

$$4\to 2\to 2\pm 1$$

文献[1]中的对分法概念不清(1 和 4 的中间整数是 2 还是 3 呢),黄金分割法与对分法猜数的举例中均有误.

参考文献

[1] 杨飞.央视《幸运 52》栏目猜价问题的数学探究[J].中学数学教学,2002(1):13-14.

游戏“割尾巴还原”的推广

谈祥柏和杨京玉合著的《趣味代数300题》(1998年中国青年出版社)一书的第247页介绍了一个“割尾巴还原”的数学游戏:

请在纸上写一个多位数(位数不限,但太多了也没多大意思),然后用89乘此数,算出乘积.接着,截掉乘积的末位,在其上位加上末位数的9倍;然后又把所得数的末位再截掉,仍在其上位加这末位数的9倍如此反复进行,直到出现89为止.

此时你把各次去掉的末位数自下而上地报告给我,我可以不费吹灰之力,直接说出原数.

听到此言之后,有位读者将信将疑,他想用913试一试(1971年9月13日林彪叛逃,摔死在温都尔汗,中国人决不应忘记这个日子).

由于 $913\times 89=81\,257$,他就依言进行实验:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 8125 & 7 \\
+ & 63 & \\
\hline
 & 818 & 8 \\
 & 72 & \\
\hline
 & 890 &
\end{array}
$$

于是他说道:“照你的话我已算过,截掉的末位数自下而上是0,8,7,请问:原数是多少?”

不想,表演者二话没说,马上脱口而出:原数一定是913.

他有什么本领,能如此迅速地回答出正确的答案?

该书第255页还给出了解答这个数学游戏的方法:

猜法是从整除性检验巧妙地演化出来的,具体执行起来很简便,只要把报告上来的末位数顺次连写起来(开头即使是0,也不要随便丢弃,正如上文已表明的那样),如果是三位数,就从1 000内减去;若是四位数的话,就从10 000内减去,以此类推,所得的差就是原数.

试问,以上解法的依据是什么?笔者得到:

定理1 若

$$
\begin{aligned}
89\cdot\overline{a_n\cdots a_2a_1} &= 10b_1+c_1\\
b_1+9c_1 &= 10b_2+c_2\\
b_2+9c_2 &= 10b_3+c_3
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$b_{n-1}+9c_{n-1}=10b_n+c_n$$

其中 $a_n\neq 0;a_n,\cdots,a_2,a_1,c_1,c_2,\cdots,c_n\in\{0,1,\cdots,9\};b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{N}$,则:

(1) $b_i+9c_i=10b_{i+1}+c_{i+1}=89(\overline{a_n\cdots a_{i+1}}+1),c_{i+1}+a_{i+1}=9(i=1,2,\cdots,n-1)$;

(2) $b_n+9c_n=89$;

(3) $\overline{c_n\cdots c_2c_1}+\overline{a_n\cdots a_2a_1}=10^n$.

我们不证明定理 1,而证明定理 1 的推广:

定理 2 若

$$(10m-1)\cdot\overline{a_n\cdots a_2a_1}=10b_1+c_1$$
$$b_1+mc_1=10b_2+c_2$$
$$b_2+mc_2=10b_3+c_3$$
$$\cdots$$
$$b_{n-1}+mc_{n-1}=10b_n+c_n$$

其中 $m\in\mathbf{N}^*;a_n\neq 0;a_n,\cdots,a_2,a_1,c_1,c_2,\cdots,c_n\in\{0,1,\cdots,9\};b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{N}$,则:

(1) $b_i+mc_i=10b_{i+1}+c_{i+1}=(10m-1)(\overline{a_n\cdots a_{i+1}}+1),c_{i+1}+a_{i+1}=9(i=1,2,\cdots,n-1)$;

(2) $b_n+mc_n=10m-1$;

(3) $\overline{c_n\cdots c_2c_1}+\overline{a_n\cdots a_2a_1}=10^n$.

证明 (1) 对 i 用数学归纳法证之.先证 $i=1$ 时成立.

由已知的第一,二式可得

$$100b_2+10c_2-(10m-1)(10\,\overline{a_n\cdots a_2}+a_1)=(10m-1)c_1$$
$$100b_2+10c_2=(10m-1)(10\,\overline{a_n\cdots a_2}+a_1+c_1)$$

所以 $10\mid a_1+c_1$,又 $a_1,c_1\in\{0,1,\cdots,9\}$,所以

$$c_1+a_1=10 \quad ①$$

还得 $$10b_2+c_2=(10m-1)(\overline{a_n\cdots a_2}+1)$$

所以 $$10\mid c_2+a_2+1,c_2+a_2=9$$

再由已知的第二式,得 $i=1$ 时成立.

假设 $i=k(1\leqslant k\leqslant n-2)$ 时成立,下证 $i=k+1$ 时成立.

由假设,得

$$10b_{k+1}+c_{k+1}(10m-1)(\overline{a_n\cdots a_{k+1}}+1),c_{k+1}+a_{k+1}=9$$

所以

$$10b_{k+1}+c_{k+1}+a_{k+1}+1=10(10m-1)\,\overline{a_n\cdots a_{k+2}}+10m(a_{k+1}+1)$$

$$b_{k+1}+1=(10m-1)\overline{a_n\cdots a_{k+2}}+m(a_{k+1}+1)$$

又由 $a_{k+1}=9-c_{k+1}$,得

$$b_{k+1}+mc_{k+1}=(10m-1)(\overline{a_n\cdots a_{k+2}}+1)$$

再由已知的第 $k+2$ 式,得

$$b_{k+1}+mc_{k+1}=10b_{k+2}+c_{k+2}=(10m-1)(\overline{a_n\cdots a_{k+2}}+1)$$

所以

$$10\mid c_{k+2}+a_{k+2}+1,c_{k+2}+a_{k+2}=9$$

得 $i=k+1$ 时成立.所以结论(1)成立.

(2)在(1)中令 $i=n-1$,得

$$10b_n+c_n=(10m-1)(a_n+1),c_n+a_n=9$$

所以

$$b_n+mc_n=10m-1$$

(3)由①及(1)中的"$c_{i+1}+a_{i+1}=9(i=1,2,\cdots,n-1)$"立得.

由定理2可编出比"割尾巴还原"更广泛的数学游戏.

由定理2还可得到一类数学黑洞问题的结论:

定理3 $(10m-1)\cdot\overline{a_n\cdots a_2a_1}$($m\in\mathbf{N}^*$,$\overline{a_n\cdots a_2a_1}$是首位数字不是0的 n 位正整数)经过 n 步变换(把一个正整数末位数的 m 倍加到上位叫做一步变换),才可得到黑洞$\{10m-1\}$.

显然,还可把本文中的结论由"十进制"推广到"p 进制".

区时差公式[①]

九年义务教育三年制初级中学教科书《地理(第2册)》(1995年人民教育出版社)第126页叙述了"时区"、"区时"的概念:

我们知道,地球24小时自转一周(360°),即一小时转过15°.因此,国际上规定,每隔15°划为一个时区,全球可分24个时区.以本初子午线为基准,从西经7.5°至东经7.5°,划为中时区或叫零时区.在中时区以东,依次划分为东一区至东十二区;在中时区以西,依次划分为西一区至西十二区.东十二区和西十二区各跨经度7.5°,合为一个时区.

每个时区的中央经线,叫做该时区的"标准经线",标准经线上的时间便是整个时区的"区时".例如,北京处在东八区,东经120°是东八区的中央经线,因此北京时间是采用东经120°的地方时,即东八区的区时.

相邻两个时区的区时,相差整一小时.在任意两个时区之间,相差几个时区,它们就相差几小时.例如,北京和莫斯科相差5个时区,时间就相差5小时,其中较东的时区,区时较早.因此,出国旅行的人必须知道这个常识,向东每跨入一个时区,应把表往前拨一个小时;向西每跨入一个时区,应把表倒拨一小时,这样才能保证你随身携带的表的时针,与当地时间一致.

为了方便,本文作以下规定:

(1) 把东经$\alpha°$记作经度$\alpha°(\alpha\in[0,180))$,西经$\alpha°$记作经度$-\alpha°(\alpha\in[0,180]$,东经180°按西经180°处理).从而可得经度$\alpha°(\alpha\in[-180,180))$的意义.

(2) 把零时区记作0区,东k区记作k区,西k区记作$-k$区($k=1,2,\cdots,12$).从而可得n区($n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm12$)的意义.

(3) 教科书中没有明确规定各区的边界经线属于哪个区,本文规定每个区西边的边界经线属于该区,而东边的边界经线不属于该区.

由以上规定,可得:

(1) $n(n\neq\pm12)$区的标准经线是$(15n)°$,从而可以验证$n(n\neq\pm12)$区的经度范围是$[(15n-7.5)°,(15n+7.5)°)$.显然12区的经度范围是$[172.5°,180°)$,-12区的经度范围是$[-180°,-172.5°)$.

(2) 若A,B两地分别属于a,b区,则A,B两地的区时差为$t_A-t_B=$

① 原载于《中学数学月刊》(2008年第2期).

$a-b$(h).

(3) 若 A 地的经度为 $\alpha°$,则 A 地属于 $\left[\frac{\alpha+7.5}{15}\right]$ 区(这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数).(由(1)可证)

(4) 若 A,B 两地的经度分别为 $\alpha°,\beta°$,则 A,B 两地的区时差为

$$t_A-t_B=\left[\frac{\alpha}{15}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{\beta}{15}+\frac{1}{2}\right]\text{(h)}$$

此公式就是区时差公式.

例 1 第28届雅典奥运会于雅典时间公元2004年8月13日10时开幕,请计算位于东经116°的北京与位于东经23°的雅典的区时差.

解 由规定(1)知,北京、雅典两地的经度分别为 $\alpha°=116°,\beta°=23°$.由区时差公式,得这两地的区时差为

$$\left[\frac{116}{15}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{23}{15}+\frac{1}{2}\right]=8-2=6\text{(h)}$$

即北京时间比雅典时间早6 h(由北京位于东八区,雅典位于东二区也可得),这提醒我们收看开幕式时早打开电视6 h(即北京时间16时打开).

例 2 A,B 两地分别位于西经175°,67°,求 A,B 两地的区时差.

解 A 地的经度 $\alpha°=-175°$,B 地的经度 $\beta°=-67°$.由区时差公式,得 A,B 两地的区时差为

$$\left[\frac{-175}{15}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{-67}{15}+\frac{1}{2}\right]=-12-(-4)=-8\text{ (h)}$$

即 A 地比 B 地的时间晚8 h(由 A 地位于西十二区,B 地位于西四区也可得).A 地是公元2004年12月31日22时的时候,B 地已是公元2005年1月1日6时了.

$A\cdot B$ 的前 t 位数与 A,B 的前 t 位数的联系

定义 当 $t\in \mathbf{N}^*$ 时，用$_t(\overline{a_1\cdots a_n})$ 表示$\overline{a_1\cdots a_n}$ 的前 t 位数，即$\overline{a_1\cdots a_t}$；用$(\overline{a_1\cdots a_n})_t$ 表示$\overline{a_1\cdots a_n}$ 的末 t 位数，即$\overline{a_{n-t+1}\cdots a_n}$.

定理 1 设 $J=\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n}$，$a_1,b_1\in\mathbf{N}^*$，则 J 是 $m+n$ 或 $m+n-1$ 位数，并且（以下 t 为 $1,2,\cdots,m$ 之一，$m\leqslant n$）：

(1) 当$(\overline{a_1\cdots a_t}+1)(\overline{b_1\cdots b_t}+1)\leqslant 10^{2t-1}$ 时，J 是 $m+n-1$ 位数；

(2) 当$\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_1\cdots b_t}\geqslant 10^{2t-1}$ 时，J 是 $m+n$ 位数.

证明 $10^{m+n-2}=10^{m-1}\cdot 10^{n-1}\leqslant J<10^m\cdot 10^n=10^{m+n}$ 所以 J 是 $m+n$ 或 $m+n-1$ 位数.

$$J=(\overline{a_1\cdots a_t}\cdot 10^{m-t}+\overline{a_{t+1}\cdots a_m})(\overline{b_1\cdots b_t}\cdot 10^{n-t}+\overline{b_{t+1}\cdots b_n})$$

(1) $J<[(\overline{a_1\cdots a_t}+1)\cdot 10^{m-t}][(\overline{b_1\cdots b_t}+1)\cdot 10^{n-t}]\leqslant 10^{2t-1}\cdot 10^{m-t}\cdot 10^{n-t}=10^{m+n-1}$，所以 J 不会是 $m+n$ 位数，得 J 是 $m+n-1$ 位数.

(2) $J\geqslant(\overline{a_1\cdots a_t}\cdot 10^{m-t})(\overline{b_1\cdots b_t}\cdot 10^{n-t})\geqslant 10^{2t-1}\cdot 10^{m-t}\cdot 10^{n-t}=10^{m+n-1}$，所以 J 不会是 $m+n-1$ 位数，得 J 是 $m+n$ 位数.

定理 2 当 $t\leqslant m$ 且 $t\leqslant n$ 时，$(\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n})_t=(\overline{a_{m-t+1}\cdots a_m}\cdot\overline{b_{n-t+1}\cdots b_n})_t$.

证明 $\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n}=(\overline{a_1\cdots a_{m-t}}\cdot 10^t+\overline{a_{m-t+1}\cdots a_m})(\overline{b_1\cdots b_{n-t}}\cdot 10^t+\overline{b_{n-t+1}\cdots b_n})$

所以可得 $10^t\mid\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n}-\overline{a_{m-t+1}\cdots a_m}\cdot\overline{b_{n-t+1}\cdots b_n}$，即定理 2 成立.

定理 3 (1) 设 $2\leqslant t\leqslant m$，且 $t\leqslant n$，$\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_1\cdots b_t}$ 是 $2t$ 位数，$\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n}$ 是 $m+n$ 位数，则$_{t-1}(\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n})=r_1$ 或 r_1+1，其中 $r_1={}_{t-1}(\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_1\cdots b_t})$.

(2) 设 $3\leqslant t\leqslant m$ 且 $t\leqslant n$，$\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_1\cdots b_t}$ 是 $2t-1$ 位数.

1) 又$\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n}$ 是 $m+n-1$ 位数，则$_{t-2}(\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n})=r_2$ 或 r_2+1，其中 $r_2={}_{t-2}(\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_1\cdots b_t})$；

2) 又$\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n}$ 是 $m+n$ 位数，则$_{t-2}(\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n})=10^{t-2}-1$ 或$_{t-1}(\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n})=10^{t-2}$.

证明 设$\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n}$ 是 p 位数（当 $a_1,b_1\in\mathbf{N}^*$ 时，$p=m+n$ 或 $m+n-1$），当 $t\leqslant m$ 且 $t\leqslant n$ 时，有

$$\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n}=(\overline{a_1\cdots a_t}\cdot 10^{m-t}+\overline{a_{t+1}\cdots a_m})(\overline{b_1\cdots b_t}\cdot 10^{n-t}+\overline{b_{t+1}\cdots b_n})=\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_1\cdots b_t}\cdot 10^{m+n-2t}+R$$

其中 $R=\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_{t+1}\cdots b_n}\cdot 10^{m-t}+\overline{a_{t+1}\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_t}\cdot 10^{n-t}+\overline{a_{t+1}\cdots a_m}\cdot\overline{b_{t+1}\cdots b_n}$

有 $R<(10^t-1)\cdot 10^{n-t}\cdot 10^{m-t}+10^{m-t}\cdot(10^t-1)\cdot 10^{n-t}+10^{m-t}\cdot 10^{n-t}<2\cdot 10^{m+n-t}$

再由竖式加法,可得定理 3 成立.

推论 设 $3\leqslant t\leqslant m$,且 $t\leqslant n$,有:

(1) 若$_{t-2}(\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_1\cdots b_t})\neq 10^{t-2}-1$,则$_{t-2}(\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n})=r_2$ 或 r_2+1,其中 $r_2={}_{t-2}(\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_1\cdots b_t})$;

(2) 若$_{t-2}(\overline{a_1\cdots a_t}\cdot\overline{b_1\cdots b_t})=10^{t-2}-1$,则$_{t-2}(\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n})=10^{t-2}-1$ 或$_{t-1}(\overline{a_1\cdots a_m}\cdot\overline{b_1\cdots b_n})=10^{t-2}$.

还可考虑把本文的结论从十进制推广到 p 进制.

例 1 用科学计算器(最多只能算出十位数)算出 2^{40} 的准确值.

解 按计算器可得 $2^{40}\approx 1.099\,511\,6\times 10^{12}$,所以 2^{40} 是十三位整数,且前七位数一定是 1 099 511,下面再求出 2^{40} 的末六位数.

按计算器,得

$$2^{40}=(2^{20})^2=1\,048\,576^2$$

又 $$(1\,048\,576^2)_6=(048\,576^2)_6=(2\,359\,627\,776)_6=627\,776$$

所以 $$2^{40}=1\,099\,511\,627\,776$$

注 在叙述数论中的著名难题"$3x+1$ 问题"(也叫叙拉古猜想)时均有这样的叙述:"到目前为止,数学家已经借助电子计算机验证了 $2^{40}\approx 1.2\times 10^{12}$ 以内的自然数对叙拉古猜想均成立."(见洪伯阳发表于 1987 年第 3 期《华中师范大学学报(自然科学版,数学史专辑)》的论文《数论著名问题选介》的第 71 页);"日本东京大学米田信夫验算了 2^{40}(大约是 12 000 亿)以下的所有自然数对叙拉古猜想均成立."(见徐品方发表于 2002 年第 1 期《数学通报》的论文《引无数英雄竞折腰的 $3x+1$ 猜想》.)

例 2 用定理 3 求$_4(999\,999^2)$.

解 按科学计算器,得

$$99\,999^2=9\,999\,800\,001,\text{即}_4(99\,999^2)=9\,999$$

由定理 3(1),得$_4(999\,999^2)=9\,999$ 或 10000,后者显然舍去.

实际上,$999\,999^2=999\,998\,000\,001$,说明不能把$_4(999\,999^2)={}_4(99\,999^2)$加强为$_5(999\,999^2)={}_5(99\,999^2)$.

也谈"一组有趣的数字"

文献[1]叙述了以下有趣现象：

给定两组数123 789,561 945,642 864与242 868,323 787,761 943,这两组数不仅和,平方和相等,而且同时去掉各数相同位置上的1个或2个甚至更多个数,所得到的两组数的和,平方和一直保持相等.

文献[2]说"这像金蝉脱壳一样,层层脱壳,金蝉却保持美丽本色不变".

通俗数学名著[3]第198页也叙述了这种现象,文献[2]及注释①～③还对这种数组的构造进行了探讨,本文再作一些探讨.

定义 若$\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \sum_{i=1}^{n} y_i^k (k = 1,2)$,则称数组$(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$满足2度等幂和,记作$(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)_2$.

定理1 $(r,s,2r+2s-3t;t,2r+s-2t,r+2s-2t)_2$.(由定义容易验证)

定理2 若有序数组

$$(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) = (r,s,2r+2s-3t,t,2r+s-2t,r+2s-2t)$$

$$(x_1',x_2',x_3',y_1',y_2',y_3') = (r',s',2r'+2s'-3t',t',2r'+s'-2t',r'+2s'-2t')$$

则$(kx_1+lx_1',kx_2+lx_2',kx_3+lx_3';ky_1+ly_1',ky_2+ly_2',ky_3+ly_3')_2$.

证明 由定理1,得

$$x_1+x_2+x_3 = y_1+y_2+y_3 \quad ①$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2 \quad ②$$

$$x_1'+x_2'+x_3' = y_1'+y_2'+y_3' \quad ③$$

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2 = y_1'^2+y_2'^2+y_3'^2 \quad ④$$

①×k+③×l,得

$$(kx_1+lx_1')+(kx_2+lx_2')+(kx_3+lx_3') = (ky_1+ly_1')+(ky_2+ly_2')+(ky_3+ly_3') \quad ⑤$$

可证

$$x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3' = y_1y_1'+y_2y_2'+y_3y_3' \quad ⑥$$

① 汤小如.奇妙组合的等式——等幂和问题浅探.中学数学(苏州),1993(2).
② 杨正义.等幂和问题再探.中学数学(苏州),1993(12).
③ 谭书润.趣味"魔数".中学生数学,1994(2).

将题设中的有序数组代入 ⑥ 验证即得

$$x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = y_1y_1' + y_2y_2' + y_3y_3' = 5rr' + 5ss' + 9tt' + 4rs' - 6rt' + 4r's - 6st' - 6r't - 6s't$$

② × k^2 + ⑥ × $2kl$ + ④ × l^2,得

$$(kx_1 + lx_1')^2 + (kx_2 + lx_2')^2 + (kx_3 + lx_3')^2 = (ky_1 + ly_1')^2 + (ky_2 + ly_2')^2 + (ky_3 + ly_3')^2 \quad ⑦$$

由 ⑤,⑦ 及定义立知定理 2 成立.

在定理 1 中分别令$(r,s,t) = (1,5,-1),(2,6,-2),(3,1,1),(7,9,-1),(8,4,2),(9,5,1)$,得

$$(1,5,6;2,3,7)_2$$
$$(2,6,4;4,2,6)_2$$
$$(3,1,2;2,3,1)_2$$
$$(7,9,8;8,7,9)_2$$
$$(8,4,6;6,8,4)_2$$
$$(9,5,4;8,7,3)_2$$

由它们并多次使用定理 2,便可得文献[1] 的有趣现象.

在定理 1 中分别令$(r,s,t) = (9,3,2),(8,2,3),(2,1,1),(8,4,1),(7,4,2),(5,4,2)$,得

$$(9,3,3;7,7,1)_2$$
$$(8,2,5;5,8,2)_2$$
$$(2,1,3;1,3,2)_2$$
$$(8,4,3;7,6,2)_2$$
$$(7,4,7;5,8,5)_2$$
$$(5,4,9;3,8,7)_2$$

由它们并多次使用定理 2,便可得到文献[2] 末的有趣现象:

给定的两组数 982 875,321 444,353 379 与 751 753,783 688,122 257,…

在定理 2 中可令 $r = t + 1, s = t + 2(t \in \mathbf{N}^*)$,得

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (t + 1, t + 2, t + 6, t, t + 4, t + 5)$$

进而可得以下有趣现象:

在 $p(p > t + m + 5; t, m \in \mathbf{N}^*)$ 进制下,给定的两组数

$$\overline{t+1, t+2, \cdots, t+m}, \overline{t+2, t+3, \cdots, t+m+1}, \overline{t+6, t+7, \cdots, t+m+5}$$

与

$$\overline{t, t+1, \cdots, t+m-1}, \overline{t+4, t+5, \cdots, t+m+3}, \overline{t+5, t+6, \cdots, t+m+4},$$

…

用本文的定理 2 一定还可构造出其他的金蝉脱壳数组,但定义中 $n \geqslant 4$ 时的金蝉脱壳数组如何构造笔者还尚未研究.定义中 2 度等幂和的推广应是多度等幂和,文献[3]第 194 ~ 198 页中也有叙述,下面举出几例(笔者已检验了这些式子的正确性,并更正了里面的一处印刷错误):

$$(1,4,5,5,6,9;2,3,3,7,7,8)_5$$

$$(0,5,6,16,17,22;1,2,10,12,20,21)_5$$

$$(1,11,13,33,35,45;3,5,21,25,41,43)_5$$

$$(1,16,19,49,52,67;4,7,31,37,61,64)_5$$

参考文献

[1] 王世强.一组有趣的数字(转载)[J].数学通报,2007(1):64.
[2] 刘军.趣谈"金蝉脱壳数" 的构造[J].中学数学月刊,1997(12):19-20.
[3] 阿尔伯特·H·贝勒.数论妙趣——数学女王的盛情款待[M].谈祥柏,译.上海:上海教育出版社,1998.

也谈“莱福德排列”

定义 若用两个1,两个2,…,两个$n(n\in\mathbf{N}^*)$能排成两个$i(i=1,2,\cdots,n)$之间恰有i个数的排列,就把这种排列叫做莱福德排列(是苏格兰数学家莱福德最先从儿子的游戏开始研究这个问题的.文献[1]叫做莱福德数列,笔者认为不妥),记作$L-n$排列.所有这样排列的个数记作$L(n)$.

定理1 若$L-n$排列存在,则$4\mid n(n+1)$.(见文献[1]或[2])

定理2 若$a_1a_2\cdots a_{2n}$是一个$L-n$排列,则$a_1a_2\cdots a_{2n}$的反序$a_{2n}\cdots a_2a_1$是另一个$L-n$排列(所以$L(n)$是非负偶数).

证明 只需证$a_1a_2\cdots a_{2n}$与$a_{2n}\cdots a_2a_1$是两个不同的$L-n$排列.

由定理1知$n\geqslant 3$,所以$2n-2>n$.

假设$a_1a_2\cdots a_{2n}$与$a_{2n}\cdots a_2a_1$是相同的排列,则$a_1=a_{2n}$.又a_1,a_{2n}即两个a_1之间恰有$2n-2$个数,由定义得$2n-2\leqslant n$,前后矛盾!所以定理2成立.

文献[1]末说:由定理1知,当$n=1,2,5,6,9,10$时不存在$L-n$排列;当$n=3,4,7,8,11,12$等时才有可能存在$L-n$排列.笔者均找到了这些$L-n$排列.

容易验证,$L-3$排列及$L-4$排列均有且仅有两个:312132及其反序,41312432及其反序.所以$L(3)=L(4)=2$.

以下六种排列及其反序均是$L-7$排列:

15146735423627, 17126425374635

27423564371516, 71316435724625

71416354732652, 73161345726425

所以
$$L(7)\geqslant 12$$

以下六种排列及其反序均是$L-8$排列:

3845367425826171, 6418174625328735

8121724568347536, 8131743568427526

8457264258376131, 8514167548236273

所以
$$L(8)\geqslant 12$$

以下两种排列及其反序分别是$L-11,L-12$排列(其中A,B,C分别代表10,11,12)

71B1845A764958B362A329

1C146A5948B657C3A98327B2

所以 $L(11) \geqslant 2, \quad L(12) \geqslant 2$

问题 1 对于哪些 n,存在 $L-n$ 排列?当 $L-n$ 排列存在时,如何求出这些排列(至少要求出一个)?如何求出 $L(n)$ 的表达式?

问题 2 对于每一个满足 $4 \mid n(n+1)$ 的 n,$L-n$ 排列是否都存在?

参考文献

[1] 王德礼.调色板与"莱福德数列".数学通报,2004(1):33.

[2] 甘志国.一种有趣的排列[N].中学生学习报(数学周刊·高二版),2005-4-1(4).

“二次曲线上四点共圆的充要条件”简证

可把文献[1]的三个定理合并后推广为:

定理 1 二次曲线(包括退化为两条直线的情形)上四点 T_1, T_2, T_3, T_4(顺序是逆时针的)共圆的充要条件是直线 T_1T_3, T_2T_4 的倾斜角互补.

而这条定理与笔者发表于文献[2]的定理是等价的(因为直线 T_1T_3 与 T_2T_4 一定相交):

定理 2 设两条直线 $l_i: y - y_0 = k_i(x - x_0)(i = 1,2)$ 与二次曲线 Γ: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0(A \neq B)$ 有四个交点,则这四个交点共圆的充要条件是 $k_1 + k_2 = 0$.

因为原证明发表于《数学通讯》(学生版),所以很多读者可能没有阅读到原文,下面再把证明叙述如下:

证明 由 l_1, l_2 组成的曲线即

$$[y - y_0 - k_1(x - x_0)][y - y_0 - k_2(x - x_0)] = 0$$

所以,经过它与 Γ 的四个交点的二次曲线一定能表示成以下形式

$$\lambda(Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E) + \mu[y - y_0 - k_1(x - x_0)][y - y_0 - k_2(x - x_0)] = 0(\lambda, \mu \text{ 不同时为 } 0) \quad ①$$

必要性 若四个交点共圆,则存在 λ, μ 使方程 ① 表示圆,故式 ① 左边展开式中含 xy 项的系数 $-\mu(k_1 + k_2) = 0$. 而 $\mu \neq 0$,否则 ① 表示曲线 Γ,不表示圆,所以 $k_1 + k_2 = 0$.

充分性 当 $k_1 + k_2 = 0$ 时,式 ① 左边的展开式中不含 xy 项,选 $\mu = 1$,再令式 ① 左边的展开式中 x^2, y^2 项的系数相等,即 $\lambda A - k_1^2 = \lambda B + 1$,得 $\lambda = \dfrac{k_1^2 + 1}{A - B}$.

此时曲线 ① 即

$$x^2 + y^2 + C'x + D'y + E' = 0 \quad ②$$

的形式,这种形式表示的曲线有且仅有三种情形:一个圆,一个点,无轨迹. 而有四个点在曲线 ② 上,所以方程 ② 表示圆. 这就证得了四个交点共圆.

参考文献

[1] 陈振宣.圆锥曲线上四点共圆的充要条件[J].数学教学,2007(2):16-17.
[2] 甘志国.对一道高考题的研究[J].数学通讯,2005(22):21.

三谈“漂洗衣服”

文献[1],[2]均用数学知识研究了“漂洗衣服”问题,本文再对这一问题作更深入的研究.

设衣服经洗涤拧干后,残存含污物 m_0 kg的污水 w_0 kg,用 A kg清水来漂洗.把清水分 n 次用,每次依次是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ kg,设每次漂洗(充分揉搓、拧干)后,衣服中分别含有残留污物 m_i kg的污水 w_i kg($i=1,2,\cdots,n$).

下面求 m_n 的表达式.

第一次漂洗时,m_0 kg污物均匀分布在(a_1+w_0) kg污水中,每千克污水含污物 $\frac{m_0}{a_1+w_0}$ kg,w_1 kg污水含污物

$$m_1=\frac{m_0w_1}{a_1+w_0}$$

完全同样的道理,有

$$m_2=\frac{m_1w_2}{a_2+w_1},\cdots,m_n=\frac{m_{n-1}w_n}{a_n+w_{n-1}}$$

所以

$$m_n=\frac{m_0w_1w_2\cdots w_n}{(a_1+w_0)(a_2+w_1)\cdots(a_n+w_{n-1})}$$

$$m_n=\frac{m_0}{(1+\frac{a_2}{w_1})(1+\frac{a_3}{w_2})(1+\frac{a_n}{w_{n-1}})\cdot\frac{a_1+w_0}{w_n}} \quad ①$$

由公式①可得:

(1)衣服上漂洗前残存污物 m_0 越多,最后残存的污物 m_n 也越多.(衣服越脏越难洗净,因此衣服要勤洗为好!)

(2)w_i($i=1,2,\cdots,n$)越小,m_n 就越小,即每次拧得越干,最后残存的污物会越少.(还应注意充分揉搓,让衣服上的污物均匀分布在水中.漂洗衣服也是把水弄脏的过程,水越脏,衣服就越干净.)

(3)假设我们每次都用最大的力气把衣服上的污水拧“干”,使 w_0 及 w_i($i=1,2,\cdots,n$)都达到最小值 ω(一定有 $w>0$,显然 w 的值因人而异),则

$$m_n = \frac{m_0}{\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{a_i}{w})} \quad ②$$

由“算术平均数不小于几何平均数”知：

$\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{a_i}{w}) \leqslant [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{a_i}{w})]^n$（当且仅当 $a_1=\cdots=a_n=\frac{A}{n}$ 时取等号）

所以当 A kg 清水平均分 n 次使用（每次为$\frac{A}{n}$ kg）时，可使衣服中的污物减少到

$$m_n = \frac{m_0}{(1+\frac{A}{nw})^n} \quad ③$$

(4) 易知数列$\{(1+\frac{A}{nw})^n\}$严格递增（因为函数 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在$(1,+\infty)$上严格递增），且$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{A}{nw})^n = e^{\frac{A}{w}}$（e 为自然对数的底），所以当用来漂洗的清水一定时（为 A kg），清水平均使用且漂洗次数越多越干净，但最后衣服中含的污物总多于 $m_0 \cdot e^{-\frac{A}{w}}$ kg.

(5) 若每次均用 a kg 清水漂洗，则

$$m_n = \frac{m_0}{(1+\frac{a}{w})^n} \quad ④$$

若又要求漂洗后的衣服中残留污物不超过 m kg，则漂洗的次数 $n \geqslant \log_{(1+\frac{a}{w})}\frac{m_0}{m}$.

（文献[2]的分析 2 中“$n=\log_{(1+\frac{a}{w})}\frac{m_0}{m}$”的说法不恰当，因为$\log_{(1+\frac{a}{w})}\frac{m_0}{m}$的值不一定恰好是自然数.）

(6) 若要求漂洗后的衣服中残留的污物不超过 m kg，且只漂洗 n 次，则由公式③可得清水总量 $A \geqslant nw(\sqrt[n]{\frac{m_0}{m}}-1)$.

(7) 若漂洗衣服所用的清水量一定（为 A kg），要求漂洗后的衣服中残留的污物不超过 m kg，则由公式③可得漂洗的次数 $n \geqslant \frac{rA}{w}$，其中 r 由$(1+\frac{1}{r})^r=(\frac{m_0}{m})^{\frac{w}{A}}$确定.（文献[2]的分析 2 不对）

(8) 每次漂洗的干净度及其提高率.

设每次均用 a kg清水漂洗,经过 $n(n \in \mathbf{N})$ 次漂洗后衣服中残留的污物为 m_n kg,把 $p_n = 1 - \frac{m_n}{m_0}$ 叫做经过 n 次漂洗后衣服的干净度,把 $q_n = \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}$ 叫做第 n 次漂洗后衣服的干净度的提高率(注释①根据 $\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n}$ 来计算提高率是不对的).由公式④可得

$$p_n = 1 - \frac{1}{(1 + \frac{a}{w})^n}, q_n = \frac{a}{w(1 + \frac{a}{w})^n - w - a} \quad ⑤$$

由公式⑤可知,漂洗的次数 n 越多,衣服的干净度 p_n 越高,但每次漂洗后干净度的提高率逐渐降低,说明漂洗次数太多时意义也不大.

参考文献

[1] 余继光.三个数学问题的案例分析[J].数学通讯,2000(9):7-8.
[2] 魏本楷,吴厚山.再谈洗衣服数学模型[J].数学通讯,2000(23):24-25.

① 刘宝文.洗衣服中的数学问题.中小学数学(初中版),1998(6).

合理的定期存款利率

美国人金融意识很强,在他们的代数教科书里有以下阅读材料[1]:

"1626 年,一个人把 24 美元按年利率 6% 的活期存入银行,事隔 354 年之后的 1980 年,这个人的后代到银行领到了本息之和 $24+24\times 6\%\times 354=509.76$(美元).

若每满一年时,这个人及其后代都到银行去结算利息,把得到的本息重新存入银行,则 1980 年可得本息之和 $24(1+6\%)^{354}\approx 2.180\times 10^{10}$(美元)."

只需每年与银行结算一次利息,并把本息之和重新存入,共结算、存入 354 次,就可获得这笔巨款.为了避免这种结算、存入给双方带来的不必要的麻烦,只需银行规定合理的定期存款利率即可.这种合理性必须满足:活期存款时可任意次数的结算、存入,定期存款的利息不少于活期存款的利息(因为定期存款更方便于国家回收资金,而活期存款更方便于储户随时取款).

设把 a 元钱按年利率 $p\%$ 的活期存入银行,我们来计算存 $r(r>0)$ 年最多可得多少钱?

把 r 年分成相等的 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 段时间,每段时间到了之后就去银行结算、存入,则存 r 年可得本息之和

$$Q_n=a\left(1+\frac{1}{n}r\cdot p\%\right)^n$$

显然 n 越大,Q_n 的值就越大,且

$$\lim_{n\to\infty}Q_n=a\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}r\cdot p\%\right)^{\frac{n}{r\cdot p\%}}\right]^{r\cdot p\%}=a\mathrm{e}^{r\cdot p\%}$$

(其中 e 为自然对数的底).

这就说明:把 a 元钱按年利率 $p\%$ 的活期存入银行 r 年,得到的本息之和 Q_n 可以无限接近于 $a\mathrm{e}^{r\cdot p\%}$ 元(这里没有考虑钱的最小单位及结算的时间间隔最少是 1 天).

因而活期存款的年利率是 $p\%$ 时,定期存款 r 年的利率应不低于 $\mathrm{e}^{r\cdot p\%}-1$,否则可使活期的存款利息多于定期 r 年存款的利息.

读者还可计算出:若定期存款的年利率是 $p\%$,则定期存款 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 年的利率应不低于 $(1+p\%)^n-1$,否则按定期 1 年存款得到的利息还要多一些.

若定期存款 r 年的利率是 $a(a\in\mathbf{R}^{+})$，则活期存款的年利率应不高于 $\frac{1}{r}\ln(a+1)$，否则可使活期存款的利息多于定期 r 年存款的利息.

参考文献

[1] 谈祥柏，杨京玉. 趣味代数 300 题[M]. 北京：中国青年出版社，1998：110.

斜抛运动的最佳抛射角

文献[1],[2]均研究了斜抛运动的最远射程及最佳抛射角问题,但研究方法不同.文献[2]用向量的方法给出了更丰富的结论.本文再用文献[1]的结论来给出文献[2]中结论的证明.

引理[3] 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的焦点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$.

定理 如图1,以初速度 v_0,抛射角 $\alpha(0°<\alpha<90°)$ 使物体作斜抛运动,当射程 s 最大时(也即起点 O 到落点 A 的距离最大(因为在图1(a)中 $OA=s$;在图1(b),(c)中 $OA^2=s^2+h^2$,h 由 s 确定),此时的抛射角 α 叫做最佳抛射角,此时的抛射方向即初速度 v_0 的方向叫做最佳抛射方向),最佳抛射方向是起点 O 竖直向上的方向 OB 与起点 O 到落点 A 的方向 OA 形成的角 $\angle BOA$ 的平分线,且 OA 是物体运动轨迹(抛物线 OCA)的焦点弦.

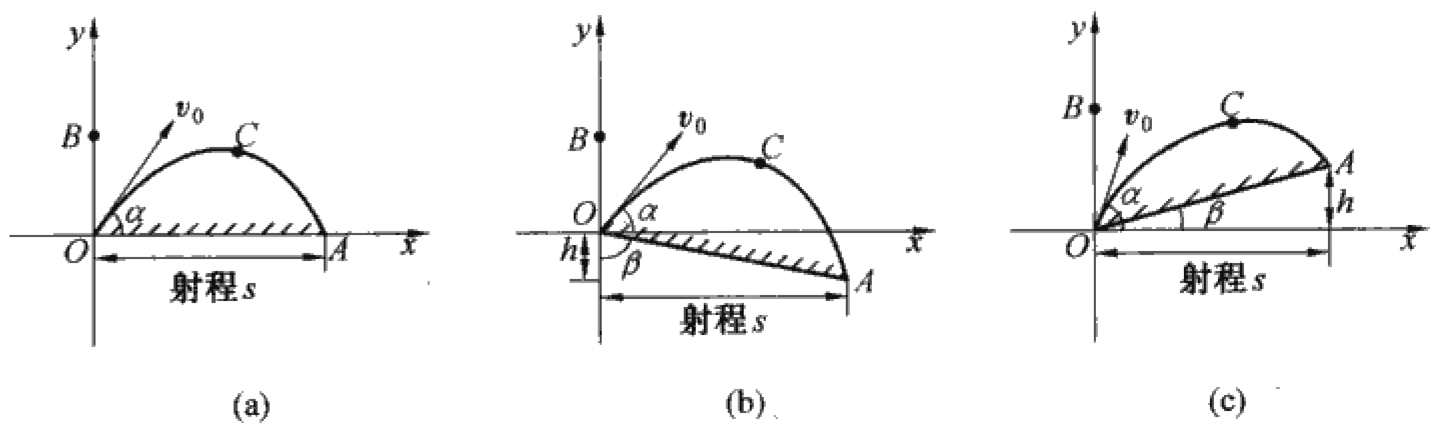


图1

证明 易知图1中抛物线 OCA 的参数方程为

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t \\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(x,y 分别表示物体在时刻 t 飞行的水平距离和竖直高度,g 为重力加速度)化为普通方程,即

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha$$

由引理知,其焦点 $F\left(\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g},-\frac{v_0^2\cos 2\alpha}{2g}\right)$.

即证 $\angle AOB = 2\angle v_0OA, F \in OA$.

(1) 图 1(a) 的情形. 由文献[1] 的图 1 及其说明知, $\angle v_0OA = \alpha = 45°$, 又 $\angle AOB = 90°$, 所以 $\angle AOB = 2\angle v_0OA, F \in OA$.

(2) 图 1(b) 的情形. 由文献[1] 的图 2 及其说明知, 最大射程 $s = \frac{v_0}{g} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, 最佳抛射角 $\alpha = \operatorname{arccot}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}$, 可得

$$\tan\beta = \frac{s}{h} = \frac{v_0}{gh}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

由 $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}$, 得

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{v_0}{gh}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

所以 $\tan\beta = \tan 2\alpha, \beta = 2\alpha, 180° - \beta = 2(\alpha + 90° - \beta)$, 即 $\angle AOB = 2\angle v_0OA$.

可得直线 OA 的方程为

$$y = -\frac{h}{s}x = -\frac{v_0}{gh}\sqrt{v_0^2 + 2gh} \cdot x$$

由 $\alpha = \operatorname{arccot}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}$ 可验证 $F \in OA$.

(3) 图 1(c) 的情形. 由文献[1] 的图 3 及其说明知, 最大射程 $s = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh}$, 最佳抛射角 $\alpha = \operatorname{arccot}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}$, 可得

$$\cot\beta = \frac{s}{h} = \frac{v_0}{gh}\sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

由 $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}}$, 得

$$\tan 2\alpha = -\frac{v_0}{gh}\sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

所以 $\tan 2\alpha = -\cot\beta, 2\alpha - \beta = 90°, 90° - \beta = 2(\alpha - \beta)$, 即 $\angle AOB = 2\angle v_0OA$.

可得直线 OA 的方程为

$$y = \frac{h}{s}x = \frac{gh}{v_0\sqrt{v_0^2 - 2gh}}x$$

由 $\alpha = \operatorname{arccot}\sqrt{1-\frac{2gh}{v_0^2}}$ 可验证 $F \in OA$.

本文的定理是有用的.设想在地面 OA 上从点 O 开始让物体作斜抛运动,由 $\angle BOA = 2\angle v_0OA$ 可迅速确定最佳抛射方向(即使起点 O 到落点 A 的距离最大的初速度 v_0 的方向).

参考文献

[1] 甘志国.推铅球的最佳抛射角应小于45°[J].数学通讯,2003(20):20.
[2] 周金峰.关于最远射程问题的研究[J].数学通讯,2004(23):15-17.
[3] 王四清.浅谈培养学生观察——归纳能力[J].数学通讯,2001(5):6-7.

鸡蛋能堆多高?

美国数学家阿尔伯特·H·贝勒的通俗数学名著《数论妙趣——数学女王的盛情款待》中译本(谈祥柏译,1998 年上海教育出版社,下简称文献[1])第357 页的第 44 题是:

一只鸡蛋重 2 英两,最多可支撑 8 磅(1 磅 = 16 英两).试问,可堆成高为多少层的底为正方形的一座锥形塔而不出风险?如果底为正三角形,可堆成多少层?

答案均为 193 层(见文献[1]第 383 页,那里只有答案,没有解答过程).

我们来研究上述问题的一般情形:

假设一个鸡蛋最多能支撑 a 个鸡蛋(a 是已知的正实数),那么把鸡蛋(各个鸡蛋全一样)堆成正 m 棱锥的形状($m \geqslant 3$,为了方便,本文把一个鸡蛋也看成正 m 棱锥),最多能堆多少层?

引理 把鸡蛋堆成正 m 棱锥,从上到下第 i 层的鸡蛋个数是第 i 个 m 边形数,其大小为 $\frac{1}{2}i[(m-2)i-m+4]$.

$m(m \geqslant 3)$ 边形数即通常所说的多角形数,文献[1]第 225,226 页介绍了多角形数,并给出了通项公式.表 1 介绍了三角形数、正方形数(即四边形数)、五边形数.

定理 1 若把鸡蛋堆成高为 $n+1(n \in \mathbf{N})$ 层的正 m 棱锥,则最下层平均每个鸡蛋受到 $f(m,n)=\dfrac{(m-2)n^2+(5-m)n}{3(m-2)n+6}$ 个鸡蛋的压力.

证明 只需证 $n \in \mathbf{N}^*$ 时成立.

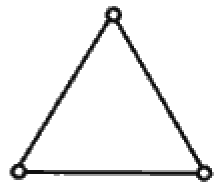
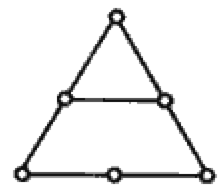
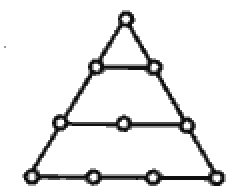
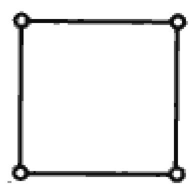
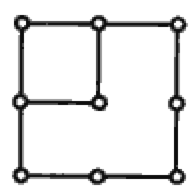
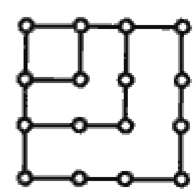
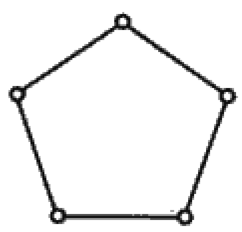
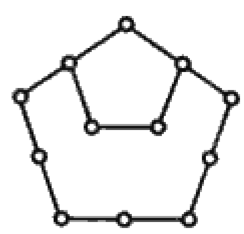
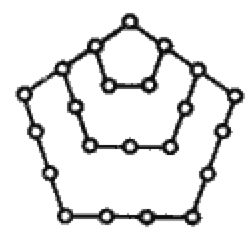
正 m 棱锥最下层每个鸡蛋受到的压力为

$$\frac{\text{从上到下前 } n \text{ 层鸡蛋的总个数}}{\text{第 } n+1 \text{ 层鸡蛋的个数}} \times \text{每个鸡蛋的质量}$$

所以由引理,得

$$f(m,n)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i[(m-2)i-m+4]}{\frac{1}{2}n(n+1)[(m-2)(n+1)-m+4]}$$

表 1

类别 \ 项数	1	2	3	4	i
三角形数	○				$\frac{1}{2}i(i+1)$
正方形数	○				i^2
五边形数	○				$\frac{1}{2}i(3i-1)$

由 $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$,得

$$f(m,n) = \frac{\frac{1}{6}(m-2)n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}(4-m)n(n+1)}{(n+1)[(m-2)n+2]} = \frac{(m-2)n^2+(5-m)n}{3(m-2)n+6}$$

定理 2 (1)若把鸡蛋堆成正 m 棱锥,则下一层(第 $n+2$ 层)平均每个鸡蛋受到的压力大于上一层(第 $n+1$ 层)平均每个鸡蛋受到的压力,即

$$f(m,n+1) > f(m,n)(n \in \mathbf{N})$$

(2)若把鸡蛋堆成正棱锥,则在正 m 棱锥和正 $m+1$ 棱锥中,从上到下的同一层(第 $n+1$ 层)鸡蛋中平均每个鸡蛋受到的压力前者大,后者小,即

$$f(m,n) > f(m+1,n)(n \in \mathbf{N}^*)$$

证明 参见定理 1 用分析法来证.

(1)最后需证

$$(m-2)^2(n^2+n)+(2m-4)(2n+1)+(10-2m) > 0$$

由 $m \geqslant 3, n \geqslant 0$ 知,只需证明 $n=0$ 时上式成立即可.(由生活现象也易理解(1)成立)

(2) 极易证出.

定理3 假设一个鸡蛋最多能支撑 $a(a\in \mathbf{R}^+)$ 个鸡蛋,那么把鸡蛋堆成正 m 棱锥,最多能堆的层数是

$$g(m,a)=1+\left[\frac{(3a+1)m-(6a+5)+\sqrt{(3a+1)^2m^2-(36a^2+18a+10)m+(36a^2+12a+25)}}{2(m-2)}\right]$$

(其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数)

证明 假设鸡蛋堆的正 m 棱锥是$n+1$层,则由定理1,得

$$\frac{(m-2)n^2+(5-m)n}{3(m-2)n+6}\leqslant a$$

$$(m-2)n^2-[(3a+1)m-(6a+5)]n-6a\leqslant 0$$

解此不等式,并注意 $n\in \mathbf{N}$,可得定理3成立.

定理4 假设一个鸡蛋最多能支撑 $a(a\in \mathbf{R}^+)$ 个鸡蛋,把鸡蛋堆成正 m 棱锥,最多能堆 $g(m,a)$ 层,则$[3a]+1\leqslant g(m,a)\leqslant[3a]+2$,且 $g(m,a)<3a+2$.

证明 由定理3,可得

$$g(3,a)=[3a]+1$$

$$\lim_{m\to+\infty}g(m,a)=1+\left[\frac{(3a+1)+(3a+1)}{2}\right]=[3a]+2$$

又由定理2(2),可得:

在一个鸡蛋支撑的质量一定的情况下,把鸡蛋堆成正 m 棱锥,堆的最高层数 $g(m,a)$ 会随 m 的增加而非严格的增加,即

$$g(m,a)\leqslant g(m+1,a)$$

所以

$$[3a]+1\leqslant g(m,a)\leqslant[3a]+2$$

又由定理3的证明,可得

$$g(m,a)\leqslant 1+\frac{(3a+1)m-(6a+5)+\sqrt{(3a+1)^2m^2-(36a^2+18a+10)m+(36a^2+12a+25)}}{2(m-2)}$$

可证上面不等式右边的值小于$3a+2$,所以

$$g(m,a)<3a+2$$

推论 假设一个鸡蛋最多能支撑 $a(a\in \mathbf{R}^+)$ 个鸡蛋,把鸡蛋堆成正 m 棱锥,最多能堆 $g(m,a)$ 层,则:

(1)$g(m,a)=[3a]+1$,或$[3a]+2$;

(2) 当$3a\in \mathbf{N}^*$ 时,$g(m,a)=3a+1$.

在本文开头出自于文献[1]的那道题中,每个鸡蛋最多能支撑64个鸡蛋,

把a =64 代入推论(2) 立得答案为 193,并且堆成任意正棱锥的答案均为 193.

堆鸡蛋的启示:

设一个鸡蛋最多能支撑 64 个鸡蛋,则:

(1) 若把鸡蛋堆成长方体,最多能堆 64 层;

(2) 若把鸡蛋堆成正 m 棱锥,最多能堆 193 层,且 m 越大时越稳当.

这对盖"摩天大楼" 是有些启示的.

可听到多少下钟声?

美国数学家阿尔伯特·H·贝勒的通俗数学名著《数论妙趣——数学女王的盛情款待》中译本(谈祥柏译,1998年上海教育出版社,下简称文献[1])第351页的第4题是一道趣题:

两所教堂的钟在同时打响后.第一所教堂的钟每经$\frac{4}{3}$ s响一声,而第二所教堂打钟的间隔为$\frac{7}{4}$ s.试问:在15 min内可听到多少下钟声?但要注意,间隔在$\frac{1}{2}$ s或更短的两下钟声无法分辨,是要被认做同一声的.

文献[1]第377页给出的答案为772下,但没有解答过程.

本文将研究其一般情形:

两所教堂的钟在同一时刻打响,而后第一所教堂的钟每经过$\frac{b}{a}$ s响一下,第二所教堂的钟每经过$\frac{d}{c}$ s响一下($a,b,c,d\in\mathbf{N}^*$).试问:在T s内可听到多少下钟声?但要注意,间隔t s或更短的两下钟声应视做同声($T,t\in\mathbf{R}^+$).

下面求上述问题的答案$G(a,b,c,d,T,t)$.

听到钟声的次数$G(a,b,c,d,T,t)$ = 第一所教堂的钟响的次数u + 第二所教堂的钟响的次数v − 两所教堂的钟声间隔在t s或更短时间的次数w ①

以两所教堂的钟第一次同时打响为起点,当且仅当经过$\frac{b}{a}m$ s(其中$m\in\mathbf{N},\frac{b}{a}m\leqslant T$,即

$$m=0,1,2,\cdots,[\frac{aT}{b}] \tag{②}$$

本文用$[x]$表示不大于x的最大整数)时第一所教堂的钟声敲响;当且仅当经过$\frac{d}{c}n$ s,其中$n\in\mathbf{N},\frac{d}{c}n\leqslant T$,即

$$n=0,1,2,\cdots,[\frac{cT}{d}] \tag{③}$$

时,第二所教堂的钟声敲响.所以

$$u=[\frac{aT}{b}]+1,v=[\frac{cT}{d}]+1 \tag{④}$$

下面计算 w,即同时满足 ②,③ 及

$$\left|\frac{b}{a}m-\frac{d}{c}n\right|\leqslant t \quad ⑤$$

的整数解(m,n)的组数.

设$(bc,ad)=D,D_1=\frac{bc}{D},D_2=\frac{ad}{D},\frac{D_1}{D_2}=\frac{bc}{ad}$ ⑥

得 D_1,D_2 是互素的正整数,且

$$\left|\frac{b}{a}m-\frac{d}{c}n\right|=\frac{1}{ac}\mid bcm-adn\mid=\frac{D}{ac}\mid D_1m-D_2n\mid$$

由$(D_1,D_2)=1,m,n\in\mathbf{N}$得$\mid D_1m-D_2n\mid\in\mathbf{N}$,所以$\left|\frac{b}{a}m-\frac{d}{c}n\right|$的值只能取$\frac{D}{ac}k$($k\in\mathbf{N}$,又由$\frac{D}{ac}k\leqslant t$,得$k\leqslant[\frac{act}{D}]$),所以 ⑤ 即

$$D_1m-D_2n=k(k=0,\pm1,\cdots,\pm[\frac{act}{D}]) \quad ⑦$$

设方程 $D_1m-D_2n=1$(易知此方程有正整数解)的一组正整数解是(m_0,n_0),即

$$D_1m_0-D_2n_0=1(m_0,n_0\in\mathbf{N}^*) \quad ⑧$$

则方程 ⑦ 的全部整数解是

$$m=D_2S+m_0k,n=D_1S+n_0k(S\in\mathbf{Z})$$

② 即

$$0\leqslant D_2S+m_0k\leqslant\frac{aT}{b} \quad ⑨$$

③ 即

$$0\leqslant D_1S+n_0k\leqslant\frac{cT}{d} \quad ⑩$$

由 ⑧ 得

$$\frac{D_2}{D_1}n_0k=m_0k-\frac{k}{D_1} \quad ⑪$$

$$\frac{D_1}{D_2}m_0k=n_0k+\frac{k}{D_2} \quad ⑫$$

所以 ② 即 ⑨,也即

$$0\leqslant D_1S+\frac{D_1}{D_2}m_0k\leqslant\frac{D_1}{D_2}\cdot\frac{aT}{b}$$

又由 ⑥,⑫ 得

$$-\frac{k}{D_2}\leqslant D_1S+n_0k\leqslant\frac{cT}{d}-\frac{k}{D_2} \quad ⑬$$

③ 即 ⑩,也即

$$0 \leqslant D_2 S + \frac{D_2}{D_1} n_0 k \leqslant \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{cT}{d}$$

又由 ⑥,⑪ 得

$$\frac{k}{D_1} \leqslant D_2 S + m_0 k \leqslant \frac{aT}{b} + \frac{k}{D_1} \tag{14}$$

再分三种情形:

(1) 当 $k = 0$ 时(即两所教堂的钟声同时敲响的次数).

此时 ②,③ 即 ⑨,⑭ 得

$$0 \leqslant S \leqslant \frac{aT}{bD_2}$$

即

$$0 \leqslant S \leqslant [\frac{aT}{bD_2}]$$

所以此时

$$w = [\frac{aT}{bD_2}] + 1 \tag{15}$$

当然也可得

$$w = [\frac{cT}{dD_1}] + 1 \tag{16}$$

(2) 当 $k > 0$ 时(即第一所教堂的钟声后于第二所教堂的钟声$\frac{D}{ac}k$ s,$k = 1, 2, \cdots, [\frac{act}{D}]$).

此时 ②,③ 即 ⑨,⑭,得

$$\frac{k}{D_1} \leqslant D_2 S + m_0 k \leqslant \frac{aT}{b}$$

即

$$-\frac{(D_1 m_0 - 1)k}{D_1 D_2} \leqslant S \leqslant \frac{aT - bm_0 k}{bD_2}$$

由 ⑧ 得

$$-\frac{n_0 k}{D_1} \leqslant S \leqslant \frac{aT - bm_0 k}{bD_2}$$

即

$$-\left[\frac{n_0 k}{D_1}\right] \leqslant S \leqslant \left[\frac{aT - bm_0 k}{bD_2}\right] (因为\frac{n_0 k}{D_1} > 0)$$

所以此时

$$w = \left[\frac{aT - bm_0 k}{bD_2}\right] + \left[\frac{n_0 k}{D_1}\right] + 1 (k = 1, 2, \cdots, [\frac{act}{D}]) \tag{17}$$

(3)$k<0$时(即第一所教堂的钟声后于第二所教堂的钟声$\frac{D}{ac}k$ s,$k=-1,-2,\cdots,-[\frac{act}{D}]$).

此时 ②,③ 即 ⑬,⑩,得

$$-\frac{k}{D_2}\leqslant D_1S+n_0k\leqslant\frac{cT}{d}$$

由 ⑧ 得

$$\frac{dn_0k-cT}{dD_1}\leqslant -S\leqslant\frac{k(1+n_0D_2)}{D_1D_2}$$

$$\frac{dn_0k-cT}{dD_1}\leqslant -S\leqslant\frac{m_0k}{D_2}$$

$$-\left[\frac{cT-dn_0k}{dD_1}\right]\leqslant -S\leqslant\left[\frac{m_0k}{D_2}\right]$$

所以此时

$$w=\left[\frac{m_0k}{D_2}\right]+\left[\frac{cT-dn_0k}{dD_1}\right]+1\left(k=-1,-2,\cdots,-\left[\frac{act}{D}\right]\right) \tag{⑱}$$

由 ⑮,⑰,⑱ 得

$$w=\left[\frac{aT}{bD_2}\right]+1+\sum_{k=1}^{[\frac{act}{D}]}\left(\left[\frac{aT-bm_0k}{bD_2}\right]+\left[\frac{n_0k}{D_1}\right]+1\right)+\sum_{k=1}^{[\frac{act}{D}]}\left(\left[\frac{cT+n_0dk}{dD_1}\right]+\left[-\frac{m_0k}{D_2}\right]+1\right)=$$

$$\left[\frac{aT}{bD_2}\right]+2\left[\frac{act}{D}\right]+1+\sum_{k=1}^{[\frac{act}{D}]}\left(\left[\frac{aT-bm_0k}{bD_2}\right]+\left[\frac{cT+n_0dk}{dD_1}\right]+\left[\frac{n_0k}{D_1}\right]+\left[-\frac{m_0k}{D_2}\right]\right) \tag{⑲}$$

由 ①,④,⑲ 得:

定理 $G(a,b,c,d,T,t)=1+\left[\frac{aT}{b}\right]+\left[\frac{cT}{d}\right]-\left[\frac{aT}{bD_2}\right]-2\left[\frac{act}{D}\right]-\sum_{k=1}^{[\frac{act}{D}]}\left(\left[\frac{aT-bm_0k}{bD_2}\right]+\left[\frac{cT+n_0dk}{dD_1}\right]+\left[\frac{n_0k}{D_1}\right]+\left[-\frac{m_0k}{D_2}\right]\right)$,其中 D,D_1,D_2 由 ⑥ 确定,m_0,n_0 由 ⑧ 确定.

在定理中令 $a=3,b=c=4,d=7,T=900,t=\frac{1}{2}$,得 $D=1,D_1=16,D_2=21$,又可选 $m_0=4,n_0=3$,得本文开头那道趣题的答案为

$$G(3,4,4,7,900,\frac{1}{2}) = 1 + \left[\frac{3\times 900}{4}\right] + \left[\frac{4\times 900}{7}\right] - \left[\frac{3\times 900}{4\times 21}\right] - 2\left[\frac{3\times 4\times \frac{1}{2}}{1}\right] -$$

$$\sum_{k=1}^{6}\left(\left[\frac{3\times 900 - 4\times 4k}{4\times 21}\right] + \left[\frac{4\times 900 + 3\times 7k}{7\times 16}\right] + \left[\frac{3k}{16}\right] + \left[-\frac{4k}{21}\right]\right) =$$

$$1 + 675 + 514 - 32 - 12 - (31\times 6 + 32\times 4 + 33\times 2 + 0\times 5 + 1 -$$

$$1\times 5 - 2) = 772$$

a^b, b^a 谁大?

问题 比较 a^b 与 $b^a(a > b > 0)$ 的大小.

设 $a = kb(k > 1)$,得

$$a^b > b^a \Leftrightarrow (kb)^b > b^{kb} \Leftrightarrow kb > b^k \Leftrightarrow k > b^{k-1} \Leftrightarrow b < k^{\frac{1}{k-1}}$$

同理,还得

$$a^b = b^a \Leftrightarrow b = k^{\frac{1}{k-1}}$$

$$a^b < b^a \Leftrightarrow b > k^{\frac{1}{k-1}}$$

定理 若 $a = kb, k > 1, b > 0$,则

$$a^b > (=, <) b^a \Leftrightarrow b < (=, >) k^{\frac{1}{k-1}}$$

推论 1 当 $0 < b \leqslant 1$ 且 $a > b$ 时,$a^b > b^a$.

证明 由定理的第一个结论易证.也可这样证:

$a^b > b^b \geqslant b^a$(因为 $y = x^b$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是增函数,$y = b^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数).

接下来,还需研究:当 $a > b > 1$ 时,a^b 与 b^a 谁大?

推论 2 当 $a > b \geqslant \mathrm{e}$(e 是自然对数的底)时 $a^b < b^a$.

证明 先给出结论[1]:

当 $x > 0$ 时,$(1 + \frac{1}{x})^x < \mathrm{e}$.

在该结论中可令 $x = \frac{a-b}{b}$,得$(\frac{a}{b})^{\frac{1}{\frac{a}{b}-1}} < \mathrm{e}$.

又 $b \geqslant \mathrm{e}$,所以 $b > (\frac{a}{b})^{\frac{1}{\frac{a}{b}-1}}$.

再由定理的第三个结论,立得推论 2 成立.

由推论 2,立得:

(1)$\mathrm{e}^3 > 3^{\mathrm{e}}$;

(2)$n^{n+m} > (n + m)^n (n \geqslant \mathrm{e}, m > 0)$.

参考文献

[1] 吉米多维奇 Б П. 数学分析习题集[M]. 修订本. 李荣冻,译. 北京:高等教育出版社,1958:135.

还贷款额函数 PMT 的内涵

笔者曾参加计算机高级班的培训,在 Excel 中介绍了还贷款额函数 PMT(属财务类).用该函数可以方便的解决这样两类问题:

(1) 某公司在 2005 年 1 月 1 日向银行贷款 a 元,月利率为 p,$n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个月内还清,在贷款后的每月 1 日(包括 2005 年 1 月 1 日)还一次款,共还 n 次,且各次还款额相等,还要求还清贷款后结余 b 元,求每次的还款额.

(2) 在(1) 中若是“在贷款后的每月月底还一次款”(其余不变),求每次的还款额.

对于问题(1),在 PMT 函数对话框 Rate, Nper, Pv,FV,Type 各栏中依次输入 p,n,a,b 的值及 1,再单击“确定” 按钮,立得要求的结果(单位:元).

对于问题(2),只需将以上“及 1” 改为“及 0” 即可.

作为数学老师自然应当思考问题(1),(2) 的结果

$$\text{PMT}(p,n,a,b,1),\text{PMT}(p,n,a,b,0)$$

是如何算出来的呢?

先看问题(1).设每次还 x 元,得:

第 1 次还的 x 元,到第 n 个月末将变成 $x(1+p)^n$ 元;

第 2 次还的 x 元,到第 n 个月末将变成 $x(1+p)^{n-1}$ 元;

…

第 n 次还的 x 元,到第 n 个月末将变成 $x(1+p)$ 元.

所有的还款到第 n 个月末将变成

$$x[(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^n]=x\cdot\frac{(1+p)-(1+p)^{n+1}}{1-(1+p)}=$$

$$x\cdot\frac{1+p}{p}[(1+p)^n-1](\text{元})$$

开始的贷款 a 元到第 n 个月末将变成 $a(1+p)^n$ 元.由题意,得

$$x\cdot\frac{1+p}{p}[(1+p)^n-1]=a(1+p)^n+b$$

$$x=\frac{p}{1+p}\left[a+\frac{a+b}{(1+p)^n-1}\right]$$

即 $\text{PMT}(p,n,a,b,1)=\dfrac{p}{1+p}\left[a+\dfrac{a+b}{(1+p)^n-1}\right]$ 元.

再看问题(2),设每次还 x 元,得

$$x[(1+p)^{n-1}+(1+p)^{n-2}+\cdots+(1+p)+1]=a(1+p)^n+b$$

$$x\cdot\frac{1-(1+p)^n}{1-(1+p)}=a(1+p)^n+b$$

$$x=p\left[a+\frac{a+b}{(1+p)^n-1}\right]$$

即 $\mathrm{PMT}(p,n,a,b,0)=p\left[a+\frac{a+b}{(1+p)^n-1}\right]$元.

对分马问题的改进

分马问题 有位商人,临终前对他的三个儿子说:"我只有17匹马留给你们,老大得$\frac{1}{2}$,老二得$\frac{1}{3}$,老三得$\frac{1}{9}$,必须分到的都是活马."请问应怎样分?

据说这是一道流传很广的阿拉伯古算题.随着流传,题中的数据、背景也略有变化,但题意相同,代表性的解法也有三种(见文献[1],[2]):

解法1 商人死后,三个儿子不知道如何分,只好求助于部落的酋长.酋长牵来自己的1匹马,放到马群中去,然后说:"按照你们父亲的意愿去分吧!"

此时共有18匹马,于是老大、老二、老三分别分得9,6,2匹马.分完后,酋长又将自己的马牵走了.

解法2 解法1的主意很好,既巧妙又圆满.然而为什么必须牵来1匹马才能分,而分后这匹马却又没分出去?可以用无穷递缩等比数列的知识来解释:

第一次分马并没有分完,于是又必须把剩余的马按遗嘱再分第二次,但第二次也没有分完……,必须这样一直分下去,从而得

老大分得

$$17\left[\frac{1}{2}+\left(1-\frac{17}{18}\right)\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{17}{18}\right)^2\times\frac{1}{2}+\cdots+\left(1-\frac{17}{18}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2}+\cdots\right]=9(\text{匹马})$$

同理,得老二,老三分别分得6,2匹马.

解法3 可设老大,老二,老三分别分得$\frac{x}{2}$,$\frac{x}{3}$,$\frac{x}{9}$匹马,则

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{9}=17$$

$$x=18$$

所以老大、老二、老三分别得9,6,2匹马.

正如文献[1]所说,以上三种解法虽然得到了相同的"圆满结果",但均是错误的(偷换命题),此题也不宜在中小学生中流传.

小学高年级学生由分数的意义即可得正确解法:

老大应分得 $17\times\frac{1}{2}=8\frac{1}{2}$(匹马),

老二应分得 $17\times\frac{1}{3}=5\frac{2}{3}$(匹马),

老三应分得 $17\times\frac{1}{9}=1\frac{8}{9}$(匹马),

还剩 $17\times(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9})=17\times\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$(匹马).

而由题意知,老大、老二、老三都应分得整数匹马,所以本题无解.

如果读者还念念不忘以上的“巧解”,就请看以下改进后的新分马问题.

新分马问题 1 现有 $A(A\in\mathbf{N}^*)$ 匹马,又借来 x(x 是未知的实数)匹马,把这 $A+x$ 匹马按第 i 个人分得 $\frac{1}{p_i}$($p_i\geqslant 1,i=1,2,\cdots,n;\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\leqslant 1$)分给 n 个人,必须分到的马都是活马,借来的 x 匹马还必须在分完后不多不少的还给别人.请问应怎样分?

解 第 i 个人应分到 $A_i=\frac{A+x}{p_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 匹马,所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{A+x}{p_i}=A,\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=\frac{A}{A+x}$$

$$x=A\left(\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}}-1\right) \qquad ①$$

$$A_i=\frac{A}{p_i\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}}(i=1,2,\cdots,n) \qquad ②$$

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathbf{N}$ 时,问题 1 有解,且解为 ②;否则无解.

请按照“新分马问题 1”的分法完成以下各分马问题:

(1) 把 17 匹马按老大、老二、老三分别得 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{9}$ 来分;

(2) 把 34 匹马按老大、老二、老三分别得 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{9}$ 来分;

(3) 把 3 匹马按老大、老二分别得 $\frac{3}{10},\frac{3}{5}$ 来分;

(4) 把 3 匹马按老大、老二分别得 $\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{1}{2\sqrt{10}}$ 来分;

(5) 把 3 匹马按老大、老二分别得 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 来分.

解 由 ①,② 可得分法:

(1) 应借来 $x=17\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}-1\right)=1$ 匹马,三个儿子分别得 9,6,2 匹马.

(2) 应借来 2 匹马,三个儿子分别得 18,12,4 匹马.

(3) 应借来$\frac{1}{3}$匹马,两个儿子分别得1,2匹马.

(4) 应借来$2\sqrt{10}-3$匹马,两个儿子分别得1,2匹马.

(5) 无解.

新分马问题2 把$A(A\in \mathbf{N}^*)$匹马无限次的按第i个人分得$\frac{1}{p_i}$($p_i\geqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$; $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\leqslant 1$)分给$n$个人,最后分得的马必须都是活马,请问应怎样分?

解 可得与"新分马问题1"相同的答案.

最后,再给出两道趣题:

题1 36口缸,9条船来装,只准装单,不能装双,你说怎么装?

题2 商店规定:3个空汽水瓶可换1瓶汽水(当然包括这个装汽水的汽水瓶).一些顾客在此商店买了18瓶汽水(这些汽水瓶也归顾客所有),请问这些顾客最多可喝几瓶汽水?

(答案:题1,无解;题2,27.)

参考文献

[1] 黄邦本.谈一道古算题[J].数学通讯,1989(1):33-34.

[2] 方良秋,李恒项.欣赏名题,提升思维能力[J].数学通讯,2003(22):48-封三.

记住时间——推算星期几

亲爱的读者,你是否注意到"2001年1月1日是星期一"这一页特殊的日历.又因为2001年是平年为365天,365被7除的余数是1,所以2002年1月1日是星期二,同理有2003年1月1日是星期三.再由2003年各月的天数被7除的余数可算出2003年各月1日依次是星期三、六、六、二、四、日、二、五、一、三、六、一.从而可得以下速算2003年每天是星期几的方法.

读者,只要你记住以下数字:2,5,5,1;3,6,1,4;0,2,5,0.(它们分别是以上星期几的"几"减去1,星期日的"日"看做7,所以记不住这12个数字时也可推导),你就可以迅速算出2003年中的任何一天是星期几.

例如,2003年6月7日是星期几?只需用上述数字中的第6个数字(因为是6月)"6"加上日数"7"得13,再用13÷7,得余数6,所以2003年6月7日(全国普通高考时间提前后的第一天)是星期六(余数为0时表示星期天).

要计算2004年每天是星期几,只要记住以下数字:3,6,0,3;5,1,3,6;2,4,0,2.按上述方法即可解决.比如,2004年6月7日是星期一(它与2003年6月7日是星期六有何联系).

用以上方法也可解决公历、农历、星期几之间的联系.

购物总价应是数量的严格递增函数

2001 年第 8,9 两期《数学通报》的封四均刊登了一份购书的价格表,如表 1 所示.

表 1

一次邮购 1 ~ 10 套	一次邮购 11 ~ 50 套	一次邮购 51 ~ 100 套	一次邮购 101 ~ 300 套	一次邮购 300 套以上
每套 37 元	每套 32 元	每套 30 元	每套 27 元	每套 25 元

这份价格表体现了"多购从优"的商业特点:购物数量达到一定程度后,价格可以优惠.

但从这份价格表还可得:

(1) 邮购 10 套的总价比邮购 11 套的总价还要多(但邮购 9 套的总价不会比邮购 11 套的总价多,即此句话中的"10"是最小的数,下同);

(2) 邮购 49 套,50 套的总价都比邮购 51 套的总价还要多;

(3) 邮购 91 ~ 100 套的总价都比邮购 101 套的总价还要多;

(4) 邮购 278 ~ 300 套的总价都比邮购 301 套的总价还要多.

有了以上结论后,邮购书的套数是 10,49,50,91 ~ 100,278 ~ 300 时,每套书的价格还可比表 1 中的价格更优惠,比如:

(1) 邮购 100 套时,每套只需 27.27 元,还可多得 1 套书(总费用比直接按表 1 的价格每套 30 元邮购省了 73 元).

(2) 邮购 280 套时,每套只需 $\frac{25\times 301}{280}=26.875$(元),还可多得 31 套书(总费用比直接按表 1 的价格每套 27 元邮购节省了 $280\times 27-25\times 301=35$(元)).

2001 年第 17 期《数学通讯》的封四也刊登了一份购书价格表,如表 2 所示.

表 2

发行代号	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	6 号
定　　价	13.00 元	13.00 元	11.00 元	14.00 元	11.00 元	9.50 元

邮购办法:购 1 本,收邮挂费(定价的)30%;购 2 ~ 9 本,收邮挂费(定价的)20%;购 10 本以上(包括 10 本),免收邮挂费.

以上邮购办法也体现了"多购价优",但仍有"不合理"之处:

以4号书为例,邮购9本书时,每本只需$\frac{140.00}{9}\approx 15.56$元,还可多得1本书(若直接按表2及其邮购办法,则每本价格为16.80元,故总费用节省了11.20元).

造成以上"有空可钻"的原因是:购书的总价y(元)与购书的套数x(套)之间的函数不是处处递增的,出现了"y随x的增大而减小"的情形.所以,笔者认为,商家在制订促销商品的价格时,价格表应满足以下两条(其中:y为总价,x为数量,w为单价):

(1)w应是x的(非严格)递减函数;

(2)y是x的严格递增函数.

以上观点还远远没有进入商家(企业家)的意识.

2001年1月1日星期一

新年、新世纪、新千年的钟声已经敲响,翻开新年日历(指公历,下同):2001年1月1日是星期一,真奇巧!哪些年份的1月1日(这一天也称为元旦)是星期一呢?

年份能被4整除的是闰年,但世纪年(指能被100整除的年份)要能被400整除才是闰年,其他的年份都是平年,闰年366天,平年365天.

为了简便,本文假定从1年1月1日起,闰年及平年的设置均按上述规律安排.

定理1 从1年1月1日到$n(n\in \mathbf{N}^*$,下同)年1月1日经过的天数(如从1年1月1日到1年1月5日经过的天数是4)是$f(n)=365(n-1)+\left[\frac{n-1}{4}\right]-\left[\frac{n-1}{100}\right]+\left[\frac{n-1}{400}\right]$(这里$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数).

由定理1可知每400年的天数$f(400)=146\ 097$是7的整数倍,所以n年p月q日与$(n+400)$年p月q日星期几相同,又2001年1月1日是星期一,所以1年1月1日也是星期一.

定理2 n年1月1日是星期$x(n)$,其中$x(n)=\left(n+\left[\frac{n-1}{4}\right]-\left[\frac{n-1}{100}\right]+\left[\frac{n-1}{400}\right]\right)$除以7所得的余数(当$x(n)=0$时表示星期天).

推论1 当且仅当$n=400m+r(m\in \mathbf{N},r=1,7,18,24,29,35,46,52,57,63,74,80,85,91,103,114,120,125,131,142,148,153,159,170,176,181,187,198,210,216,221,227,238,244,249,255,266,272,277,283,294,300,306,312,317,323,334,340,345,351,362,368,373,379,390,396)$时,$n$年1月1日是星期一.

由推论1知,1月1日是星期一的概率是$\frac{56}{400}=\frac{7}{50}<\frac{1}{7}$.

推论2 (1)若$\left[\frac{n-1+28k}{100}\right]=\left[\frac{n-1}{100}\right],\left[\frac{n-1+28k}{400}\right]=\left[\frac{n-1}{400}\right](k=1,2,$或$3)$,则$(n+28k)$年1月1日与$n$年1月1日星期几相同;

(2)若$\left[\frac{n-1+96k}{100}\right]=\left[\frac{n-1}{100}\right]+k,\left[\frac{n-1+96k}{400}\right]=\left[\frac{n-1}{400}\right](k=1,2,3$或$4)$,则$(n+96k)$年1月1日与$n$年1月1日星期几相同.

春节的公历日期范围

1　公历和农历[1]

公历,又称阳历,就是我们平常所说的公元某年某月某日,公历一年的时间大约是 365.242 2 天,即地球绕太阳公转一周所需的时间.为了使一年的时间是整数天,就规定平年 365 天,闰年 366 天.公元年数能被 4 整除的是闰年,但世纪年(指能被 100 整除的年份)要能被 400 整除的才是闰年,这样在 400 年(4 个世纪)中安排 97 个闰年,共有 $365\times400+97=146\ 097$(天),平均每年为365.242 5 天,比公历一年仅长 0.000 3 天,需积 3 000 多年才有一天之差.

农历,又称阴历,是根据朔望月(即月球绕地球旋转一周所需的时间,为 29.530 6 天)安排大月(30 天)和小月(29 天),力求使农历平均每个月的时间近似等于朔望月,又根据公历一年相当的朔望月数安排农历的平年和闰年:平年 12 个月,闰年 13 个月.农历既保证了每个月初一是朔(看不见月亮),十五为望(月圆),又保证农历一年的平均时间近似等于公历一年的时间.

农历平年的时间为 $29.530\ 6\times12=354.367\ 2$(天),即 354 天或 355 天;农历闰年的时间为 $29.530\ 6\times13=383.897\ 8$(天),即 383 天或 384 天.公历一年为 365 天或 366 天,所以公历的一年比农历的平年多 10 ~ 12 天,比农历的闰年少 17 ~ 19 天.

我国的二十四节气(春雨惊春清谷天,夏满芒夏暑相连,秋处露秋寒霜降,冬雪雪冬小大寒)中,单数的叫节气,双数的叫中气,并按中气的顺序确定月序,如第一个中气是雨水,则凡有雨水的月就是正月;第二个中气是春分,则凡有春分的月就是二月.二十四节气的公历日期是比较稳定的,如雨水是 2 月 18 ~ 20 日,春分是 3 月 20 ~ 22 日,夏至是 6 月 21 ~ 22 日.

2　春节的公历日期范围是元月 20 日 ~ 2 月 20 日

明白了以上两种历法,再来推算春节(即农历正月初一)的公历日期范围就不难了.

上面已经谈到,有雨水的月是正月,但雨水在正月的哪一天是不固定的,雨水可以是正月中的任一天.如果正月初一是雨水,则可得公历最晚的春节是 2 月 20 日(1920 年和 1985 年的 2 月 20 日都是春节,并且又是雨水[2]);如果正月三十是雨水,则可得公历最早的春节是元月 20 日(正月三十是雨水 2 月 18 日,正

月十三是2月1日,正月十二是元月31日,正月初一是元月20日,笔者在文献[2]中查得1920～2040年中,公历最早的春节是1966年元月21日,这一年2月19日是雨水,也是正月三十).

春节的公历日期范围是元月20日～2月20日,绝不会在公历3月份的某一天过春节.

3　由今年春节的公历日期推算明年春节的大致公历日期

如前所述,公历的一年比农历的平年多10～12天,比农历的闰年少17～19天.如果农历今年是平年,则明年的春节比今年春节的公历日期提前10～12天;如果农历今年是闰年,则明年的春节比今年春节的公历日期后推17～19天.总之,明年春节的公历日期比今年春节的公历日期提前10～12天,或者后推17～19天,但还要保证春节的公历日期在元月20日～2月20日之间.

如1985年的春节是2月20日,所以1986年的春节是2月8～10日,或为3月9～11日(公历1986年是平年,2月只有28天),但春节的公历日期应在元月20日～2月20日,所以1986年的春节是2月8日,9日或10日(由此还可知农历1985年是平年),实际上1986年的春节是2月9日[2].

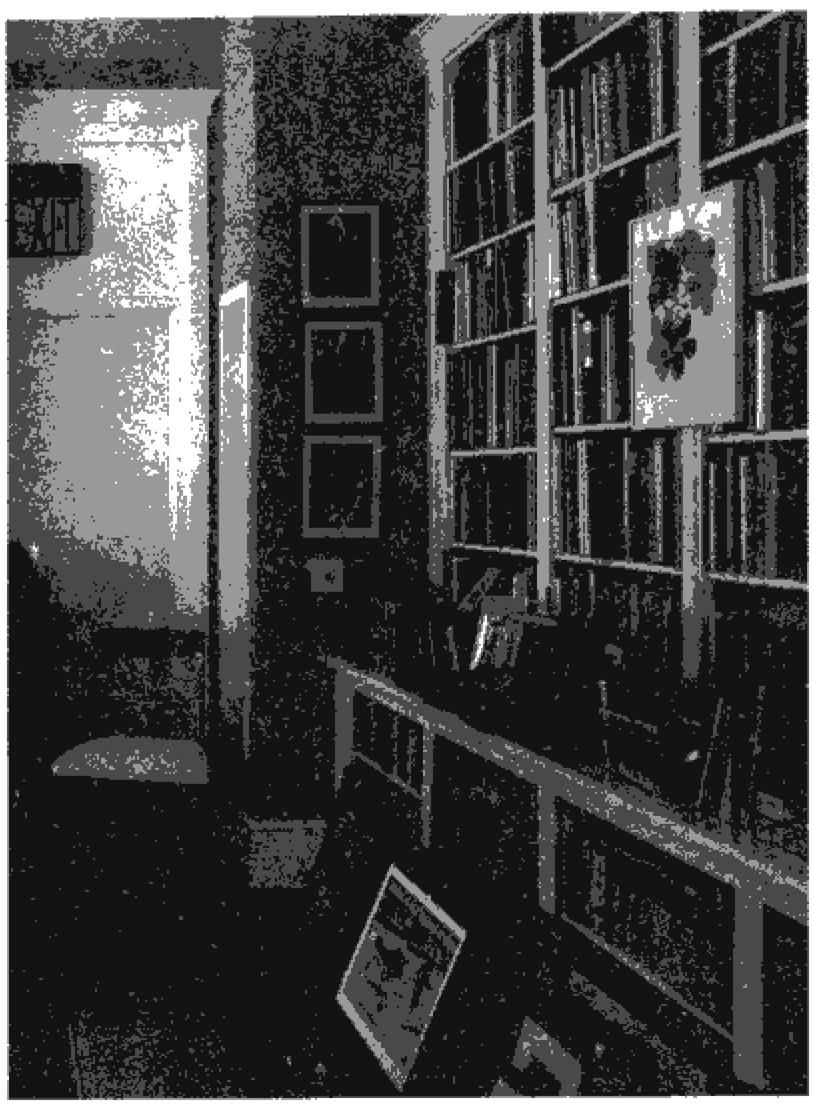
又如1999年的春节是2月16日,所以1998年的春节是元月28～30日,或为2月26～28日,进而可知1998年的春节是前者且农历1998年是闰年,实际上1998年的春节是元月28日[2].

再如2005年的春节是2月9日,所以2004年的春节是元月21～23日,或为2月19～21日,实际上2004年的春节是元月22日[2].

参考文献

[1] 卢平安,周连亨.你了解时间吗?[M].石家庄:河北人民出版社,1980.
[2] 李福俊.新编万年历[M].郑州:中州古籍出版社,1995.

问题与猜想



由"不全相等的四个完全平方数不能组成等差数列"所想到的

1995年,笔者用较长的篇幅证明了"不全相等的四个完全平方数不能组成等差数列"(即文献[1]的定理3),也可把此结论表述为(本文用$\partial f(x)$表示多项式$f(x)$的次数):

定理1 设$f(x)$是多项式,且$f(n)=u_n^2(u_n\in\mathbf{Q},f(n)$不全相等,$n=1,2,3,4)$能组成等差数列,则$\partial f(x)\geqslant 2$.

由此可得:

定理2 设$f(x)$是多项式,且$f(n)=a_2u_n^2+a_1u_n+a_0(a_2,a_1,u_n\in\mathbf{Q},a_2\neq 0,f(n)$不全相等,$n=1,2,3,4)$能组成等差数列,则$\partial f(x)\geqslant 2$.

证明 显然$\partial f(x)\geqslant 1$.

又假设$\partial f(x)=1$,得数列$\{f(n)\}_{1\leqslant n\leqslant 4}$是等差数列,所以数列$\left\{\frac{1}{a_2}\left[f(n)+\frac{a_1^2-4a_2a_0}{4a_2}\right]\right\}_{1\leqslant n\leqslant 4}$即$\left\{\left(u_n+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2\right\}_{1\leqslant n\leqslant 4}$是等差数列,这与定理1矛盾!所以$\partial f(x)\geqslant 2$.

定理3 设$f(x)$是多项式,$\partial f(x)\neq 2$,且$f(n)=u_n^2(u_n\in\mathbf{Q},f(n)$不全相等,$n=1,2,3,4,5)$能组成等差数列,则$\partial f(x)\geqslant 3$.

定理4 设$f(x)$是多项式,$\partial f(x)\neq 2$,且$f(n)=a_2u_n^2+a_1u_n+a_0(a_2,a_1,u_n\in\mathbf{Q},a_2\neq 0,f(n)$不全相等,$n=1,2,3,4,5)$能组成等差数列,则$\partial f(x)\geqslant 3$.

由定理1,2,笔者提出如下猜想:

猜想1 设$f(x)$是多项式,且$f(n)=u_n^k(k\in\mathbf{N}^*,u_n\in\mathbf{Q},f(n)$不全相等,$n=1,2,\cdots,k+3)$能组成等差数列,则$\partial f(x)\geqslant k$.

猜想2 设$f(x)$是多项式,且$f(n)=\sum_{i=1}^{k}a_iu_n^i+a_0(k\in\mathbf{N}^*,a_i,u_n\in\mathbf{Q},a_k\neq 0,f(n)$不全相等,$i=1,2,\cdots,k;n=1,2,\cdots,k+2)$,则$\partial f(x)\geqslant k$.

当$k=1,2$时,猜想1,2均成立.

由定理3,4,笔者再提出如下猜想:

猜想 3　设 $f(x)$ 是多项式，$\partial f(x)\neq 2$，且 $f(n)=u_n^2$（$u_n\in\mathbf{Q}$，$f(n)$ 不全相等，$n=1,2,\cdots,l$，$l\geqslant 5$），则 $\partial f(x)\geqslant l-2$.

猜想 4　设 $f(x)$ 是多项式，$\partial f(x)\neq k$，且 $f(n)=u_n^k$（$k\in\mathbf{N}^*$，$k\geqslant 2$，$u_n\in\mathbf{Q}$，$f(n)$ 不全相等，$n=1,2,\cdots,l$；$l\geqslant k+3$），则 $\partial f(x)\geqslant l-2$.

猜想 5　设 $f(x)$ 是多项式，$\partial f(x)\neq k$，且 $f(n)=\sum_{i=1}^{k}a_iu_n^i+a_0$（$k\in\mathbf{N}^*$，$k\geqslant 2$，$a_i,u_n\in\mathbf{Q}$，$a_k\neq 0$，$f(n)$ 不全相等，$i=1,2,\cdots,k$；$n=1,2,\cdots,l$；$l\geqslant k+3$），则 $\partial f(x)\geqslant l-2$.

参考文献

[1] 甘志国.有理数集上不存在四连贯的二次多项式[J].数学通讯,1995(12):23-26.

关于 n 连贯多项式的一个问题

定义[1] 若数集 K 上的多项式 $f(x)+i(i=0,1,\cdots,n-1;n\geqslant 2)$ 均在 K 上可约，则称 $f(x)$ 为 K 上的 n 连贯多项式，二连贯多项式简称连贯多项式.

文献[2]提出了关于 n 连贯多项式的两个猜想：

(1) 有理数集 $\mathbf{Q}$ 上不存在四连贯的二次多项式；

(2) $\mathbf{Q}$ 上不存在 $(n+2)$ 连贯的 n 次多项式.

文献[3]用近五千字的篇幅给出了猜想(1)的初等证明；文献[4]找到了整数集 $\mathbf{Z}$ 上的五连贯三次多项式，从而否定了猜想(2).

本文提出以下关于 n 连贯多项式的问题.

问题 1 对于已知的整数 $m\geqslant 2$，在 $\mathbf{Z}$(或 $\mathbf{Q}$)上存在 n 连贯 m 次多项式的 n 的最大值记为 $ZL(m)$(或 $QL(m)$)，怎样求 $ZL(m)$，$QL(m)$？

文献[4]还给出了以下结论：整数集上存在 n 连贯 n 次多项式，有理数集上存在 $(n+1)$ 连贯的 n 次多项式. 所以，对于问题 1 有以下结论：

$$ZL(m)\leqslant QL(m);m\leqslant ZL(m);m+1\leqslant QL(m)$$
$$ZL(2)=QL(2)=3;5\leqslant ZL(3)$$

对于问题 1，本文又提出如下猜想：

(1) $ZL(3)=QL(3)=5$；

(2) $ZL(m)=QL(m)=2m-1$；

(3) $\mathbf{Q}$ 及 $\mathbf{Z}$ 上均不存在 $2n$ 连贯的 n 次多项式；

(4) $\mathbf{Q}$ 及 $\mathbf{Z}$ 上均存在 $(2n-1)$ 连贯的 n 次多项式.

还可研究问题 1 的伴随问题：

问题 2 对于已知的整数 $n\geqslant 2$，在 $\mathbf{Z}$(或 $\mathbf{Q}$)上存在 n 连贯 m 次多项式的 m 的最小值记为 $Zl(n)$(或 $Ql(n)$)，怎样求 $Zl(n)$，$Ql(n)$？

参考文献

[1] 杨之. 初等数学研究的问题与课题[M]. 长沙：湖南教育出版社，1993：192.

[2] 杨仕椿. 关于 whc78，whc79 的解决[J]. 数学通讯，1995(2)：19-20.

[3] 甘志国. 有理数集上不存在四连贯的二次多项式[J]. 数学通讯，1995(12)：23-26.

[4] 甘志国. 关于 n 连贯多项式的几个结论[J]. 中学数学，1998(11)：35-37.

一个猜想的证明

我们知道,当 $m \geqslant 2$ 时,Euler函数 $\varphi(m) = p_1^{\alpha_1-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)\cdots(p_k-1)$,其中

$$m = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}(p_i\text{ 是互不相同的素数},\alpha_i \in \mathbf{N}^*, i = 1,\cdots,k) \qquad ①$$

关于 $\varphi(m)$,有一个迄今未得证实的猜想:不存在满足 $\varphi(m) = m - 1$ 的合数 m.这是半个世纪前莱梅(Lehmer)提出的[1].

以下定理说明这个猜想成立.

定理　当 $m \geqslant 2$ 时,$\varphi(m) \leqslant m - 1$,当且仅当 m 是素数时取等号.

证明　当 $a_1,\cdots,a_k \in \mathbf{R}^+$,$k \geqslant 2$ 时,有

$$a_1\cdots a_k < (a_1+1)\cdots(a_k+1) - 1$$

当 $a_1,\cdots,a_k \in \mathbf{R}^+$ 时,有 $a_1\cdots a_k \leqslant (a_1+1)\cdots(a_k+1) - 1$(当且仅当 $k = 1$ 时取等号).

由此,得

$(p_1^{\alpha_1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k}-1) \leqslant p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k} - 1$($p_i$ 是互不相同的素数,$\alpha_i \in \mathbf{N}^*$,$i = 1,\cdots,k$)(当且仅当 $k = 1$ 时取等号)　②

设 m 为 ① 的形式,则 $p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1) = p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1} \leqslant p_i^{\alpha_i} - 1$(当且仅当 $\alpha_i = 1$ 时取等号)($i = 1,\cdots,k$).所以 $(p_1^{\alpha_1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k}-1)(p_1-1)\cdots(p_k-1) \leqslant (p_1^{\alpha_1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k}-1)$(当且仅当 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1$ 时取等号).

又由 ②,得 $(p_1^{\alpha_1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k}-1)(p_1-1)\cdots(p_k-1) \leqslant p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k} - 1$(当且仅当 $k = 1$,$\alpha_1 = 1$ 时取等号).

即定理成立.

参考文献

[1] 熊全淹.初等整数论[M].2 版.武汉:湖北教育出版社,1989:63-64.

公元纪年中三个计算问题的解决

1 公元纪年

公历，又称阳历，就是我们平常所说的公元某年某月某日，公历一年的时间是地球绕太阳公转一周所需的时间，大约是365.242 198 78天，合365天5时48分46秒，为了使一年的时间是整数天，就规定平年365天，闰年366天．公元年份能被4整除的是闰年，但世纪年(指能被100整除的年份)要能被400整除才是闰年，其余的年份是平年．每年包括12个月，从前到后依次是1月，2月，…，12月，其中1，3，5，7，8，10，12月均月大，每月31天(从前到后依次是1日，2日，…，31日)；4，6，9，11月均月小，每月30天，平年的2月28天，闰年的2月29天．

由以上平年及闰年的设置方法可知，任意连续的400年中共设置97个闰年，共$365\times400+97=146\ 097$(天)，平均每年为365.242 5天，比实际的一年仅长约0.000 3天，需积三千多年才多出一天[1]．

为了简便，本文就假设公历(公元纪年)从公元1年1月1日开始一直是按上述方法安排的．本文把公元a年简记为a年($a\in\mathbf{N}^*$)．

在上述假设下，本文将完全解决公元纪年中的三个计算问题：

问题1 从a年b月c日到a'年b'月c'日经过了多少天？

问题2 a年b月c日是星期几？

问题3 从a年b月c日经过T天后(前)是哪一天？

(“经过的天数”的意义是这样的：比如从1年1月1日到1年1月5日经过的天数是4，从1年1月5日到1年1月1日经过的天数也是4，从1年1月1日经过4天后(-4天前)是1年1月5日．)

在上述问题中，若涉及公元前的日子，本文将不研究．

2 问题1的解决

定义1 $G(a,b,c)=$从1年1月1日到a年b月c日经过的天数．$f(a)=G(a,1,1)$．$g(a,b)=$从a年1月1日到a年b月1日经过的天数．

求$g(a,b)$的值，可由递推公式“$g(a,1)=0,g(a,b+1)=g(a,b)+a$年$b$月的天数($b=1,2,\cdots,11$)”计算，也可查表1(表1中$g(a,b)$栏左边表示$a$年不是闰年时的值，右边表示$a$年是闰年时的值)：

表 1

b	$g(a,b)$		b	$g(a,b)$	
1	0	0	7	181	182
2	31	31	8	212	213
3	59	60	9	243	244
4	90	91	10	273	274
5	120	121	11	304	305
6	151	152	12	334	335

定义 2 $[x]$表示不大于 x(x 是实数)的最大整数(本文中的“[ ]”均表示取整).

由平年及闰年的设置方法及定义 1,可得:

定理 1 (1)$f(a)=365(a-1)+[\frac{a-1}{4}]-[\frac{a-1}{100}]+[\frac{a-1}{400}]$;

(2)$G(a,b,c)=f(a)+g(a,b)+(c-1)$.

推论 1 从 a 年 b 月 c 日到 a' 年 b' 月 c' 日经过的天数是 $|G(a',b',c')-G(a,b,c)|$.

设 $a\in\mathbf{N}^*$,由带余除法知,存在唯一的一对自然数 q,a_0-1,使 $a-1=400q+(a_0-1),0\leqslant a_0-1<400$.可得 $q=[\frac{a-1}{400}],a_0=a-400[\frac{a-1}{400}]$,$1\leqslant a_0\leqslant 400$.

定理 2 设 $a_0=a-400[\frac{a-1}{400}]$(若 $a\in\mathbf{N}^*$,则 $a_0\in\mathbf{N}^*,1\leqslant a_0\leqslant 400$),则 $G(a,b,c)=146\,097[\frac{a-1}{400}]+G(a_0,b,c)$,且 $G(a_0,b,c)<146\,097$,$G(a_0,b,c)=365(a_0-1)+[\frac{a_0-1}{4}]-[\frac{a_0-1}{100}]+g(a_0,b)+(c-1)$.

证明 $G(a,b,c)$ = 从 1 年 1 月 1 日到 a_0 年 b 月 c 日经过的天数 + 从 a_0 年 b 月 c 日到($a_0+400[\frac{a-1}{400}]$)年 b 月 c 日经过的天数 $=G(a_0,b,c)+$ 每 400 年的天数 $146\,097\times[\frac{a-1}{400}]$.

因为 $1\leqslant a_0\leqslant 400$,所以 $G(a_0,b,c)<G(401,1,1)=146\,097$;$[\frac{a_0-1}{400}]=0$,$G(a_0,b,c)=365(a_0-1)+[\frac{a_0-1}{4}]-[\frac{a_0-1}{100}]+g(a_0,b)+(c-1)$.

用定理 1 或 2 均可计算出 $G(a,b,c)$,再由推论 1 就解决了问题 1.

3 问题 2 的解决

容易查得 2001 年 1 月 1 日是星期一. 因为每 400 年的天数 146 097 是 7 的整数倍,所以 1 年 1 月 1 日也是星期一. 再由定理 1 得:

定理 3 a 年 b 月 c 日是星期 $x(a,b,c)$,其中 $x(a,b,c)=(a+g(a,b)+c+[\frac{a-1}{4}]-[\frac{a-1}{100}]+[\frac{a-1}{400}]-1)$ 除以 7 所得的余数(当 $x(a,b,c)=0$ 时,表示 a 年 b 月 c 日是星期天,下同).

推论 2 (1) a 年元旦是星期 $x(a,1,1)$,其中 $x(a,1,1)=(a+[\frac{a-1}{4}]-[\frac{a-1}{100}]+[\frac{a-1}{400}])$ 除以 7 所得的余数;

(2) a 年 2 月 1 日是星期 $x(a,2,1)$,其中 $x(a,2,1)=(a+[\frac{a-1}{4}]-[\frac{a-1}{100}]+[\frac{a-1}{400}]+3)$ 除以 7 所得的余数.

推论 3 设 $a_0=a-400[\frac{a-1}{400}]$(若 $a\in\mathbf{N}^*$,则 $a_0\in\mathbf{N}^*$, $1\leqslant a_0\leqslant 400$),则 $x(a,b,c)=x(a_0,b,c)$.

定理 3 或推论 3 完全解决了问题 2.

4 问题 3 的解决

4.1 从 1 年 1 月 1 日经过 $t(0\leqslant t<146\,097)$ 天后是哪一天?

这个问题就是求方程

$$G(a_0,b,c)=t(t\text{ 是已知的自然数}, t<146\,097) \qquad ①$$

的解 (a_0,b,c)(因为解要符合"a_0 年 b 月 c 日"的限制,所以对于已知的 t,方程 ① 均有唯一确定的解,且 $1\leqslant a_0\leqslant 400$).

定义 3 本文记 $i=[\frac{t}{36\,524}]$, $j=\frac{t+i+1}{1\,461}$, $k=t-[\frac{t+i}{1\,461}]+i$, $l=k-365[\frac{k}{365}]$.

定理 4 在方程 ① 中,有 $[\frac{a_0-1}{4}]-[\frac{a_0-1}{100}]=[\frac{t+i}{1\,461}]-i$.

证明 因为 $f(5)=365\times4+1=1\,461$, $f(101)=365\times100+24=36\,524$,所以:

当 $0\leqslant t<36\,524$ 时, $0\leqslant a_0-1<100$, $[\frac{a_0-1}{100}]=0$, $[\frac{a_0-1}{4}]=[\frac{t}{1\,461}]$(因为 $0\leqslant a_0-1<100$ 时,每四年一闰),此时结论成立.

当 $36\,524\leqslant t<73\,048$ 时, $100\leqslant a_0-1<200$(因为 $f(201)=73\,048$),

$[\frac{a_0-1}{100}]=1,[\frac{a_0-1}{4}]=\frac{t+1}{1\,461}$(因为公元 100 年不是闰年),此时结论也成立.

当 $73\,048 \leqslant t < 109\,572, 109\,572 \leqslant t < 146\,097$ 时,均可证得定理 4 成立.

定理 5 若 $G(a_0,b,c)=t(0 \leqslant t < 146\,096)$,则 a_0 年 b 月 c 日是某个闰年的年底 $\Leftrightarrow j \in \mathbf{N}^*$.

证明 因为 $G(400,12,31)=146\,096$,所以:

a_0 年 b 月 c 日是某个闰年的年底 $\Leftrightarrow t=G(a_0,b,c)=G(4j',12,31)(j' \in \mathbf{N}^*, 1 \leqslant j' \leqslant 99, j' \neq 25,50,75)=1\,461j'-[\frac{t}{36\,524}]-1$(因为 $f(5)=1\,461$, $f(101)=36\,524$)(又定义 3 说明 $t=1\,461j-i-1$)$\Leftrightarrow j \in \mathbf{N}^*$ 且 $1 \leqslant j \leqslant 99$, $j \neq 25,50,75$.

又由定义 3 中 j 的意义可证:当 $j \in \mathbf{N}^*$ 时必有 $1 \leqslant j \leqslant 99, j \neq 25,50,75$.

下面求方程 ① 的解.

由定理 2,4 及定义 3,得

$$365(a_0-1)+g(a_0,b)+(c-1)=k \qquad ②$$

当且仅当 a_0 年是闰年,$b=12,c=31$ 时,$g(a_0,b)+(c-1)=365$,否则 $g(a_0,b)+(c-1)<365$.

又由定理 5 知,当且仅当 $t=146\,096$ 或 $j \in \mathbf{N}^*$ 时,$g(a_0,b)+(c-1)=365$,定理 5 已给出此时的解($t=146\,096$ 时的解为:$a_0=400,b=12,c=31$).

除此之外的解,可用以下方法求得:

因为 $g(a_0,b)+(c-1)<365$,所以由 ② 得 $a_0=[\frac{k}{365}]+1, g(a_0,b)+(c-1)=l$($l$ 见定义 3).

查表 1,设 b_0 满足

$$g(a_0,b_0) \leqslant l < g(a_0,b_0+1) \qquad ③$$

则 $b=b_0, c=l+1-g(a_0,b_0)$,从而有

定理 6 方程 ① 有唯一解(从 1 年 1 月 1 日经过 t 天后是 a_0 年 b 月 c 日):

(1) 当 $t=146\,096$ 时,$a_0=400,b=12,c=31$.

(2) 当 $0 \leqslant t < 146\,096$ 且 $j \in \mathbf{N}^*$ 时,$a_0=4j,b=12,c=31$.

(3) 当 $0 \leqslant t < 146\,096$ 且 $j \notin \mathbf{N}^*$ 时,$a_0=[\frac{k}{365}]+1, b=b_0, c=l+1-g(a_0,b_0)$.

(其中 j,k,l 的意义见定义 3,b_0 由式 ③ 确定.)

4.2 从 1 年 1 月 1 日经过 T_0($T_0 \in \mathbf{N}$) 天后是哪一天?

我们容易理解下面的定理 7 成立:

定理 7 设 T_0 是已知的自然数，$T_0 = 146\,097[\frac{T_0}{146\,097}] + t$，则 t 是已知的整数，$0 \leqslant t < 146\,097$. 又设 $G(a_0, b, c) = t$ 的解已由定理 6 得到，则 $G(a, b, c) = T_0$ 的解为 $a = a_0 + 400[\frac{T_0}{146\,097}]$；$b, c$ 已求出.（从 1 年 1 月 1 日经过 T_0 天后是 a 年 b 月 c 日.）

4.3 从 a 年 b 月 c 日经过 $T(T \in \mathbf{N})$ 天后是哪一天？

设从 a 年 b 月 c 日经过 T 天后是 a' 年 b' 月 c' 日，由推论 1 得

$$G(a', b', c') = G(a, b, c) + T \quad ④$$

定理 8 从 a 年 b 月 c 日经过 T（T 是已知的自然数）天后是 a' 年 b' 月 c' 日，这里 (a', b', c') 是方程 ④ 的解（解可由定理 7 求出）.

4.4 从 a 年 b 月 c 日经过 $T'(0 \leqslant T' \leqslant G(a, b, c))$ 天前是哪一天？

设从 a 年 b 月 c 日经过 T' 天前是 a' 年 b' 月 c' 日（若 $T' > G(a, b, c)$，则从 a 年 b 月 c 日经过 T' 天前是公元前的某一天），得

$$G(a', b', c') = G(a, b, c) - T' \quad ⑤$$

定理 9 从 a 年 b 月 c 日经过 T'（T' 是已知的自然数，$T' \leqslant G(a, b, c)$）天前是 a' 年 b' 月 c' 日，这里 (a', b', c') 是方程 ⑤ 的解（解可由定理 7 求出）. 即定理 8 在 T 是不小于 $-G(a, b, c)$ 的非正整数时也成立.

因为问题 4.1 ~ 4.4 已解决，所以问题 3 也已解决.

参考文献

[1] 卢平安，周连亨. 你了解时间吗？[M]. 石家庄：河北人民出版社，1980：15-23.

管家的难题

笔者多次研读《200个趣味数学故事》([英]亨利·E·杜登尼著,芮嘉诰等译,1984年湖南科学技术出版社出版)这本书,该书老少皆宜,无论你是小学生,中学生还是大学生都可以读读它,定会深感趣味性强,并动笔动脑去钻研里面的难题.先来看第一个故事——管家的难题:

贵族庄园的管家,是一个狡猾和有相当文化的人.按乔叟的说法,"他工于计算土地、粮柜与母羊,他肆意篡改仓库的储蓄,使所有收租征税者受骗上当."诗人还指出,"任何时候他不会落于圈套,对复杂的问题了如指掌……"因此,各种有趣的问题和奇妙的想法时时出现在他机敏的头脑中.当一批朝圣者滞留在三岔路口时,他锐利的目光立刻发现路旁有一些大小不同的圈形干酪.他灵机一动,"这就有了,请拿四张方凳来".他要提出自己的一个难题,供大家休息时动脑筋.接着,管家把8个干酪圈放在最靠边的一张方凳上,如图1所示呈宝塔形.

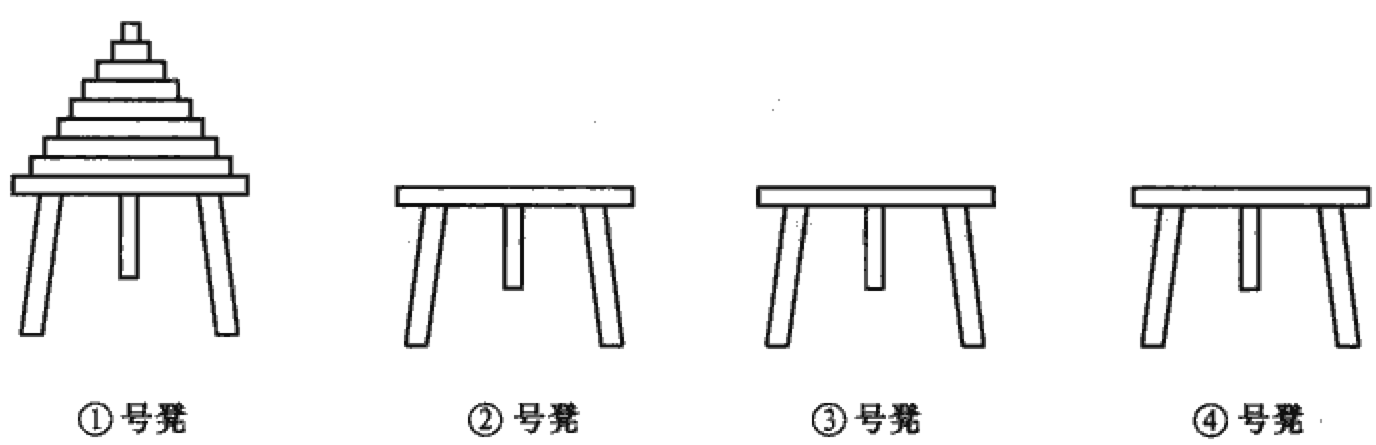


图1

"这个问题",他高声说,"有一次我向自己的好朋友,住在诺尔佛克的波茨艾尔提出.我以圣约瑟夫的名义发誓,他们中间竟找不出任何人能解决它!然而它很简单,因为我只是要求把这堆干酪圈搬到另一张凳上,仍然堆成宝塔形,每次移动一个干酪圈,并且每次都不许把大干酪圈搁在小干酪圈上面.谁能以最少的步数来完成这项工作,我将用刚刚由我们好客的老板找到的最好的酒来招待他."

能够解决8个干酪圈的情形,然后可以考虑10个,最后是21个的情形,这都是很有意思的.

本文试图解答其一般情形:

n 圈 m 凳问题 参见图1,从小到大的 n 个圈 $1,2,\cdots,n$ 堆在①号凳子上呈宝塔形,还有包括①在内的 m 个凳子①,②,…,ⓜ.要把①号凳子上的圈全部搬到别的某个凳子上且依然呈宝塔形,一步只能搬一个圈,每个凳子上均不能出现大号圈在小号圈上面的情形.求搬动的最少步数 $a_n^{(m)}$.$(m,n\in\mathbf{N}^*,m\geqslant 2)$

显然,$a_1^{(m)}=1$.

下面研究 $n\geqslant 2$ 且 $m\geqslant 3$ 的情形.

定理1 $a_n^{(3)}=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明 参见图1,要把①号凳子上的圈 $1,2,\cdots,n$ 均放到另一个凳子上,必须先把圈 $1,2,\cdots,n-1$ 先放到②或③上呈宝塔形($a_{n-1}^{(3)}$ 步),再把圈 n 放到③或②上(1步),最后再把圈 $1,2,\cdots,n-1$ 搬到圈 n 上($a_{n-1}^{(3)}$ 步),这就完成了要求.

所以 $a_n^{(3)}=2a_{n-1}^{(3)}+1(n\geqslant 2)$,又 $a_1^{(3)}=1$

可求得 $a_n^{(3)}=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

定理2 (1)$a_{C_{n+1}^2}^{(4)}=2a_{C_n^2}^{(4)}+a_n^{(3)}(n\geqslant 2)$;

(2)$a_{C_n^2}^{(4)}=(n-2)2^{n-1}+1(n\geqslant 2)$.

证明 (1)参见图1,比如,要把①号凳子上的圈全搬到④号凳子上.先要把①号凳子上的圈 $1\sim C_n^2$ 放到②号一个凳子上(显然不能放到②,③,④三个凳子上,否则①号凳子上剩下的圈就搬不走了;若放在②,③两个凳子上,则①号凳子上剩下的圈 $C_n^2+1\sim C_{n+1}^2$ 共 $n(n\geqslant 2)$ 个圈只能全部放到④号凳子上,且②,③号凳子不能用(因为上面放的有比这 n 个圈小的圈),这也不能搬动)用 $a_{C_n^2}^{(4)}$ 步,再把①号凳子上剩下的 n 个圈搬到④号凳子上用 $a_n^{(3)}$ 步(因为只能用①,③,④号凳子),最后把②号凳子上的 C_n^2 个圈搬到④号凳子的 n 个圈之上用 $a_{C_n^2}^{(4)}$ 步.显然这样搬动的步数是最少的,所以结论(1)成立.

(2)由(1)及定理1,得

$$\frac{a_{C_{n+1}^2}^{(4)}}{2^{n+1}}=\frac{a_{C_n^2}^{(4)}}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}(n\geqslant 2)$$

设 $\frac{a_{C_n^2}^{(4)}}{2^n}=b_n(n\geqslant 2)$,得

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}(n\geqslant 2)$$

$$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_3-b_2)+b_2=$$
$$\frac{1}{2}\cdot(n-2)-(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^3})+\frac{1}{4}=\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2}-1(n\geqslant 3)$$

进而,得 $b_n=\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2}-1(n\geqslant 2)$,有(2)成立.

定理 3 $a^{(m)}_{C^{m-2}_{n+m-3}}\leqslant 2a^{(m)}_{C^{m-2}_{n+m-4}}+a^{(m-1)}_{C^{m-3}_{n+m-4}}(n\geqslant 2,m\geqslant 3)$.

证明 $C^{m-2}_{n+m-4}+C^{m-3}_{n+m-4}=C^{m-2}_{n+m-3}$.

参见图1,先把①号凳子上的圈 1 ~ C^{m-2}_{n+m-4} 搬到②号凳子上用 $a^{(m)}_{C^{m-2}_{n+m-4}}$ 步,再把①号凳子上剩下的 C^{m-3}_{n+m-4} 个圈搬到③号凳子上用 $a^{(m-1)}_{C^{m-3}_{n+m-4}}$ 步(因为②号凳子不能用),最后把②号凳子上的 C^{m-2}_{n+m-4} 个圈搬到③号凳子上用 $a^{(m)}_{C^{m-2}_{n+m-4}}$ 步,说明用 $2a^{(m)}_{C^{m-2}_{n+m-4}}+a^{(m-1)}_{C^{m-3}_{n+m-4}}$ 步可把①号凳子上的圈全部搬到③号凳子上,所以定理3成立.

定理 4 $a^{(5)}_{C^3_n}\leqslant(n^2-5n+8)2^{n-3}-1(n\geqslant 3)$.

证明 在定理3中令 $m=5$,得

$$a^{(5)}_{C^3_{n+2}}\leqslant 2a^{(5)}_{C^3_{n+1}}+(n-1)2^n+1(n\geqslant 2)$$
$$\frac{a^{(5)}_{C^3_{n+2}}}{2^{n+2}}\leqslant\frac{a^{(5)}_{C^3_{n+1}}}{2^{n+1}}+\frac{n-1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}(n\geqslant 2)$$

设 $b_n=\frac{a^{(5)}_{C^3_n}}{2^n}(n\geqslant 3)$,得

$$b_{n+2}-b_{n+1}\leqslant\frac{n-1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}(n\geqslant 2)$$
$$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_4-b_3)+b_3\leqslant$$
$$\frac{n^2-5n+8}{8}-\frac{1}{2^n}(n\geqslant 4)$$

进而,得 $b_n\leqslant\frac{n^2-5n+8}{8}-\frac{1}{2^n}(n\geqslant 3)$,有定理4成立.

原书的解答只给出了一些具体数据的结果(没阐述理由),从这些数据来看,本文的定理3,4中均应取等号,请读者能给出其理由.本文只研究了 n 是 $C^{m-2}_{n'+m-3}(n'\in\mathbf{N}^*)$ 数时 $a^{(m)}_n$ 的求法,其余的情形请读者能解答它(原书说 $a^{(4)}_8=33$).

对一道课本例题的异议及产生的新问题

全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修Ⅱ)》(2004年人民教育出版社)第141～142页例2的题目及其解答均有误.题目第142页第一行中的“磁道之间的宽度必须大于 m”应改为“……必须不小于 m”;解答中的“即每条磁道上的比特数最多可达到$\frac{2\pi r}{n}$”也不对,因为$\frac{2\pi r}{n}\notin \mathbf{N}$时就达不到$\frac{2\pi r}{n}$.题目作上述改动后,该题的解法思路是:

因为“存储量 = 磁道数 × 每磁道的比特数”,所以应使磁道数尽可能地增加,存储区的内半径 r 也应尽可能地增加,所以最外面的磁道(不存储任何信息)就是磁盘的边缘(半径为 R 的圆).

设可存储信息的磁道数是 $k(k\in \mathbf{N}^*)$,则里面的磁道半径 $r=R-km$,得存储量

$$a_k = k\left[\frac{2\pi}{n}(R-km)\right]$$

这里$[x]$表示不大于实数 x 的最大整数,π 表示圆周率,m,n,R 是已知的正数,$R>m$).

原题即求 $k\in \mathbf{N}^*$ 且 $k<\frac{R}{m}$ 时,$a_k=k\left[\frac{2\pi}{n}(R-km)\right]$ 的最大值.

此问题也是本文提出而未解决的问题.

浅探一个最值问题

定理 如图1,在已知的$\triangle ABC$(设其面积为S)中,$BC=a$,边BC上的高$AH=h$,B_i,C_i分别在边AB,AC上($i=1,2,\cdots,n$),$BC\,/\!/\,B_1C_1\,/\!/\,B_2C_2\,/\!/\cdots/\!/\,B_nC_n$,$B_{i-1},B_i',C_i',C_{i-1}$共线(约定$B_0=B,C_0=C$),$B_iB_i'\,/\!/\,AH\,/\!/\,C_iC_i'$(则四边形$B_iB_i'C_i'C_i$是矩形,设其面积为$S_i$),若$\sum\limits_{i=1}^{n}S_i$取最大值,则

(1)$B_iB_i'=\dfrac{h}{n+1}$;

(2)$B_iC_i=(1-\dfrac{i}{n+1})a$;

(3)$S_i=\dfrac{2(n+1-i)}{(n+1)^2}S$;

(4)$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}S_i}{S}=\dfrac{n}{n+1}$.

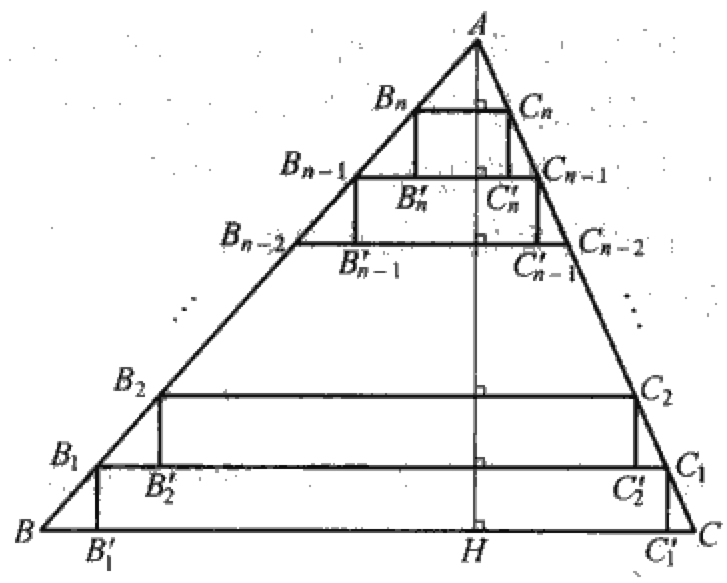


图1

证明 设$B_iC_i=a_i,B_iB_i'=h_i,AH_n=h_{n+1}$,有

$$\sum_{i=1}^{n+1}h_i=h,\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}S_i}{S}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ih_i}{\frac{1}{2}ah}$$

又由相似三角形的性质,可得

$$\frac{a_i}{\sum\limits_{j=i+1}^{n+1}h_j}=\frac{a}{h} \quad ①$$

所以

$$a_i=\frac{a}{h}\sum_{j=i+1}^{n+1}h_j$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}S_i}{S}=\frac{\frac{a}{h}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n+1}h_ih_j}{\frac{1}{2}ah}=\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n+1}h_i)^2-\sum\limits_{i=1}^{n+1}h_i^2}{h^2}=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1}h_i^2}{h^2}$$

由 Cauchy 不等式,得

$(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} h_i^2 \geqslant (\sum_{i=1}^{n+1} h_i)^2 = h$(当且仅当 $h_1 = h_2 = \cdots = h_{n+1} = \frac{h}{n+1}$ 时"$\leqslant$"中取等号),所以

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{S} \leqslant 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

再注意式①,可得结论(1)~(4)均成立.

文献[1]的题目2是定理中 $n = 2$ 的情形.

问题 怎样用一张三角形纸片剪出 n 个完整的矩形纸片("完整"指每个矩形均不是拼接而成的),使这些矩形的面积之和最大?

先看问题中 $n = 4$ 的情形:

可能有的读者会认为,按图2的方法剪出的四个矩形面积之和最大.

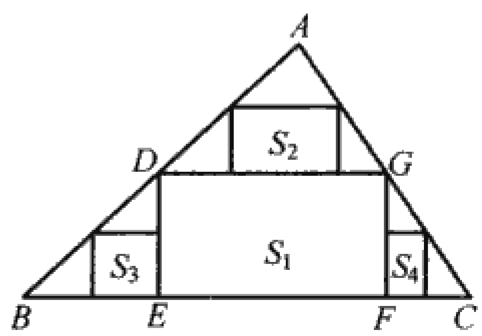


图 2

在图2中矩形 S_1, S_2, S_3, S_4 分别是 $\triangle ABC$, $\triangle ADG$, $\triangle DBE$, $\triangle GCF$ 的最大内接矩形,由定理(4)得这四个矩形的面积分别是相应三角形面积的一半,所以这四个矩形的面积之和是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{3}{4}$. 而按定理的剪法,可剪出四个矩形面积之和是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{4}{5}$.

猜想 若用一张面积为 S 的三角形纸片剪出的 n 个完整的矩形纸片的面积之和最大,则和为 $\frac{n}{n+1}S$,且这 n 个矩形的面积从大到小依次是 $\frac{2(n+1-i)}{(n+1)^2}S(i = 1,2,\cdots,n)$.

参考文献

[1] 甘志国. 用数学眼光看世界[J]. 数学通讯,2001(8):44-45.

CHUDENG SHUXUE YANJIU



$\sum_{i=0}^{37}$ 刘培杰数学工作室

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@yahoo.com.cn

ISBN 978-7-5603-2733-4

9 787560 327334 >

上架建议：初等数学／数学教育／奥数

定价 68.00 元